Die Differential- und Integralgleichungen

der Mechanik und Physik

herausgegeben von

Dr. Philipp Frank
o. Professor
an der Deutschen Universität in Prag

und

Dr. Richard v. Mises
o. Professor
an der Universität Berlin

2. vermehrte Auflage
zugleich 8. Auflage von Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Published and distributed in the public interest by authority of the Alien Property Custodian under license No. A-93.

Publisher: MARY S. ROSENBERG, *Book-Seller and Importer*
235 West 108th Street • New York 25, N. Y.

1943

Erster/mathematischer/Teil

unter Mitarbeit von L. Bieberbach-Berlin, C. Carathéodory-München, R. Courant-Göttingen, Ph. Frank-Prag, R. Iglisch-Berlin, K. Löwner-Prag, H. Rademacher-Breslau, Erich Rothe-Breslau, Günther Schulz-Berlin, G. Szegö-Königsberg

herausgegeben von

Dr. Richard v. Mises
o. Professor an der Universität Berlin

Vorwort zur ersten Auflage

Als Heinrich Weber wenige Jahre vor seinem Tode die fünfte Auflage (die zweite von ihm herausgegebene) des „Riemann-Weber“ vorbereitete, erschien ihm schon eine durchgreifende Neubearbeitung des ganzen Werkes als wünschenswert. Er wandte sich mit der Einladung zur Mitarbeit an verschiedene jüngere Kollegen, vor allem an Josef Wellstein und an seinen Sohn Rudolf Weber (die ihm leider beide bald im Tode nachgefolgt sind) und auch an den Unterzeichneten. Doch erwies sich damals die zur Verfügung stehende Zeit als zu kurz und so kam 1910 die gegenüber der vierten nur wenig veränderte fünfte Auflage heraus, der später noch ein ganz unveränderter Abdruck als sechste Auflage gefolgt ist. Inzwischen hat sich der Stoff, der behandelt werden muß, wenn man dem Physiker eine einigermaßen ausreichende Grundlage für die mathematische Durchdringung seiner Probleme darbieten will, so sehr erweitert, daß eine vollständige Neugliederung des Ganzen und eine bis ins Einzelne gehende Neubearbeitung aller Teile unabweisbar erschien. Man wird vielleicht bezweifeln, ob die neuen Herausgeber berechtigt waren, dem völlig veränderten Werke den Titel des alten voranzustellen, und gewiß mag auch der Umstand, daß Heinrich Weber in seinen letzten Lebensjahren verschiedene Abschnitte (so die Theorie der Integralgleichungen, die Prinzipien der analytischen Mechanik) gemeinsam mit dem Unterzeichneten (und mit P. Epstein, A. Speiser und J. Wellstein) in Straßburger Seminarübungen behandelte, keinen genügenden „Kontinuitätsbeweis“ bilden. Allein wir wollten mit dem Zusatz auf dem Titelblatt nicht unsere Verantwortung einschränken, sondern vor allem einer Pflicht der Pietät genügen und, was an uns gelegen ist, dazu beitragen, die verehrungswürdigen Namen Riemanns und Webers in der jüngeren Physikergeneration lebendig zu erhalten.

Die auffallendste Veränderung, die wir vorgenommen haben und die einer Rechtfertigung bedarf, ist die Trennung in einen „mathematischen“ Teil (1. Band) und einen „physikalischen“ (2. Band). Gewiß bildete in der alten Ausgabe die stete Abwechslung zwischen Kapiteln rein mathematischen Inhalts und solchen, die von physikalischen Fragestellungen ausgingen, einen besonderen Reiz. Aber diesen Grundsatz aufrechtzuerhalten, wäre bei den vielfachen Ver-

knüpfungen, die heute zwischen früher weit auseinander gelegenen Gebieten bestehen, nur auf Kosten der Übersichtlichkeit möglich gewesen und hätte den Umfang des Buches ungebührlich vermehrt. Wir hoffen, daß, wenn erst der zweite Band vorliegt — eine vorläufige Inhaltsübersicht ist am Schluß dieses Bandes beigefügt —, der Leser den neuen Plan billigen wird, der es jedenfalls ermöglicht hat, einen ungleich größeren Stoff in einem nur wenig erweiterten Rahmen unterzubringen.

Zunächst mag es freilich den Anschein erwecken, daß namentlich die ersten Kapitel des vorliegenden Bandes zu weit ausholen und dem wesentlich physikalisch Interessierten allzuviel theoretische „Vorschulung" zumuten. Doch abgesehen davon, daß kaum ein Leser Seite um Seite von Anfang an durcharbeiten wird — dazu vergleiche noch die weiter unten folgende Bemerkung —, ist das, was im ersten Abschnitt gebracht wird, nicht etwa ein bloßer Auszug aus verschiedenen mathematischen Lehrbüchern, sondern ein den Absichten unseres Buches sorgsam angepaßtes Ganzes. So z. B. zielt die durchaus originelle Darstellung der Variationsrechnung im fünften Kapitel unmittelbar auf die Anwendung in der analytischen Mechanik; die Herleitung der Hauptsätze der linearen Algebra und der Vektor- und Tensorrechnung im zweiten weicht — im Hinblick auf das Endziel — mannigfach von den üblichen Darstellungen ab; in den ganz knappen Abriß der Gleichungstheorie im dritten Kapitel ist die bisher wohl noch von keinem Lehrbuch gegebene Ableitung der für die Stabilitätsfragen grundlegenden Hurwitzschen Formeln aufgenommen u. s. f. — In dem zweiten Abschnitt, der den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet ist, bilden naturgemäß die aus physikalischen Fragestellungen entspringenden Randwertprobleme und die aus diesen sich ergebenden speziellen Funktionen und Reihenentwicklungen den Hauptgegenstand; besonders ausführlich sind die für physikalische Berechnungen wichtigeren Lehrsätze und Formeln über Besselsche Funktionen behandelt. Doch wurde es nicht als überflüssig angesehen, einige Ausführungen über die sogenannten „Anfangswertprobleme" voranzustellen, die z. B. in der elementaren Mechanik vielfache Anwendung finden. Der dritte Abschnitt knüpft an eine Reihe konkreter physikalischer Problemstellungen einen kurzen Abriß der Integralgleichungstheorie an. Im Gegensatz zu den bisher gebräuchlichen Darstellungen ist hier weniger Wert auf die Vollständigkeit von Konvergenzuntersuchungen und ähnliches gelegt, als auf die begriffliche Bedeutung der Ansätze einerseits, auf praktische Lösungsverfahren andererseits. Die Hauptsätze der Potentialtheorie ergeben sich ungezwungen als die für die physikalischen Anwendungen fruchtbarsten Resultate. Was schließlich der

vierte Abschnitt über partielle Differentialgleichungen bringt, bedarf in höherem Maße als das frühere der Ergänzung durch den zweiten Band. Man wird leicht feststellen können, daß in den bisherigen Auflagen des Buches — dem Stande der Entwicklung entsprechend — überhaupt kaum etwas Prinzipielles oder Allgemeines über die partiellen Differentialgleichungen gesagt war. Ihre Behandlung kann auch heute zum größten Teil nur innerhalb der einzelnen physikalischen Kapitel erfolgen; doch schien es immerhin möglich und daher auch geboten, eine Reihe von Grundbegriffen und einige gemeinsame Gesichtspunkte im Rahmen des „mathematischen" Bandes vorwegzunehmen.

Über die Entstehung des Buches ist zu sagen, daß es aus einem vom Herausgeber entworfenen Plan, der hinsichtlich der meisten Kapitel bis ins Einzelne ausgearbeitet war, hervorgegangen ist. In wiederholten Besprechungen, an denen die Mehrzahl der Mitarbeiter teilnahm, sind kleinere Änderungen in der Disposition beschlossen worden. Die einzelnen Manuskripte sind dann vom Herausgeber durchgesehen und dem Ganzen angepaßt worden. Nur die Kapitel V (Carathéodory) und XX (Courant) sind von der Einflußnahme der Herausgeber fast frei geblieben. Es bestand jedoch nirgends die Absicht, alle individuellen Unterschiede zu verwischen und auch nicht die, etwa jede Art von Wiederholung zu vermeiden. Gerade dadurch, daß die von verschiedenen Autoren herrührenden Teile einigermaßen gegeneinander abgeschlossen sind, hoffen wir die Benutzung des Buches erleichtert zu haben. Der Leser, der nicht ganz ohne Vorkenntnisse ist, wird am besten tun, an der Stelle des Buches zu beginnen, an der das ihn interessierende Problem behandelt wird, und nur nach Bedarf, den zahlreichen in den Text eingestreuten Rückverweisungen folgend, frühere Stellen aufzuschlagen. Das ausführliche Inhaltsverzeichnis und das am Schlusse beigegebene Register werden in diesem Sinne dienlich sein.

Es bleibt nur noch übrig, den einzelnen Verfassern für ihre vielfach sehr mühevolle Mitarbeit den herzlichsten Dank zu sagen. Sie haben sich alle den oft große Geduld erheischenden Anforderungen der Gemeinschaftsarbeit bereitwilligst gefügt und es wird nur ihr Verdienst sein, wenn unserem Buche einiger Erfolg beschieden sein sollte. Herrn E. Rothe habe ich auch für freundliche Unterstützung bei der Herausgeberarbeit zu danken.

Wien, zu Ostern 1925

R. v. Mises

Vorwort zur zweiten Auflage

Die neue Auflage zeigt das Buch in wesentlich der gleichen Gestalt wie die letzte. Doch wurde das ganze Manuskript noch einmal sorgfältig durchgearbeitet, von allen Mängeln, die uns bekannt geworden waren, befreit und verschiedentlich ergänzt. Einige größere Zusätze seien hier besonders hervorgehoben.

Zum zweiten Kapitel steuerte Philipp Frank einen kurzen Abriß der Theorie der Gruppen linearer Transformationen bei. Im dritten Kapitel wurden die elliptischen Integrale und Funktionen in erweiterter Form dargestellt. In das zwölfte Kapitel wurde ein von G. Schulz herrührender Abschnitt über singuläre Integralgleichungen aufgenommen. Die stärksten Veränderungen weist der letzte Hauptteil des Buches auf, der den partiellen Differentialgleichungen gewidmet ist. Das fünfzehnte Kapitel, das die Anfangswertprobleme behandelt, ist hauptsächlich von R. Iglisch ganz neu bearbeitet worden. Im siebzehnten ist ein Abschnitt über das Kondensatorproblem hinzugekommen. Das Randwertproblem der elliptischen Differentialgleichungen im achtzehnten Kapitel hat eine neue Darstellung erhalten, für die Behandlung der hyperbolischen Gleichungen ist jetzt auch die Heaviside-Methode herangezogen worden. Auch das neunzehnte Kapitel wurde mehrfach erweitert.

Für die Redaktionsarbeit habe ich in Dr. R. Iglisch einen überaus gewandten, sachverständigen und zuverlässigen Helfer gefunden, der die mühevolle Aufgabe, die Einzelbeiträge dem Gesamtziel des Buches anzupassen, fast selbständig durchgeführt hat. Ihm, wie allen Mitarbeitern, auch an dieser Stelle den Dank auszusprechen, ist mir eine angenehme Pflicht.

Berlin, Juli 1930

R. v. Mises

Inhaltsübersicht

I. Abschnitt

Allgemeine Hilfsmittel

Erstes Kapitel: **Reelle Funktionen**

Von G. Szegö in Königsberg

Zweites Kapitel: **Lineare Gebilde**

Von Ph. Frank in Prag und R. v. Mises in Berlin [1])

---

[1]) Die §§ 1 bis 4 stammen von R. v. Mises, § 5 von Ph. Frank.

Drittes Kapitel: **Komplexe Veränderliche**

Von K. Löwner in Prag

Viertes Kapitel: **Unendliche Reihen und Produkte**

Von G. Szegö in Königsberg

Fünftes Kapitel: Variationsrechnung

Von C. Carathéodory in München

II. Abschnitt

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sechstes Kapitel: **Anfangswertprobleme**

Von L. Bieberbach in Berlin

Siebentes Kapitel: **Randwertaufgaben zweiter Ordnung**

Von L. Bieberbach und R. v. Mises in Berlin

Achtes Kapitel: **Die aus den Randwertaufgaben zweiter Ordnung entspringenden besonderen Funktionen**

Von G. Szegö in Königsberg

Neuntes Kapitel: **Die aus den Randwertproblemen entspringenden Reihenentwicklungen**

Von G. Szegö in Königsberg

Zehntes Kapitel: **Besondere Randwertprobleme**

Von L. Bieberbach und R. v. Mises in Berlin

III. Abschnitt

Integralgleichungen und Potential

Elftes Kapitel: Übersicht der Probleme und Resultate

Von R. v. Mises in Berlin

Zwölftes Kapitel: Auflösung der Integralgleichungen

Von R. v. Mises und G. Schulz in Berlin[1])

[1]) Die §§ 1 bis 3 stammen von R. v. Mises, § 4 von G. Schulz.

Dreizehntes Kapitel:

Anwendung der Integralgleichungen auf Randwertprobleme

Von R. v. Mises in Berlin

Vierzehntes Kapitel: **Potential**

Von R. v. Mises in Berlin

IV. Abschnitt

Partielle Differentialgleichungen

Fünfzehntes Kapitel: **Anfangswertprobleme**

Von H. Rademacher in Breslau und R. Iglisch in Berlin

Sechzehntes Kapitel: **Die Potentialgleichung in der Ebene**

Von K. Löwner in Prag

Siebzehntes Kapitel: **Die Potentialgleichung im Raume**

Von G. Szegö in Königsberg

Achtzehntes Kapitel: **Randwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

Von H. Rademacher in Breslau und R. Iglisch in Berlin[1])

[1]) Die §§ 1 bis 4 sind von H. Rademacher, §§ 2 und 3 unter Mitwirkung von R. Iglisch, bearbeitet, § 5 stammt von R. Iglisch.

Neunzehntes Kapitel:

Einige besondere Probleme partieller Differentialgleichungen

Von H. Rademacher und E. Rothe in Breslau[1])

Zwanzigstes Kapitel:

Variationsrechnung und Randwertprobleme

Von R. Courant in Göttingen

[1]) § 2 stammt von H. Rademacher, § 1 und §§ 3 bis 6 von E. Rothe.

I. Abschnitt

Allgemeine Hilfsmittel

Erstes Kapitel

Reelle Funktionen

Die Elemente der Differential- und Integralrechnung bilden naturgemäß die Grundlage für die Lehre von den Differentialgleichungen. In dem vorliegenden ersten Kapitel werden die wichtigsten Definitionen, Sätze und Formeln in knapper Form zusammengefaßt. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Leser von diesen Dingen schon anderweitig Kenntnis genommen hat, und die Zusammenstellung dient in der Hauptsache nur zum Nachschlagen beim Lesen der späteren Abschnitte.

§ 1. Grundbegriffe

1. Stetige Funktionen. Wir betrachten eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $y = f(x)$ der unabhängigen Variablen x. An einer Stelle x_0 zwischen a und b heißt $f(x)$ stetig, wenn der Limes von $f(x_0 + h)$ beim Übergang zu $h = 0$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist; ausführlicher: wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gibt, derart, daß für alle h, die der Bedingung $|h| < \delta$ genügen, die Funktionswerte $f(x_0 + h)$ sich von $f(x_0)$ um weniger als ε unterscheiden:

$$(1) \qquad |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{für} \quad |h| < \delta.$$

(In den Endpunkten a und b des Intervalls werden für h natürlich nur positive bzw. negative Werte zugelassen.) Findet diese Eigenschaft an einer Stelle x_0 nicht statt, so sagen wir, daß f dort unstetig ist. Diese Unstetigkeit kann verschiedene Formen haben. Es ist z. B. möglich, daß der Limes von $f(x_0 + h)$ zwar existiert, aber von $f(x_0)$ verschieden ist; in diesem Falle läßt sich sofort erreichen, daß f an der Stelle x_0 stetig wird, wenn man dort die Definition von f passend abändert. Es kann andererseits vorkommen, daß der

Limes von $f(x_0 + h)$ existiert, wenn h über die positiven bzw. negativen Zahlen gegen 0 konvergiert, daß aber diese Grenzwerte voneinander verschieden sind (Unstetigkeit erster Art oder Sprung). Es ist endlich möglich, daß $f(x_0 + h)$ entweder für positive oder für negative h (oder für beide) keinem Limes zustrebt. In diesem Falle liegt eine Unstetigkeit zweiter Art vor.

Für eine monotone Funktion $f(x)$ existieren beide Grenzwerte

$$(2) \qquad \lim_{h \to +0} f(x+h) = f(x+0), \quad \lim_{h \to -0} f(x+h) = f(x-0)\,^{1)}.$$

Eine solche Funktion kann also nur Unstetigkeiten erster Art haben. Es ist natürlich für alle x entweder immer $f(x+0) \geqq f(x) \geqq f(x-0)$, oder immer umgekehrt.

Ein einfaches Beispiel für Unstetigkeit zweiter Art liefert die Funktion $y = \sin(1/x)$ an der Stelle $x = 0$, wie sie auch für $x = 0$ definiert sein mag.

Ist $y = f(x)$ an jeder Stelle eines endlichen Intervalls $a \leqq x \leqq b$ stetig, so sagen wir, daß y in a, b stetig ist. In diesem Falle ist es, wie man leicht zeigt, möglich, die oben definierte Zahl δ gleichmäßig für die ganze Strecke a, b anzugeben, d. h. so, daß für $|h| < \delta$, wobei δ nur von ε abhängt, die Ungleichung (1) für jedes x_0 in a, b gilt. Mit Rücksicht auf diese Eigenschaft nennt man eine in a, b stetige Funktion gleichmäßig stetig.

Die Summe bzw. das Produkt von stetigen Funktionen ist gleichfalls stetig. Dasselbe gilt für den Quotienten von zwei stetigen Funktionen $f = \varphi/\psi$, soweit ψ an der betreffenden Stelle von 0 verschieden ist. (Man kann dann stets eine Umgebung dieser Stelle angeben, wo $|\psi|$ oberhalb einer positiven Zahl bleibt.)

Eine in $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion nimmt dort mindestens einmal ihre obere bzw. untere Grenze an, so daß man bei einer solchen Funktion von einem Maximum und Minimum sprechen kann. Sei nämlich etwa M die obere Grenze von f in a, b, d. h. jene Zahl, die nicht kleiner ist, als irgendein $f(x)$, während für jeden Wert von $\varepsilon > 0$ sich eine Stelle x angeben läßt, an welcher $f(x) > M - \varepsilon$ ist[2]). Man bilde nun eine Folge ε_n von positiven, gegen 0 konvergierenden Zahlen und x_n sei eine Stelle, wo $f(x_n) > M - \varepsilon_n$ ist. Wir greifen eine solche Teilfolge der ε_n heraus, daß die zugehörigen

---

[1]) $h \to +0$ bzw. -0 heißt, daß h über die positiven bzw. negativen Zahlen gegen 0 konvergiert.

[2]) Wenn $M = +\infty$ angenommen wird, so gestaltet sich der Beweis zunächst analog (es tritt an Stelle von $M - \varepsilon$ eine beliebig große Zahl A) und es ergibt sich natürlich, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

x_n gegen einen Limes ξ streben. Dann geht $f(x_n)$ gegen $f(\xi)$ und es ist $f(\xi) \geqq M$; da aber zugleich $f(\xi) \leqq M$ sein muß, so folgt $f(\xi) = M$. Analog beweist man die Behauptung bezüglich der unteren Grenze m. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, daß eine in a, b stetige Funktion jeden Wert, der zwischen ihrem Minimum und Maximum liegt, mindestens einmal annimmt.

Analoge Definitionen und Sätze gelten für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Es ist hierbei die Definition der „Umgebung" wesentlich. Bei zwei Veränderlichen x, y verstehen wir z. B. unter der Umgebung δ eines Punktes x_0, y_0 die Gesamtheit sämtlicher Punkte x, y, deren Entfernung von x_0, y_0 weniger als δ beträgt, d. h. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$. Entsprechend heißt die Funktion $f(x, y)$ im Punkte x_0, y_0 stetig, wenn für jedes positive ε

$$(1') \qquad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

gilt, sobald x, y einer genügend kleinen Umgebung δ von x_0, y_0 angehört. Eine in diesem Sinne stetige Funktion ist nach den einzelnen Variablen x und y im gewöhnlichen Sinne stetig. Das Umgekehrte ist jedoch nicht richtig, wie das Beispiel

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{wenn} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$
$$f(0, 0) = 0$$

zeigt. Diese Funktion ist unstetig für $(x, y) = (0, 0)$, weil doch längs der verschiedenen Halbstrahlen $y = cx$ die Funktion $f(x, y) = \frac{c}{1 + c^2}$ verschiedene konstante Werte annimmt; sie ist jedoch für alle x (auch für $x = 0$) eine stetige Funktion von y und für alle y (auch für $y = 0$) eine stetige Funktion von x.

2. Funktionen von beschränkter Schwankung. Rektifizierbare Kurven. a) Man betrachte irgendeine Einteilung der Strecke a, b:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

und bilde die Summe

$$(3) \quad \begin{cases} |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \\ \qquad + |f(b) - f(x_{n-1})|. \end{cases}$$

Liegt diese unterhalb einer festen (von n und allen x_ν unabhängigen) Schranke V, so sagen wir, daß $f(x)$ in a, b von beschränkter Schwankung ist. Eine monotone Funktion ist offenbar stets von beschränkter Schwankung, weil dann die Summen (3) sämtlich gleich $|f(b) - f(a)|$ sind. Man zeigt ferner leicht, daß die Summe bzw. das Produkt von Funktionen von beschränkter Schwankung

wieder eine solche ist. Schließlich gilt der Satz, daß jede Funktion von beschränkter Schwankung sich als Summe von zwei monotonen Funktionen schreiben läßt. Sie kann also höchstens Unstetigkeiten erster Art haben.

b) Unter einer Jordanschen Kurve verstehen wir das ein-eindeutige und stetige Bild eines Geradenstückes. Sie kann also mit Hilfe der Parametergleichungen

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t' \leqq t \leqq t'') \tag{4}$$

definiert werden, wo $x(t)$ und $y(t)$ stetig sind und für verschiedene Werte von t niemals beide zugleich denselben Wert annehmen. (Die Kurve ist doppelpunktlos.) Eine Ausnahme können nur die Endpunkte bilden. Ist $x(t') = x(t'')$, $y(t') = y(t'')$, so heißt die Kurve geschlossen.

Ein der Kurve eingeschriebenes Polygon, dessen Ecken den Parameterwerten $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ entsprechen ($t_0 = t'$, $t_n = t''$), besitzt die Länge

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{(x(t_\nu) - x(t_{\nu-1}))^2 + (y(t_\nu) - y(t_{\nu-1}))^2}.$$

Ist die obere Grenze L dieser Längen für die Gesamtheit aller eingeschriebenen Polygone endlich, so heißt die Kurve (4) rektifizierbar und L ihre Länge. Die Kurve (4) ist dann und nur dann rektifizierbar, wenn $x(t)$ und $y(t)$ beide von beschränkter Schwankung sind.

3. Differenzierbarkeit. Die Funktion $y = f(x)$ möge wieder für $a \leqq x \leqq b$ definiert sein und es sei $a < x_0 < b$. Der Limes des „Differenzenquotienten" $[f(x_0 + h) - f(x_0)] : h$, wenn h gegen 0 strebt, heißt der Differentialquotient oder die Ableitung von $f(x)$ in x_0. Man schreibt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'. \tag{5}$$

Aus der Existenz dieses Grenzwertes folgt die Beschränktheit des Differenzenquotienten, d. h. es gibt eine von h unabhängige Zahl M, für die $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < M|h|$ ist. Eine Funktion ist also an jeder Stelle, an der sie differenzierbar ist, zugleich auch stetig. Daß das Umgekehrte im allgemeinen nicht gilt, zeigt z. B. $y = |x|$ für $x = 0$. Weierstrass gab als erster ein Beispiel für eine Funktion, die in einem ganzen Intervall überall stetig, jedoch nirgends differenzierbar ist[1]).

[1]) Abhandlungen zur Funktionenlehre, Berlin (Springer), 1886, S. 92 u. 97; Werke II, S. 223. — Vgl. auch z. B. den Leitfaden von L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung I, Leipzig (Teubner), 3. Aufl. 1928, S. 111—116.

Die geometrische Deutung der Ableitung wird durch den Tangens des Winkels gegeben, den die im Punkt $[x_0, y_0 = f(x_0)]$ an die Kurve $y = f(x)$ gezogene Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt. Daraus folgt, daß $f(x)$ an der Stelle x_0 wächst oder abnimmt, je nachdem $f'(x_0)$ positiv oder negativ ist. Damit also $f(x)$ in x_0 ein Extremum (Maximum oder Minimum) habe, ist jedenfalls notwendig (aber im allgemeinen nicht hinreichend), daß $f'(x_0) = 0$ sei. Um an solchen Stellen das Verhalten von $f(x)$ näher angeben zu können, bilden wir die sogenannten höheren Ableitungen von $f(x)$. [Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist z. B. die erste Ableitung von $f'(x)$ usf.[1]] Ist $f''(x_0) > 0$, so hat $f(x)$ an der Stelle x_0 ein relatives Minimum, d. h. sämtliche Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 fallen größer als $f(x_0)$ aus. Für $f''(x_0) < 0$ hat $f(x)$ in x_0 ein relatives Maximum. Ist allgemein der Index ν der ersten nicht verschwindenden Ableitung gerade, so tritt sicherlich ein Extremum ein, und zwar ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f^{(\nu)}(x_0)$ negativ bzw. positiv ist. Ist dagegen ν ungerade, so geht $f(x)$ wachsend oder abnehmend durch den Punkt x_0, je nachdem $f^{(\nu)}(x_0)$ positiv oder negativ ist.

Es sei noch erwähnt, daß das Vorzeichen der zweiten Ableitung den konvexen bzw. konkaven Charakter der Kurve bestimmt. Ist $f''(x)$ in einem ganzen Intervall positiv, so verläuft dort die Kurve $y = f(x)$ durchweg oberhalb ihrer Tangenten. Analog für $f''(x) < 0$. Ist an einer Stelle $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so ist dies ein Wendepunkt, d. h. ein Punkt, in dessen Umgebung die Kurve vom Konvexen ins Konkave übergeht oder umgekehrt. Ist $f'''(x_0) = 0$, so muß man wiederum die höheren Ableitungen heranziehen, um Bestimmtes über den Verlauf von $y = f(x)$ aussagen zu können.

4. Hauptsätze der Differentialrechnung. Die Summe bzw. das Produkt von differenzierbaren Funktionen ist gleichfalls differenzierbar; dasselbe gilt für Quotienten, sofern der Nenner von 0 verschieden ist. Die betreffenden Formeln dürfen wir als bekannt voraussetzen. Für die n-te Ableitung eines Produktes uv von zwei differenzierbaren Funktionen gilt die Leibnizsche Regel

$$(6)\quad \begin{cases} (uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1} u' v^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{\nu} u^{(\nu)} v^{(n-\nu)} + \cdots \\ \qquad\qquad + \binom{n}{n-1} u^{(n-1)} v' + u^{(n)} v. \end{cases}$$

[1]) Eine Funktion, deren n-te Ableitung (an einer Stelle bzw. in einem ganzen Intervall) existiert, heißt n-mal differenzierbar; ist die n-te Ableitung stetig, so heißt sie n-mal stetig differenzierbar.

Die Ableitungen der elementaren Funktionen x^n, e^x, $\log x$, der trigonometrischen und der Kreisfunktionen sind dem Leser geläufig. Wir erwähnen noch die Ableitungen der Hyperbelfunktionen und ihrer Umkehrungen, die in der Physik häufig vorkommen:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathfrak{Sin}\,x}{dx} = \mathfrak{Cof}\,x, \quad \dfrac{d\,\mathfrak{Cof}\,x}{dx} = \mathfrak{Sin}\,x, \quad \dfrac{d\,\mathfrak{Tg}\,x}{dx} = \dfrac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,x}, \\ \dfrac{d\,\mathfrak{Ctg}\,x}{dx} = -\dfrac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}, \quad \dfrac{d\,\mathfrak{ArSin}\,x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \dfrac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\ \dfrac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad \dfrac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}. \end{cases}$$

Ist $y = f(x)$ und $z = F(y)$, d. h. $z = F[f(x)]$ eine „zusammengesetzte Funktion“, so hat man

$$(8)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = F'[f(x)]\,f'(x).$$

Eine monotone und differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ist „umkehrbar“, d. h. es gibt eine Funktion $x = \varphi(y)$, definiert zwischen den Werten $f(a)$ und $f(b)$, für welche identisch $f[\varphi(y)] = y$ gilt. Man hat

$$(9)\qquad \frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Das **Rollesche** Theorem besagt, daß, wenn $f(x)$ in der ganzen Strecke a, b differenzierbar und $f(a) = f(b) = 0$ ist, irgendwo in a, b die erste Ableitung von f verschwinden muß. Daraus gewinnt man den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $f(x)$ in a, b differenzierbar, so gibt es zwischen a und b mindestens eine Stelle ξ, an der

$$(10)\qquad f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(\xi)$$

gilt. Die geometrische Deutung dieser Gleichung ist geläufig.

Der Mittelwertsatz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, die denselben Bedingungen wie $f(x)$ genügt, ferner noch der Bedingung $\varphi'(x) \neq 0$, so gilt der zweite Mittelwertsatz:

$$(11)\qquad \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

(ξ ist eine passend gewählte Stelle in a, b).

Andererseits erhält man, wenn $f(x)$ in a, b n-mal differenzierbar ist, durch Wiederholung der Überlegungen, die zum Rolleschen Satz führen, den sogenannten Taylorschen Satz:

$$(12)\quad \begin{cases} f(b) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \end{cases}$$

wobei das „Restglied" R_n sich in der Form

$$(13)\quad R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n \qquad (a < \xi < b)$$

schreiben läßt[1]).

Hieraus ergibt sich für eine große Anzahl von elementaren Funktionen ihre Entwicklung in eine unendliche Taylorsche Reihe:

$$(12')\quad \begin{cases} f(b) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \cdots; \end{cases}$$

sie ist so zu verstehen, daß das in der Formel (12) auftretende Restglied R_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert. (Vgl. IV, § 1.) Setzt man hier $a = 0$, $b = x$, so ergibt sich die sogenannte Maclaurinsche Reihe

$$(12'')\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Es ist z. B.

$$(14)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, \\ \log\operatorname{nat}(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots \quad (|x| < 1), \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots, \quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots, \\ \arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1.3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1), \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \quad (|x| < 1). \end{cases}$$

---

[1]) Andere Formen des Restgliedes findet man z. B. bei Bieberbach, Differentialrechnung I, Leipzig (Teubner), 3. Aufl. 1928, S. 91—92.

5. Mehrere Variable. Maximum und Minimum. Die Funktion von zwei Variablen $f(x, y)$ sei in einem Bereich der x, y-Ebene definiert. Betrachtet man $f(x, y)$ als Funktion von x allein, so heißt der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{15}$$

soweit er existiert, die partielle Ableitung von f nach x. Ähnlich definiert man die partielle Ableitung nach y, d. h. $\frac{\partial f}{\partial y}$, sowie die höheren Ableitungen, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ usw.

Es sei l irgendein durch x, y hindurchgehender Halbstrahl. Die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial l}$ von f in der Richtung l wird als der Grenzwert von

$$\frac{f(x', y') - f(x, y)}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}$$

definiert, wenn x', y' längs des Halbstrahles l gegen x, y konvergiert. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta, \tag{16}$$

wobei α und β die Winkel sind, welche l mit den Koordinatenachsen einschließt.

Erwähnt sei der folgende Satz: Existieren in einer gewissen Umgebung von x, y die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und ist dort die letztere stetig, so existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, und es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{17}$$

Es ist nicht schwer, die Taylorsche und Maclaurinsche Formel auf Funktionen von zwei (oder mehreren) Veränderlichen zu übertragen. Letztere lautet:

$$\left\{\begin{aligned} f(x, y) = f(0,0) &+ x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\right. \\ &\left. + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{1}{3!}\left[x^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) + 3x^2y\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)\right. \\ &\left. + 3xy^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right) + y^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)\right] + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

wo die in Klammern gesetzten Ableitungen $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ usw. mit den Argumentenwerten 0, 0 zu nehmen sind. Wird diese Formel bei den Gliedern $(n-1)$-ter Ordnung abgebrochen, so stimmt das Restglied genau so, wie in (12) mit dem darauffolgenden Gliede (n-ter Ordnung) überein, nur sind die Ableitungen $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$ usw. nicht mit dem Argument 0, 0, sondern mit dem Argument Θx, Θy zu nehmen, wo Θ einen positiven echten Bruch, $0 < \Theta < 1$, bezeichnet. Darin ist auch eine Übertragung des ersten Mittelwertsatzes enthalten.

Eine wichtige Anwendung dieser Formel bezieht sich auf die Bestimmung der Maxima und Minima einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f. Eine derartige Funktion kann ein Extremum nur in einem solchen Punkte besitzen, in dem zugleich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

ist. Wir setzen an einer solchen Stelle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C.$$

Dann lehrt die Maclaurinsche Formel, daß für $AC - B^2 < 0$ kein Extremum vorliegt (Sattelpunkt), wohl aber für $AC - B^2 > 0$, und zwar ein Maximum oder Minimum, je nachdem A und C (die in diesem Falle offenbar das gleiche Zeichen haben) negativ oder positiv sind.

Eine Funktion f der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche in ihrem Definitionsbereich zweimal stetig differenzierbar ist, kann nur an solchen Stellen ein Extremum haben, wo sämtliche Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{20}$$

zugleich bestehen. Bilden wir an einer solchen Stelle die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = A_{ik}$, so tritt kein Extremum ein, wenn die quadratische Form

$$\sum_{i, k = 1, 2, \ldots, n} A_{ik} \xi_i \xi_k \tag{21}$$

sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Dagegen haben wir ein Maximum (Minimum), wenn diese Form für alle Wert-

systeme ξ_ν, die nicht aus lauter Nullen bestehen, negativ (positiv) ausfällt.

Schließlich noch einige Worte über die Extrema mit Nebenbedingungen. Wir betrachten die Funktion f nur für solche Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche gewissen Bedingungsgleichungen $\varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ genügen $(m < n)$. Wir können dann die Extrema nach der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode bestimmen; diese besteht darin, daß man die Funktion

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

der $n + m$ freien Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ bildet und ihre Extrema nach dem obigen Verfahren zu ermitteln sucht. Diese Methode führt beispielsweise zu einem sehr eleganten Beweis des wichtigen Satzes, daß das Maximum und Minimum einer quadratischen Form

$$\sum_{i, k = 1, 2, \ldots, n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

auf der Einheitskugel

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

mit der größten bzw. kleinsten Wurzel der Säkulargleichung (vgl. II, § 2, 3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

übereinstimmt.

§ 2. Integralrechnung

1. Definition und Existenz des Riemannschen Integrals. Ist in dem endlichen Intervall a, b eine beschränkte Funktion $f(x)$ gegeben, $m \leqq f(x) \leqq M$, so können wir den „Flächeninhalt" der Kurve $y = f(x)$ folgendermaßen erklären. Wir teilen a, b durch die Punkte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ in Teilintervalle ein und ersetzen $f(x)$ im ν-ten Teilintervall $x_{\nu-1}, x_\nu$ durch seine obere bzw. untere Grenze M_ν, m_ν. Der Gesamtinhalt der so entstehenden Rechtecke für eine bestimmte Einteilung $\mathfrak{E}$

$$(1) \qquad S_{\mathfrak{E}} = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1}),$$

$$(2) \qquad s_{\mathfrak{E}} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1})$$

liegt bei jeder Einteilung zwischen den Zahlen $m(b-a)$ und $M(b-a)$. Die untere Grenze S sämtlicher $S_{\mathfrak{E}}$ und die obere Grenze s sämt-

licher $s_{\mathfrak{E}}$ sind also endlich; man nennt sie die beiden Darbouxschen Integrale. Sind diese einander gleich, so heißt $f(x)$ integrabel in a, b und man schreibt

Fig. 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = s = S. \tag{3}$$

In der Integralrechnung zeigt man überdies, daß die Summen (1) bzw. (2) sogar gegen S bzw. s konvergieren, in dem Sinne, daß z. B. die einzelnen $S_{\mathfrak{E}}$ sich von S beliebig wenig unterscheiden, wenn sämtliche Teilintervalle der Einteilung genügend klein ausfallen. Daraus ergibt sich, daß für eine integrable Funktion $f(x)$ das Integral gleich

$$\lim\,[f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1})] \tag{4}$$

ist, wobei die ξ_ν in $x_{\nu-1}, x_\nu$ beliebig gewählt werden können und der Grenzübergang in demselben Sinne wie oben, nämlich unter steter Verkleinerung der Intervallängen, zu vollziehen ist. Man schließt hieraus

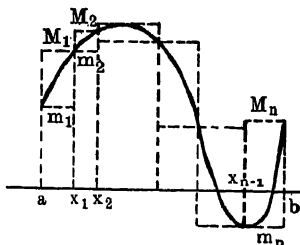
$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a), \text{ d. h. } \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \tag{5}$$

speziell für eine stetige Funktion. (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung.) Es folgen ferner die bekannten Sätze:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b 1\,.\,dx = b-a. \tag{6}$$

Um die Bedingungen für die Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion $f(x)$ anzugeben, führt man die Ausdrücke $\Omega_\nu = M_\nu - m_\nu$ ein; man findet, daß die Differenz

$$S_{\mathfrak{E}} - s_{\mathfrak{E}} = \Omega_1(x_1 - a) + \Omega_2(x_2 - x_1) + \cdots + \Omega_n(b - x_{n-1}) \tag{7}$$

in dem oben festgelegten Sinne gegen Null konvergieren muß. Daraus folgt z. B., daß eine in a, b stetige Funktion oder eine Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen stets integrabel ist. Das gleiche gilt sogar für Funktionen, deren Unstetigkeitsstellen zwar in unendlicher Anzahl vorhanden sind, aber nur eine einzige (oder endlich viele) Häufungsstelle haben. So ist z. B. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$, wo (ξ) den „Bruchteil" von ξ bezeichnet $\left(\text{also z. B. } (2{,}5) = 0{,}5;\ (3) = 0;\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1;\ (-0{,}7) = 0{,}3 \text{ usf.}\right)$, integrabel in 0,1, weil ihre Unstetigkeitsstellen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, ... und 0

die einzige Häufungsstelle 0 besitzen. Dagegen ist die Funktion $f(x)$, die für rationale x den Wert 1, für irrationale x den Wert 0 besitzt, in keinem Intervall integrabel.

Die Summe bzw. das Produkt von integrablen Funktionen ist gleichfalls integrabel. Das gleiche gilt von dem Quotienten, sofern der Absolutwert des Nenners im ganzen Integrationsintervall oberhalb einer festen positiven Zahl liegt.

Bezeichnet x eine variable Größe in a, b, so stellt das „unbestimmte Integral"

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{8}$$

eine stetige Funktion von x dar. In der Tat hat man $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$ und nach dem Mittelwertsatz (5) ist dies dem absoluten Betrage nach kleiner als $K|h|$, wenn $|f(x)| \leqq K$ in a, b ist. Analog ergibt sich, daß $F(x)$ an jeder Stelle x, wo der Integrand $f(x)$ stetig ist, sogar eine Ableitung besitzt. Das heißt $F'(x) = f(x)$, wenn $f(x)$ in a, b durchweg stetig ist. Mit anderen Worten liefert dann $F(x)$ eine sogenannte Stammfunktion von $f(x)$, eine Funktion, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist. Aus $F(x)$ lassen sich übrigens sämtliche anderen Stammfunktionen durch Hinzufügung einer additiven Konstanten, d. h. durch Bildung von $F(x) + C$ herleiten. Diese Bemerkung liefert ein Mittel, das bestimmte Integral einer stetigen Funktion $f(x)$ zu berechnen. Man bestimmt irgendeine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ [d. h. eine Funktion, für die $F'(x) = f(x)$ ist]; dann ist

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C. \tag{9}$$

Die Bestimmung der Konstanten C geschieht so, daß wir $x = a$ setzen; es ergibt sich $0 = F(a) + C$, d. h.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b. \tag{9'}$$

Es ist offenbar gleichgültig, welche Stammfunktion in (9') herangezogen wird. Stammfunktionen zu verschiedenen einfachen Funktionen, sowie Methoden zur Auffindung solcher werden wir in 3 angeben. Kennt man zu einem f keine Stammfunktion, so kann man den numerischen Wert ihres bestimmten Integrals nach den Methoden der sogenannten mechanischen Quadratur berechnen, worüber in VIII, § 2, 4 einiges gesagt werden wird.

2. Uneigentliche Integrale. Die in 1 gegebene Definition des bestimmten Integrals läßt sich dahin erweitern, daß man auch Fälle zuläßt, in denen a) die Funktion $f(x)$ unbeschränkt, b) das Integrationsintervall a, b unendlich wird.

a) Die Funktion $y = f(x)$ sei im endlichen Intervall a, b definiert und habe dort z. B. für $x = a$ eine Unendlichkeitsstelle, jedoch so, daß sie in jedem Intervall $a + \varepsilon, b$, wo ε eine beliebige positive Zahl ist, beschränkt und integrabel bleibt. [Zum Beispiel $f(x) = x^{-r}$ in 0,1; r ist positiv.] In diesem Falle kann $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ als der Grenzwert von $\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ für $\varepsilon \to +0$ definiert werden. Allgemein, wenn die Unendlichkeitsstellen $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < b$ sämtlich von der erwähnten Art sind, so setzt man

$$(10)\quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim \left[\int\limits_a^{\xi_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{\xi_1+\varepsilon'_1}^{\xi_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \int\limits_{\xi_2+\varepsilon'_2}^{\xi_3-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{\xi_m+\varepsilon'_m}^{b} f(x)\,dx\right],$$

wo ε_ν und ε'_ν unabhängig voneinander über die positiven Zahlen gegen Null konvergieren. Sind auch a oder b Unendlichkeitsstellen, so ist $a + \varepsilon'_0$ anstatt a, und $b - \varepsilon_{m+1}$ anstatt b zu nehmen.

Es habe $f(x)$ der Einfachheit halber die einzige Unendlichkeitsstelle a; man kann dann leicht die notwendige und hinreichende Bedingung angeben, damit das Integral von $f(x)$ in a, b existiere. Diese lautet: Wenn η eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, so gibt es stets eine positive Zahl δ, derart, daß, wenn die positiven Zahlen ε' und ε'' beide kleiner als δ sind,

$$(11)\quad \left|\int\limits_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon''} f(x)\,dx\right| < \eta$$

ausfällt. Daraus folgt, daß, wenn $|f(x)|$ integrabel ist, das gleiche für $f(x)$ gilt; eine solche Funktion nennt man absolut integrabel[1]). Ist allgemeiner $\varphi(x)$ integrabel und $|f(x)| < \varphi(x)$, so ist auch $f(x)$ (absolut) integrabel. Man zeigt z. B. durch direkte Rechnung, daß x^{-r} für $r < 1$ in jedem endlichen Intervall 0, a integrabel ist. (Für $r \geqq 1$ nicht.) Daraus folgt, daß jede Funktion $f(x)$ in 0, a absolut integrabel ist, wenn sie die Ungleichung $|f(x)| < C x^{-r}$ erfüllt (C ist fest, $r < 1$). Hierbei ist natürlich die Integrierbarkeit von $f(x)$ in in jedem Intervall ε, a vorausgesetzt.

---

[1]) Man benutzt gelegentlich auch die Ausdrücke: Konvergentes bzw. absolut konvergentes Integral. In der Tat entsprechen (11) und (12) der gewöhnlichen Konvergenzbedingung für unendliche Reihen [IV, § 1, (3)].

b) Die Funktion $y = f(x)$ sei für $x \geqq a$ definiert, ferner in jedem endlichen Intervall a, ω beschränkt und integrabel. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ kann als der Limes von $\int_a^\omega f(x)\,dx$ für $\omega \to +\infty$ definiert werden. Für die Existenz dieses Grenzwertes (für die Konvergenz des Integrals) ist notwendig und hinreichend, daß zu jeder positiven Zahl η eine Zahl Ω gehöre, derart, daß, wenn ω' und ω'' beide größer als Ω sind,

$$\left|\int_{\omega'}^{\omega''} f(x)\,dx\right| < \eta \tag{12}$$

ausfällt. In diesem Sinne wird z. B. $f(x) = x^{-r}$ integrabel von 1 bis ∞, wenn $r > 1$ ist. Ist eine Funktion $\varphi(x)$ im Intervall a, ∞ integrabel und gilt $|f(x)| < \varphi(x)$, so ist auch f, sogar $|f|$ integrabel (f absolut integrabel). Daraus folgt die absolute Integrierbarkeit von $f(x)$, wenn es eine Konstante C und eine Zahl $r > 1$ gibt, so daß $|f(x)| < C x^{-r}$ ist.

Eine andere Klasse von integrablen Funktionen erhält man folgendermaßen. Die Funktion $f(x) x^{-\alpha}$ ist integrabel, wenn $f(x)$ eine stetige Funktion mit einem für alle x beschränkten Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ und $\alpha > 0$ ist. (Es sei hierbei $a > 0$.) Man erhält nämlich durch Produkt-Integration (vgl. **3**)

$$\int_a^\omega \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{F(x)}{x^\alpha}\right]_a^\omega + \alpha \int_a^\omega \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx,$$

woraus die Behauptung folgt. Daraus ergibt sich z. B., daß die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \tag{13}$$

für $0 < \alpha < 2$ existieren. Die Beschränkung von α nach oben muß wegen der Konvergenz des Integrals an der unteren Grenze erfolgen.

Man zeigt übrigens leicht, daß die Funktion in (13) für $\alpha \leqq 1$ nicht absolut integrabel ist. Es genügt, dies für $\alpha = 1$ zu zeigen. Wäre nämlich $\frac{|\sin x|}{x}$ integrabel, dann müßte

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

beschränkt sein. Das letzte Integral ist aber größer als

$$\frac{1}{(\nu+1)\pi}\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{(\nu+1)\pi}$$

und $\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}$ strebt nach § 4, **3** gegen ∞.

Ein uneigentliches Integral von der ersten oben behandelten Art läßt sich durch die Transformation $y = \frac{1}{x-a+1}$ in ein uneigentliches Integral zweiter Art überführen. Zum Beispiel $\left(y = \frac{1}{x+1}\right)$

$$(13')\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{y}-1\right)}{(1-y)^\alpha\, y^{2-\alpha}}\,dy.$$

Analog wie in b) definiert man ein über das Intervall $-\infty, a$ bzw. $-\infty, \infty$ erstrecktes Integral.

3. Methoden und Hauptformeln der Integralrechnung. a) Die unmittelbarste Methode zur Berechnung von bestimmten Integralen ist nach **1** die Umkehrung der Formeln der Differentialrechnung. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$(14)\quad \begin{cases} \int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \ (n \neq -1); \quad \int_a^b \frac{dx}{x} = [\log\operatorname{nat} x]_a^b \quad (a, b > 0),\\ \int_a^b \sin x\,dx = [-\cos x]_a^b, \quad \int_a^b \cos x\,dx = [\sin x]_a^b, \quad \int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = [\operatorname{tg} x]_a^b,\\ \int_a^b \frac{dx}{\sin^2 x} = [-\operatorname{ctg} x]_a^b, \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_a^b, \quad \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arc\,tg} x]_a^b. \end{cases}$$

b) Die Formel für die sogenannte partielle oder Produkt-Integration lautet:

$$(15)\qquad \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Sie liefert oft eine Reduktion eines Integrals auf ein anderes, bereits bekanntes, oder eine Beziehung zwischen zwei Integralen,

welche die Berechnung derselben ermöglicht. Betrachten wir z. B. das für $s > 0$ konvergente Integral

$$(16)\qquad \Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s\, dx,$$

die sogenannte Gammafunktion (IV, § 7, **3**). Die Formel (15) liefert mit $x^s = u$, $e^{-x} = v'$ die Beziehung

$$(17)\qquad \Gamma(s+1) = 0 + s\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx = s\,\Gamma(s).$$

Da $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ ist, so folgt $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \,.\, 1$, $\Gamma(4) = 3 \,.\, 2 \,.\, 1$, und allgemein für ein positiv ganzes n

$$(18)\qquad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Um die Integrale

$$J_1 = \int_a^b e^{px} \cos q x\, dx, \quad J_2 = \int_a^b e^{px} \sin q x\, dx$$

zu berechnen, kann man folgendermaßen verfahren. Die Anwendung von (15) auf J_1 mit $u = e^{px}$, $v' = \cos q x$ und die analoge Behandlung von J_2 liefert ($q \neq 0$):

$$J_1 = \left[\frac{e^{px} \sin q x}{q}\right]_a^b - \frac{p}{q} J_2, \quad J_2 = \left[-\frac{e^{px} \cos q x}{q}\right]_a^b + \frac{p}{q} J_1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$(19)\quad J_1 = \left[e^{px} \frac{p \cos q x + q \sin q x}{p^2 + q^2}\right]_a^b, \quad J_2 = \left[e^{px} \frac{p \sin q x - q \cos q x}{p^2 + q^2}\right]_a^b.$$

c) Ähnlich verwendbar ist die Formel

$$(20)\qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(y)]\, \varphi'(y)\, dy,$$

mit der eine neue Integrationsvariable eingeführt wird; $x = \varphi(y)$ bezeichnet hierbei eine stetig differenzierbare, monotone Funktion, $y = \psi(x)$ ihre Umkehrung.

d) Die Methode der Partialbruchzerlegung ermöglicht allgemein die Integration einer beliebigen rationalen Funktion:

$$(21)\quad \begin{cases} R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \dfrac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ \qquad\qquad + \dfrac{B_1}{x-b} + \dfrac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \dfrac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots, \end{cases}$$

wobei $P(x)$, $Q(x)$, $G(x)$ ganze rationale Funktionen, A_1, $A_2, \ldots$, B_1, $B_2, \ldots$ eindeutig bestimmte Koeffizienten bezeichnen; die Zerlegung des Nenners $Q(x)$ in Faktoren lautet hierbei $Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots$, wenn wir annehmen, daß der höchste Koeffizient von $Q(x)$ gleich 1 ist. Sind die Koeffizienten von $R(x)$ sämtlich reell, so treten die Wurzeln von $Q(x)$, soweit sie nicht reell sind, paarweise konjugiert komplex auf. Die Koeffizienten A, $B, \ldots$ ergeben sich etwa durch Multiplizieren mit $Q(x)$ und Gleichsetzen der entsprechenden Potenzen von x. Ist b die zu a konjugierte Wurzel (es ist dann $\alpha = \beta$), so sind auch die Koeffizienten B konjugiert zu den entsprechenden A.

Die Integration von rationalen Funktionen wird nach (21) auf die Integration von Ausdrücken der Form $C(x-a)^{-k}$ zurückgeführt, wobei aber C und a auch komplex sein können. Um die komplexen Größen aus der Rechnung wegzuschaffen, empfiehlt es sich, vor der Integration die konjugiert komplexen Glieder in (21) zusammenzufassen. Es ergeben sich dann Glieder von der Form

$$\frac{a_0 + a_1 x}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^k}, \tag{22}$$

die man (sofern $\beta \neq 0$) nach Einführung einer neuen Variablen $(x-\alpha)/\beta = y$ auf die beiden Integrale

$$\int_a^b \frac{y\,dy}{(1+y^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)}\left[\dfrac{1}{(1+y^2)^{k-1}}\right]_a^b & \text{für } k \neq 1, \\ \left[\dfrac{1}{2}\log\operatorname{nat}(1+y^2)\right]_a^b & \text{für } k = 1 \end{cases} \tag{23}$$

und

$$I_k = \int_a^b \frac{dy}{(1+y^2)^k} \tag{24}$$

zurückführen kann. Durch Produkt-Integration ergibt sich mit $u = (1+y^2)^{-k}$, $v' = 1$ zur Reduktion von (24):

$$(1-2k)\,I_k = \left[\frac{y}{(1+y^2)^k}\right]_a^b - 2k\,I_{k+1}. \tag{25}$$

Diese Beziehung liefert I_{k+1}, wenn I_k bekannt ist. Damit wird (24) schließlich auf das bekannte Integral I_1 zurückgeführt.

e) Irrationale Ausdrücke lassen sich im allgemeinen elementar nicht integrieren. Ein wichtiger Typus, den man in geschlossener Form integrieren kann, ist:

$$R\left[x,\ \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^\alpha,\ \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^\beta,\ \ldots\right], \tag{26}$$

wo R eine rationale Funktion, α, β, ... rationale Zahlen sind. Man setzt $\frac{px+q}{rx+s} = t^m$, wenn m das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von α, β, ... ist. Schwieriger, aber ebenfalls elementar zu integrieren ist jeder Ausdruck von der Form

$$R\left(x, \sqrt{lx^2+mx+n}\right). \tag{27}$$

Zerfällt nämlich $y^2 = lx^2 + mx + n$ in zwei reelle Linearfaktoren $l(x-x_1)(x-x_2)$, so setze man $\frac{x-x_1}{x-x_2} = t^2$; sonst ist $lx^2 + mx + n > 0$ für jedes x (wenn y nicht imaginär sein soll), d. h. $l > 0$. In diesem Falle setzt man $y = x\sqrt{l} + t$.

Etwas schneller gelangt man zur Berechnung der Integrale von der Form

$$\int_a^b \frac{px+q}{\sqrt{lx^2+mx+n}}\,dx, \quad \int_a^b \sqrt{lx^2+mx+n}\,dx, \tag{28}$$

indem man sie durch einfache Substitutionen auf eine der Formeln zurückführt:

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \Big[\log\operatorname{nat}|x+\sqrt{x^2\pm 1}|\Big]_a^b = \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x\\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x\end{array}\right.,\\
&\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_a^b,\\
&\int_a^b \sqrt{x^2\pm 1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{x^2\pm 1}\Big]_a^b \pm \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}},\\
&\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]_a^b.
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

f) Das binomische Integral

$$\int x^m (ax^n + b)^p\,dx \qquad (n \neq 0) \tag{30}$$

geht bei der Substitution $x^n = y$ in

$$\frac{1}{n}\int y^q (ay+b)^p\,dy, \qquad q = \frac{m+1}{n} - 1$$

über. Hieraus erkennt man, daß (30) durch elementare Funktionen integrierbar ist, wenn m, n, p rationale Zahlen sind, $n \neq 0$ und mindestens eine von den drei Größen p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ ganz ist.

g) Die Integration der trigonometrischen Funktionen wird in vielen Fällen durch folgende Bemerkung erledigt: Ist $R(\sin\varphi, \cos\varphi)$ eine rationale Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so setze man $\operatorname{tg}(\varphi/2) = x$. Es ist dann

$$(31)\qquad \sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad d\varphi = \frac{2\,dx}{1+x^2},$$

womit die Berechnung von $\int R(\sin\varphi, \cos\varphi)\,d\varphi$ auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt ist.

Als Beispiel sei das oft vorkommende Integral erwähnt:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos\varphi} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{bx}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2ab} \quad (a>0,\ b>0). \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt

$$(32')\qquad \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad (A > |B|).$$

Wichtig sind noch folgende spezielle trigonometrische Integrale:

$$(33)\qquad \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{für gerade } n, \\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Hier bedeutet $m!!$ das Produkt aller natürlichen Zahlen unterhalb m, die von gleicher Parität mit m sind, z. B. $5!! = 1.3.5$; $10!! = 2.4.6.8.10$. Daß die beiden Integrale in (33) gleich sind, folgt durch die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - y$. Man erhält ferner durch Produkt-Integration:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x \sin x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \ (n>1),$$

woraus wegen $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ die Rekursionsformel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

folgt.

§ 3. Mehrere Variable

1. Mehrfache Integrale. Die im vorigen Paragraphen dargelegte Definition des bestimmten Integrals läßt sich fast wortgetreu auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen. Ist z. B. $f(x, y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen, die für alle Wertepaare (x, y), welche einem Rechteck R: $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ angehören, definiert ist, ist ferner f beschränkt: $m \leqq f \leqq M$, so bilde man zunächst eine Einteilung

$$\left\{ \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{array} \right. \tag{1}$$

der beiden Strecken a, b und c, d. Hierdurch ist auch eine Einteilung $\mathfrak{E}$ unseres Rechtecks R festgelegt. Die Anzahl der „Elementarrechtecke" ist mn, und jedes solche Rechteck ist durch ein Wertepaar (μ, ν) charakterisiert, wobei μ zwischen 1 und m, ν zwischen 1 und n liegt. Man bezeichne mit $m_{\mu\nu}$ bzw. $M_{\mu\nu}$ die untere und obere Grenze von f darin und bilde die Summen

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\mathfrak{E}} = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \sum\limits_{\nu=1}^{n} M_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}), \\ s_{\mathfrak{E}} = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}). \end{array} \right. \tag{2}$$

Die untere Grenze S der $S_{\mathfrak{E}}$ und die obere Grenze s der $s_{\mathfrak{E}}$ heißen die beiden Darbouxschen Integrale (§ 2, **1**). Stimmen sie überein, so heißt $f(x, y)$ integrabel über R, und wir schreiben

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = S = s. \tag{3}$$

Man zeigt auch hier, daß die Zahlen S und s sich als Grenzwerte von $S_{\mathfrak{E}}$ bzw. $s_{\mathfrak{E}}$ ergeben, wenn die Länge der Teilintervalle von $\mathfrak{E}$ gegen Null konvergiert. Wenn also f über R integrabel ist, so konvergieren die Summen (2), also auch irgendeine Summe von der Form

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\mu, \eta_\nu)(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}) \tag{4}$$

gegen (3). Hierbei ist (ξ_μ, η_ν) ein ganz beliebiger Punkt im (μ, ν)-ten Elementarrechteck.

Das allgemeine Kriterium für die Existenz des „Doppelintegrals" (3) (Flächenintegral) läßt sich ganz ähnlich wie in § 2 formulieren. Es ergibt sich hieraus, daß eine im Rechteck R definierte stetige Funktion f integrabel ist. Wir geben im folgenden Paragraphen ein Verfahren an, das die Auswertung eines solchen Doppelintegrals ermöglicht.

Ist eine Funktion f nicht in einem Rechteck wie oben, sondern in einem ganz beliebigen beschränkten Bereiche B definiert, so erweitere man zunächst diese Definition auf ein Rechteck R wie oben, das überdies derart gewählt ist, daß es unseren Bereich B ganz im Innern enthält. Wir behalten dabei die Werte von f für solche Punkte, die B angehören, und setzen sonst $f = 0$. Es ist dann

$$(5) \qquad \iint_B f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy,$$

sofern das letztere Integral existiert.

In vielen Fällen empfiehlt es sich bei der Definition des Doppelintegrals, nicht von einer Einteilung des Bereiches B in Elementarrechtecke, sondern von einer solchen in gewisse andere Elementarbereiche, etwa in Dreiecke, auszugehen. Man könnte z. B. in B ein Netz von einander nicht überdeckenden Dreiecken anlegen und den Inhalt $\Delta\omega$ eines jeden Dreiecks mit der oberen bzw. unteren Grenze von f in diesem Dreieck, oder aber mit irgendeinem Werte von f in diesem Dreieck multiplizieren. Die Summe über alle solchen Produkte, $\Sigma f \Delta\omega$, muß dann gegen (5) konvergieren, wenn die Dimensionen sämtlicher Dreiecke gegen Null streben, vorausgesetzt, daß f in B integrabel ist. (Hier erweitert man auch zunächst den Definitionsbereich von f auf einen größeren, der von einem Polygon begrenzt ist, damit man den ganzen Bereich restlos in Dreiecke einteilen kann.)

Analoge Betrachtungen gelten für Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen.

2. Transformation von mehrfachen Integralen. Wir betrachten irgendeinen Bereich B in der x, y-Ebene, der durch die beiden Funktionen

$$(6) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

in ein-eindeutige und stetige Beziehung zu einem Bereich B' der u, v-Ebene gebracht wird. Darunter verstehen wir, daß vermöge (6) jedem Punkte von B' ein ganz bestimmter Punkt von B entspricht

und daß man auf diese Weise sämtliche Punkte von B genau einmal erhält, daß endlich Punkten, die in B' genügend nahe aneinanderliegen, Punkte in B entsprechen, deren Entfernung beliebig klein zu machen ist. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß B' ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten ist. Wir nehmen ferner an, daß φ und ψ stetige partielle Ableitungen haben, deren „Funktionaldeterminante"

$$D(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7}$$

überall in B' von 0 verschieden ist[1]). Dann ist (6), wie man in der Integralrechnung beweist, umkehrbar, d. h. es gibt ein Funktionenpaar

$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y) \tag{8}$$

mit analogen Eigenschaften wie φ und ψ, das umgekehrt B in B' überführt. Es ist identisch

$$u = g[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)], \quad v = h[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]. \tag{9}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, wenn wir die partiellen Ableitungen durch Indizes bezeichnen,

$$\begin{cases} 1 = \varphi_u g_x + \varphi_v h_x, & 0 = \varphi_u g_y + \varphi_v h_y, \\ 0 = \psi_u g_x + \psi_v h_x, & 1 = \psi_u g_y + \psi_v h_y, \end{cases} \tag{10}$$

woraus man schließt, daß die Funktionaldeterminante

$$D_1(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{D(u, v)} \tag{11}$$

ist.

Betrachten wir nun eine in B definierte stetige Funktion $f(x, y)$ und fragen wir, wie man das Doppelintegral von f über B in ein Integral transformiert, das über den Bereich B' der u, v-Ebene erstreckt ist; die Antwort wird durch die Formel

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B'} f[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]\,D(u,v)\,du\,dv \tag{12}$$

---

[1]) Daß diese Determinante nicht verschwindet, ist die Bedingung dafür, daß die beiden Gleichungen, welche die „Differentiale" dx und dy durch die „Differentiale" du, dv ausdrücken, nach den letzteren auflösbar sind. Vgl. II, § 1, 3.

gegeben, wo $D(u, v)$ die Funktionaldeterminante (7) der Transformationsfunktionen (6) bezeichnet. Diese Transformationsformel von Doppelintegralen ist die Verallgemeinerung der Formel (20) von § 2. Sie läßt sich so auffassen, daß man bei Einführung von neuen Variablen das Flächenelement $dx\,dy$ durch $D(u, v)\,du\,dv$ ersetzt [$D(u, v)$ stellt somit gewissermaßen das Vergrößerungsverhältnis bei der Transformation (6) dar].

Um den Beweis anzudeuten, teilen wir B' in kongruente, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke ein, die aus einem quadratischen, achsenparallelen Netz durch Ziehung der Diagonalen in einer Richtung entstehen. Bezeichnen wir mit $u^{(\iota)}, v^{(\iota)}$ $(\iota = 1, 2, 3)$ die Koordinaten der Ecken eines Elementardreiecks, so entsprechen denselben die Punkte mit den Koordinaten

$$(13)\qquad x^{(\iota)} = \varphi(u^{(\iota)}, v^{(\iota)}), \quad y^{(\iota)} = \psi(u^{(\iota)}, v^{(\iota)}) \quad (\iota = 1, 2, 3).$$

Diese legen ein ganz bestimmtes Dreieck fest, und die Gesamtheit dieser Dreiecke liefert eine Einteilung von B. Das Doppelintegral von f über B ergibt sich dann als Limes der Summe $\Sigma f \varDelta\omega$, wenn $\varDelta\omega$ den Inhalt des oben definierten Dreiecks, f den Wert von $f(x, y)$ in irgendeinem Punkte desselben bezeichnet. Nun ist die doppelte Dreiecksfläche nach dem Mittelwertsatz § 1, (10) gleich

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \varphi(u^{(1)}, v^{(1)}) & \psi(u^{(1)}, v^{(1)}) \\ 1 & \varphi(u^{(2)}, v^{(2)}) & \psi(u^{(2)}, v^{(2)}) \\ 1 & \varphi(u^{(3)}, v^{(3)}) & \psi(u^{(3)}, v^{(3)}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (u^{(1)} - u^{(3)})\varphi_u + (v^{(1)} - v^{(3)})\varphi_v & (u^{(1)} - u^{(3)})\psi_u + (v^{(1)} - v^{(3)})\psi_v \\ 0 & (u^{(2)} - u^{(3)})\varphi_u + (v^{(2)} - v^{(3)})\varphi_v & (u^{(2)} - u^{(3)})\psi_u + (v^{(2)} - v^{(3)})\psi_v \\ 1 & \varphi(u^{(3)}, v^{(3)}) & \psi(u^{(3)}, v^{(3)}) \end{vmatrix},$$

wenn z. B. $u^{(3)}, v^{(3)}$ die Koordinaten der Ecke bezeichnen, wo der rechte Winkel liegt; dabei sind die Argumente der auftretenden partiellen Ableitungen passend zu wählen. Wir führen andererseits den doppelten Inhalt des Elementardreiecks in der u, v-Ebene ein:

$$(15)\qquad 2\varDelta\omega' = \begin{vmatrix} 1 & u^{(1)} & v^{(1)} \\ 1 & u^{(2)} & v^{(2)} \\ 1 & u^{(3)} & v^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Infolge der speziellen Verfügung über diese Dreiecke ist entweder $u^{(1)} - u^{(3)}$ oder $u^{(2)} - u^{(3)}$ (bzw. $v^{(2)} - v^{(3)}$ oder $v^{(1)} - v^{(3)}$) gleich Null. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von $\varphi_u, \varphi_v, \ldots$, daß

$$(16)\qquad 2\varDelta\omega = 2D(u, v)\varDelta\omega' + \eta\varDelta\omega',$$

wobei η gleichmäßig für jedes Dreieck beliebig klein wird, wenn die Dimensionen derselben gegen Null konvergieren. Aus (16) folgt durch Multiplikation mit f und Summation

$$\sum f \Delta\omega = \sum f D(u,v) \Delta\omega' + \eta', \tag{17}$$

wo η' beliebig klein ist. Daraus erhalten wir die Formel (12).

Ganz analog geschieht die Transformation von mehrfachen Integralen mit mehr als zwei Veränderlichen. Die Funktionaldeterminante für drei Veränderliche lautet z. B.

$$D(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

wenn $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$ die Transformationsformeln sind.

3. Kurvenintegrale. Wir betrachten eine rektifizierbare Kurve C (§ 1, 2), deren Gleichung in Parameterform folgendermaßen lautet:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{wobei} \quad t' \leqq t \leqq t'' \tag{19}$$

ist, von der wir ferner annehmen, daß sie ganz in einem Bereiche D liegt. Es sei $P(x,y)$ eine beliebige stetige Funktion in D. Wir definieren das Kurvenintegral

$$\int_C P(x,y)\,dx \tag{20}$$

als den Limes der Summe

$$P(x_1,y_1)(x_1-x_0) + P(x_2,y_2)(x_2-x_1) + \cdots + P(x_n,y_n)(x_n-x_{n-1}), \tag{21}$$

wobei $x_\nu = x(t_\nu)$, $y_\nu = y(t_\nu)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ eine Folge von Punkten auf C bezeichnet, welche den Parameterwerten $t' = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, $t_n = t''$ entsprechen. Hierbei konvergieren die Differenzen $t_\nu - t_{\nu-1}$ (genau so wie bei der Definition des gewöhnlichen Integrals) gegen 0. Ähnlich definiert man das Kurvenintegral

$$\int_C Q(x,y)\,dy. \tag{20'}$$

Sind die Funktionen (19) stetig differenzierbar, so sieht man sofort, daß das Kurvenintegral (20) dem gewöhnlichen Integral

$$\int_{t'}^{t''} P[x(t), y(t)]\, x'(t)\,dt \tag{22}$$

gleich ist. Aus der Definition folgt ferner, daß es bei der Berechnung von (20) keineswegs gleichgültig ist, in welcher Richtung die

Kurve C durchlaufen wird; vielmehr erhält man bei der Umkehrung des Richtungssinnes von C dasselbe Resultat mit umgekehrtem Vorzeichen.

Die letzte Bemerkung kann man benutzen, um einen Zusammenhang zwischen gewissen Kurvenintegralen und den früher behandelten Flächenintegralen zu gewinnen. Es bezeichne C eine geschlossene rektifizierbare Kurve und $P(x, y)$, $Q(x, y)$ zwei Funktionen, die im Innern von C und auf C stetig sind, ferner überall im Innern von C stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y besitzen, welche dort gleichmäßig beschränkt bleiben. Dann gilt unter einer gewissen Einschränkung bezüglich C, auf die wir gleich kommen werden,

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{23}$$

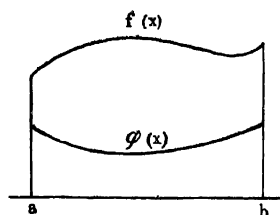
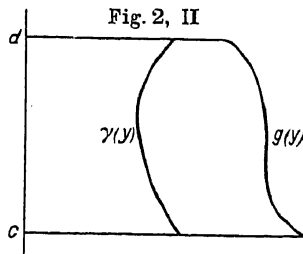



Fig. 2, I

Fig. 2, II

Hierbei ist das Linienintegral links so zu rechnen, daß die Kurve C im positiven Sinne, d. h. so durchlaufen wird, daß das Innere von C stets zur Linken bleibt. Das Integral rechter Hand ist als Doppelintegral, erstreckt über das Innere von C, zu deuten.

Gilt (23) für die beiden Bereiche, die aus C entstehen, wenn das Innere desselben durch einen Schnitt in zwei Teile zerspalten wird, so gilt es auch für den von C begrenzten Bereich. Es genügt ferner, die beiden Formeln

$$\int_C P\,dx = -\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \quad \int_C Q\,dy = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \tag{24}$$

einzeln zu beweisen (Gaußsche Formeln).

Beweisen wir zunächst die erste Formel für den Fall, daß C aus zwei Kurvenstücken $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ mit $f(x) > \varphi(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ und aus den beiden Strecken $x = a$, $\varphi(a) \leqq y \leqq f(a)$; $x = b$, $\varphi(b) \leqq y \leqq f(b)$ (Fig. 2, I) besteht. Man erkennt durch unmittelbare Integration, daß das Flächenintegral von $\frac{\partial P}{\partial y}$ gleich dem über die beiden Kurvenstücke genommenen $\int P\,dx$ ist, wenn die obere Kurve nach rechts, die untere nach links durchlaufen wird.

In gleicher Weise beweist man die zweite Formel in (24) für den Fall, daß C vom Typus II in Fig. 2 ist. Allgemein gilt (23), wenn der von C begrenzte Bereich sich in endlich viele Bereiche von der Form I, ferner auch in endlich viele von der Form II zerspalten läßt, und zwar derart, daß in den einzelnen Teilen die oben genannten Bedingungen bezüglich P und Q erfüllt sind. In der Vektoranalysis II, § 3, **3** findet Gl. (23) wichtige Verwendung.

Häufig betrachtet man Kurvenintegrale von der Form $\int\limits_C P(x, y)\,ds$, wobei x und y als Funktionen der Bogenlänge s gegeben sind; man hat also in (22) $t = s$. Ein derartiges Integral kann direkt als Grenzwert der Summen definiert werden, welche durch Einteilung der Kurve C in „Bogenelemente", durch Multiplikation derselben mit einem entsprechenden Wert von P und durch Summierung über sämtliche Bogenelemente entstehen.

4. Oberflächenintegral. Ein Flächenstück F sei in Parameterform durch die Gleichungen

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{25}$$

dargestellt. Die Parameter u, v mögen hierbei auf das Quadrat $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$ beschränkt sein. Analog der am Schlusse von **3** gegebenen Form des Kurvenintegrals wird das Flächenintegral $\iint f(x, y, z)\,d\sigma$ ($d\sigma$ das „Flächenelement") als der Limes einer Summe $\Sigma f(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\,\sigma_\nu$ definiert, welche entsteht, indem F in kleine Flächenelemente σ_ν zerlegt, jedes σ_ν mit einem Funktionswert $f(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ in diesem σ_ν multipliziert und die Summe dieser Produkte gebildet wird.

Darüber hinaus betrachtet man Flächenintegrale von der Form

$$\iint\limits_F P(x, y, z)\,dy\,dz \tag{26}$$

(ähnlich mit $dz\,dx$ bzw. $dx\,dy$). Dieses Integral ist nach Definition gleich dem Doppelintegral

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 P[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\,D\,du\,dv,$$

wo D die Funktionaldeterminante von y und z in bezug auf u und v ist.

Die Flächenintegrale stehen in wichtiger Beziehung zu den Volum- oder dreifachen Integralen. Sind P, Q, R drei stetig differenzierbare Funktionen in einem Raumteil K, dessen Berandung die Fläche F sei, so gilt

$$\iiint\limits_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iint\limits_F (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma; \tag{27}$$

hierbei sind α, β, γ die Richtungswinkel der nach innen gerichteten Normale von F. Der Beweis ist analog zu führen wie der der Gl. (23); im übrigen muß hier auf die Ausführungen der Vektoranalysis II, § 3, **3** verwiesen werden. Es sei nur noch eine häufig gebrauchte Folgerung aus (27) angeführt: U, V seien zwei Funktionen von x, y, z, die in K und F zweimal stetig differenzierbar sind. Es sei ferner $V = 0$ auf F. Schreibt man wie üblich

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{28}$$

so gilt

$$\begin{cases} \Omega = \iiint\limits_K \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ \qquad = -\iiint\limits_K V \Delta U\, dx\,dy\,dz. \end{cases} \tag{29}$$

Dies ergibt sich unmittelbar, indem man das erste Glied der Summe

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V\frac{\partial U}{\partial x}\right) - V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

nach (27) in ein Flächenintegral umwandelt und $V = 0$ auf F berücksichtigt.

Eine wichtige Anwendung von (29), die sich auf die Transformation von Δu in krummlinige Koordinaten bezieht, findet der Leser in II, § 3, **4**.

§ 4. Bestimmte Integrale

1. Integrale, die von einem Parameter abhängen. Die Funktion $f(x,t)$ sei stetig in dem durch die Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq t \leqq d$ definierten Rechteck R. Dann ist $f(x, t)$ bei jedem festen Werte von t eine stetige Funktion von x, so daß

$$J(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx \tag{1}$$

eine für $c \leqq t \leqq d$ definierte Funktion von t ist. Wir wollen einige Eigenschaften dieser Funktion herleiten.

Aus der Gleichung

$$J(t') - J(t'') = \int_a^b [f(x, t') - f(x, t'')]\, dx \tag{2}$$

folgt, daß $J(t)$ stetig ist. Das Integral

$$\int_c^d J(t)\, dt = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, t)\, dx\right] dt \tag{3}$$

hat somit einen Sinn. Wir behaupten, daß man bei der Berechnung von (3) die Reihenfolge der Integration rechter Hand vertauschen darf, mit anderen Worten, daß man auf dasselbe Resultat geführt wird, wenn man $f(x, t)$ zuerst nach t und dann nach x integriert; außerdem, daß man beidemal das Doppelintegral von $f(x, y)$ über das Rechteck R erhält, also

$$(4) \qquad \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, t)\, d x\Big]\, dt = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, t)\, d t\Big]\, d x = \iint_R f(x, t)\, d x\, d t.$$

Um diese wichtige Formel, die gleichzeitig auch ein Mittel zur Berechnung von Doppelintegralen liefert, zu beweisen, gehen wir von den Einteilungen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \quad c = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = d$$

der Strecken a, b und c, d aus und bezeichnen wie in § 3, 1 mit $M_{\mu\nu}$ bzw. $m_{\mu\nu}$ das Maximum und Minimum von f im Elementarrechteck (μ, ν). Dann ist zunächst

$$(5) \qquad \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, t)\, d t\Big]\, d x = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\mu-1}}^{x_\mu} \Big[\int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} f(x, t)\, d t\Big]\, d x;$$

nach dem Mittelwertsatz § 2, (5) liegt somit dieses Integral zwischen den Schranken

$$(6) \quad \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} M_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(t_\nu - t_{\nu-1}) \text{ bzw.} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(t_\nu - t_{\nu-1}),$$

die ihrerseits gegen das obige Doppelintegral konvergieren, wenn die Länge der Teilintervalle gegen Null strebt. Ganz analog behandelt man das zweite Integral in (4), woraus die Behauptung folgt.

Wir wollen nun weiter annehmen, daß die partielle Ableitung $f_t'(x, t)$ von f nach t in jedem Punkte x, t von R existiert und eine stetige Funktion ist. Dann ist $J(t)$ differenzierbar, und es gilt die Formel

$$(7) \qquad J'(t) = \int_a^b f_t'(x, t)\, d x.$$

In der Tat ist nach dem Vorangehenden die rechte Seite von (7) eine stetige Funktion $g(t)$ von t, und man hat

$$(8) \qquad \int_c^t g(t)\, d t = \int_a^b [f(x, t) - f(x, c)]\, d x = J(t) - J(c),$$

woraus $J'(t) = g(t)$ folgt. Man leitet auch ohne Mühe eine allgemeinere Differentiationsregel bezüglich solcher Integrale ab, bei

denen auch die Integrationsgrenzen a und b vom Parameter t abhängen und stetige Ableitungen nach t haben. Es ist

$$(9)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\, dx = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f_t'(x, t)\, dx + b'(t) f[b(t), t] - a'(t) f[a(t), t].$$

Diese Ergebnisse gelten unter gewissen Einschränkungen auch für uneigentliche Integrale, z. B. für solche, bei denen die obere Integrationsgrenze $b = \infty$ ist. Ein Begriff, der bei diesen Verallgemeinerungen eine Rolle spielt, ist die sogenannte **gleichmäßige Integrierbarkeit**. Wir betrachten eine stetige Funktion $f(x, t)$, welche für $x \geqq a$, $c \leqq t \leqq d$ (a, c, d seien endlich) definiert ist. Sie heißt im unendlichen Intervall $x \geqq a$ gleichmäßig integrabel (das Integral von f ist gleichmäßig konvergent), wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder positiven Zahl ε gehört eine nur von ε abhängende (von t unabhängige) Zahl Ω, so daß, wenn ω_1 und ω_2 beide größer als Ω sind, $\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, t)\, dx\right| < \varepsilon$ gilt, und zwar gleichmäßig für jedes t in c, d. Diese Bedingung ist z. B. stets erfüllt, wenn es eine integrable Funktion $\varphi(x)$ gibt, so daß für jedes t: $|f(x, t)| < \varphi(x)$ ist[1]).

Es sei nun $f(x, t)$ für $x \geqq a$ gleichmäßig integrabel; dann ist

$$(10)\qquad J(t) = \int\limits_a^\infty f(x, t)\, dx$$

für $c \leqq t \leqq d$ konvergent und stellt eine Funktion von t dar, welche, wie man sofort sieht, stetig ist; außerdem läßt sich bei der Integration von $J(t)$ die Reihenfolge der Integration wie in (4) vertauschen, d. h. es gilt

$$(11)\qquad \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^\infty f(x, t)\, dx\Big]\, dt = \int\limits_a^\infty \Big[\int\limits_c^d f(x, t)\, dt\Big]\, dx.$$

Die Funktion $J(t)$ ist ferner differenzierbar und es gilt

$$(12)\qquad J'(t) = \int\limits_a^\infty f_t'(x, t)\, dx,$$

wenn f eine stetige partielle Ableitung nach t besitzt und $f_t'(x, t)$ in $x \geqq a$ gleichmäßig integrabel ist.

---

[1]) Vgl. den Begriff der **gleichmäßigen Konvergenz** bei unendlichen Reihen (IV, § 1, 2).

2. Beispiele. a) Aus § 2 (19) folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos tx\, dx = \frac{1}{1+t^2}. \tag{13}$$

Die Funktion $f(x, t) = e^{-x} \cos t x$ ist gleichmäßig integrabel, weil für jedes t: $|f(x, t)| \leqq e^{-x}$ ist. Man erhält also durch zweimalige Integration zwischen 0 und t und durch Produktintegration

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1-\cos t x}{x^2}\, dx = \int_0^t \operatorname{arc\,tg} t\, dt = t \operatorname{arc\,tg} t - \frac{\log\operatorname{nat}(1+t^2)}{2}. \tag{14}$$

Hieraus folgt für positive $t = \frac{1}{u}$

$$\int_0^\infty e^{-ux} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{u} - u\, \frac{\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}{2}. \tag{15}$$

Dieses Integral ist gleichmäßig konvergent, weil $\frac{1-\cos x}{x^2}$ integrabel ist. Daraus folgt, daß das letzte Integral eine stetige Funktion von u ist (auch für $u = 0$). Man erhält somit

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Indem man hier partiell integriert $\left(v' = \frac{1}{x^2}\right)$ bzw. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ setzt, ergeben sich die beiden Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Hieraus folgt die oft benutzte Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \text{ für } t < 0, \quad 0 \text{ für } t = 0, \quad \frac{\pi}{2} \text{ für } t > 0, \tag{18}$$

auf die wir in IV, § 3, 2 zurückkommen.

b) Auch die Anwendung des in § 3, 2 bewiesenen Transformationssatzes für Doppelintegrale führt oft zu der Berechnung von be-

stimmten Integralen. Um das an dem in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftretenden Integral

$$(19)\qquad J=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

zu zeigen, verfahren wir folgendermaßen, wobei bemerkt sei, daß die Konvergenz bei sämtlichen hier auftretenden Ausdrücken sich leicht zeigen läßt. Schreibt man (19) nochmals an, aber mit y als Integrationsvariablen, und multipliziert beide Ausdrücke, so erhält man ein Integral, das sich auch als Doppelintegral, erstreckt über den ersten Quadranten $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ der x, y-Ebene, auffassen läßt. Führt man daher Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, also $x^2+y^2=r^2$ und $dx\,dy$ statt $r\,dr\,d\varphi$, so ergibt sich

$$(20)\qquad J^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr.$$

Wird hier anstatt r^2 eine neue Integrationsvariable eingeführt, so folgt für das letzte Integral der Wert $\frac{1}{2}$, d. h.

$$(21)\qquad J=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{und daraus}\int_0^\infty e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2h}\quad(h>0).$$

c) Die gleiche Methode führt auf viel allgemeinere Formeln.

In § 2, **3** hatten wir durch die dortige Formel (16) die Gammafunktion $\Gamma(s)$ definiert, wozu wir jetzt als Gegenstück die „Betafunktion“

$$(22)\qquad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

einführen. Sie existiert für $p, q > 0$. Wir wollen die wichtige Beziehung

$$(23)\qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

herleiten, woraus sich u. a. die Werte von $B(p,q)$ für ganze p und q ergeben:

$$(24)\qquad B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Um (23) nachzuweisen, setzen wir unter Einführung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}\, x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-(\cos\varphi+\sin\varphi)r}\, r^{p+q-1} \cos^{p-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi\, dr\, d\varphi \\ &= \Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{p-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{p+q}}\, d\varphi.\end{aligned}$$

Dieses letzte Integral geht aber nach der Substitution $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{x} - 1$ gerade in $B(p,q)$ über.

Aus (23) ergibt sich für $p = q = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \tag{25}$$

weil doch $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ ist, womit auch ein neuer Beweis für (21) gegeben ist.

d) Aus (21) folgt für positive t

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}. \tag{26}$$

Durch fortgesetzte Differentiation nach t erhält man hieraus

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\, dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{t^{n+1/2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Auch das Integral

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx\, dx \quad (t > 0) \tag{28}$$

berechnet sich aus (21) ohne Schwierigkeit. Es ist nämlich

$$K'(t) = -\int_0^\infty e^{-x^2} x \sin tx\, dx.$$

Produktintegration ($v' = e^{-x^2} x$) liefert:

$$K'(t) = \frac{1}{2}\Big[e^{-x^2}\sin tx\Big]_0^\infty - \frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx\, dx = -\frac{t}{2}K(t),$$

d. h. $K(t) =$ konst. $e^{-\frac{1}{4}t^2}$. Die Bestimmung der Konstanten geschieht in der Weise, daß man $t = 0$, $K(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ setzt. Es ergibt sich

$$(29) \qquad K(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos tx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}t^2}.$$

e) Aus (21) ergeben sich einige weitere Integralformeln, die in der Theorie der Beugung zur Anwendung kommen. Aus (26) folgt

$$\int_a^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[\int_a^u e^{-tx^2} \sin t\, dt\right] dx;$$

dies ist nach § 2 (19) gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin a \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} x^2\, dx}{1+x^4} + \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^4}\, dx - \right.$$

$$\left. - \sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2\, dx}{1+x^4} - \cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2}}{1+x^4}\, dx\right].$$

Konvergiert hier a gegen Null, so ergibt sich mit Rücksicht auf $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ die Beziehung

$$(30) \quad \int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2\, dx}{1+x^4} + \cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2}\, dx}{1+x^4}\right].$$

Ganz analog erhält man

$$(30') \quad \int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2\, dx}{1+x^4} - \sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2}\, dx}{1+x^4}\right].$$

Konvergiert u gegen ∞, so verschwinden die Klammerausdrücke rechter Hand. In der Tat sind die Integrale in der Klammer kleiner als

$$\int_0^\infty e^{-ux^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}} \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty e^{-ux^2} x^2\, dx = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{u^{3/2}}.$$

Es ergibt sich somit

$$(31)\quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_0^\infty \sin\frac{\pi x^2}{2}\,dx = \int_0^\infty \cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

3. Eulersche Summenformel. Man begegnet oft der Aufgabe, Summen von der Form

$$(32)\qquad f(0) + f(1) + \cdots + f(n) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu)$$

auszuwerten bzw. für große n abzuschätzen. Hierbei bezeichnet $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, beliebig oft differenzierbare Funktion. Aus den Gleichungen

$$f(n) - f(\nu) = \int_\nu^n f'(x)\,dx \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ergibt sich durch Addition

$$(n+1)f(n) - \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \int_\nu^n f'(x)\,dx.$$

Zerlegt man hier jedes Integral in eine Summe von Integralen von der Form $\int_k^{k+1} f'(x)\,dx$, so folgt

$$(n+1)f(n) - \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int_k^{k+1} f'(x)\,dx.$$

Die letzte Summe kann auch in der Form $\int_0^n ([x]+1)f'(x)\,dx$ geschrieben werden, wenn $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, welche nicht größer als x ist. Setzt man

$$(33)\qquad \vartheta(x) = [x] - x + \tfrac{1}{2},$$

so ist $|\vartheta(x)| \leqq \frac{1}{2}$. Es ist ferner

$$(34)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) = (n+1)f(n) - \int_0^n (\vartheta(x) + x + \frac{1}{2}) f'(x)\,dx \\ \qquad = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(n)+f(0)}{2} - \int_0^n \vartheta(x) f'(x)\,dx \\ \qquad = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(n)+f(0)}{2} + R_n, \end{cases}$$

wo das Restglied R_n die unten (35′) angegebene Gestalt hat. Das ist die Eulersche Summenformel in ihrer einfachsten Form. Sie

läßt sich durch Heranziehung der höheren Ableitungen von f weiter ausgestalten, so daß die folgende allgemeine Formel gilt:

$$(35)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(n)+f(0)}{2} + \frac{B_1}{2!}(f'(n)-f'(0)) \\ \qquad - \frac{B_2}{4!}(f'''(n)-f'''(0)) + \frac{B_3}{6!}(f^{(5)}(n)-f^{(5)}(0)) - \cdots \\ \qquad + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!}(f^{(2k+1)}(n)-f^{(2k+1)}(0)) + R_{nk}, \end{cases}$$

wobei das Restglied R_{nk} sich in der folgenden Form darstellen läßt:

$$(35')\qquad R_{nk} = (-1)^k \int_0^n P_{2k+3}(x)\, f^{(2k+3)}(x)\,dx.$$

Die Funktionen P sind von f unabhängig. Sie sind periodisch mit der Periode 1 und stimmen für $0 \leqq x \leqq 1$ mit gewissen Polynomen überein. Man hat z. B. für $0 \leqq x \leqq 1$

$$P_1(x) = -x + \frac{1}{2}, \quad P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \quad \text{usw.}$$

Die Konstanten $B_1, B_2, \ldots$ sind die sogenannten Bernoullischen Zahlen, definiert durch die Reihenentwicklung

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - \cdots, \\ B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66} \text{ usw.} \end{cases}$$

Für $k = -1$ reduziert sich (35′) auf den Rest R_n in (34).

Für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ergibt sich z. B. aus (34)

$$(37)\qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log\operatorname{nat} n + r_n,$$

wobei $|r_n| < {}^3/_2$ bleibt. Der Rest r_n besitzt übrigens in diesem Falle für $n \to \infty$ einen Grenzwert. Es gilt nämlich nach dem Taylorschen Satze

$$\left|\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right| < \frac{A}{n^2},$$

wo A von n unabhängig ist. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]$$

ist also konvergent (vgl. IV, § 1, 1). Ihre $(n-1)$-te Partialsumme hat den Wert $\frac{1}{n} - r_n$.

Dieser Limes

$$(38) \qquad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log \operatorname{nat} n \right) = C$$

kommt in der Analysis häufig vor; C heißt die Euler-Mascheronische Konstante und ist mit der Theorie der in § 2 definierten Gammafunktion eng verknüpft. Es ist auf acht Stellen genau $C = 0{,}577\,215\,66$ [1]).

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung der Eulerschen Summenformel ist $f(x) = \log \operatorname{nat}(1+x)$. Man erhält aus (35) für $k = 0$ nach einer leichten Rechnung

$$(39) \qquad \log \operatorname{nat} n! = (n + \tfrac{1}{2}) \log \operatorname{nat} n - n + r_n,$$

wo $|r_n| \leqq 1$ ist. Man kann auch hier zeigen, daß $\lim_{n \to \infty} r_n$ existiert $[= \frac{1}{2} \log \operatorname{nat}(2\pi)]$. Das ist die sogenannte Stirlingsche Formel.

§ 5. Vertiefung des Integralbegriffs

1. Das Stieltjessche Integral. In vielen Zweigen der mathematischen Physik, z. B. in der Potentialtheorie, begegnet man der Aufgabe, eine gewisse Funktion des Ortes über eine stetig oder diskret verteilte Masse zu „integrieren“. Das einfachste Beispiel ist die Bestimmung des Schwerpunktes einer Massenverteilung, bei der man oft ein Integral $\int x\,dm$ mit einer Summe $\sum x_j m_j$ zusammenzufassen hat. Um den Sinn dieser Aufgabe genau zu erklären und eine in möglichst vielen Fällen ausreichende Lösung zu geben, führen wir einen neuen Begriff, das Stieltjessche Integral, ein. Wir betrachten etwa im gewöhnlichen Raume eine Massenverteilung, bestehend aus stetig verteilten oder diskreten positiven Massen. Das soll so viel heißen, daß jedem beliebigen Raumteil τ eine gewisse nichtnegative Zahl $m(\tau)$ (Masse) zugeordnet wird, wobei $m(\tau)$ bei Verkleinerung von τ abnimmt, aber im allgemeinen nicht gegen 0 zu konvergieren braucht. Außerdem soll sich $m(\tau)$ bei der Zusammenfassung von zwei beliebigen Raumteilen ohne innere Punkte additiv verhalten. (Es genügt übrigens, wie wir sofort sehen werden, die Massenfunktion $m(\tau)$ nur für die Quader mit zu den Koordinatenachsen parallelen Seitenflächen zu definieren.) Ist dann f eine stetige Funktion des Ortes, so können wir zunächst den ganzen Raum in gewisse Elementarbereiche τ zerlegen und die entsprechenden Massen

---

[1]) Bei Gauß (Werke, 3. Bd., S. 154) findet sich C nach der Berechnung von Nikolai auf 40 Dezimalstellen.

$m(\tau)$ mit dem Werte von f in irgendeinem Punkte von τ, d. h. mit f_τ multiplizieren. Die Summe aller dieser Produkte

$$\sum f_\tau m(\tau)$$

strebt dann unter gewissen Bedingungen gegen einen Limes, der das Stieltjessche Integral von f in bezug auf die gegebene Massenverteilung heißt.

Um einen besonders einfachen und wichtigen Fall ins Auge zu fassen, betrachten wir eine Massenverteilung längs der geradlinigen Strecke $a \leqq x \leqq b$. Sie sei durch die monoton wachsende (nicht abnehmende) Funktion $\psi(x)$ bestimmt, und zwar so, daß der Strecke a, x die Masse $\psi(x) - \psi(a)$ zukommt.

Es sei ferner $f(x)$ eine im Intervall a, b erklärte stetige Funktion. Die Riemannsche Definition des Integrals stützt sich auf die Betrachtung der Summen von der Form

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}). \tag{1}$$

(Vgl. § 2, 1.) Wir ersetzen hier $x_\nu - x_{\nu-1}$ überall durch den Zuwachs von $\psi(x)$ im ν-ten Teilintervall, $\psi(x_\nu) - \psi(x_{\nu-1})$ (d. h. durch die dem ν-ten Intervall zukommende Masse). Die so entstehenden Summen

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi_1)(\psi(x_1) - \psi(a)) + f(\xi_2)(\psi(x_2) - \psi(x_1)) + \cdots \\ \qquad + f(\xi_n)(\psi(b) - \psi(x_{n-1})) \end{array}\right. \tag{2}$$

haben dann analoge Eigenschaften wie (1). Insbesondere existiert der Limes von (2), wenn die Länge der Teilintervalle $x_\nu - x_{\nu-1}$ gegen Null konvergiert, vorausgesetzt, daß $f(x)$ eine stetige Funktion ist. Diesen Limes bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) \tag{3}$$

und nennt ihn das Stieltjessche Integral von $f(x)$ in bezug auf die „Belegungsfunktion" $\psi(x)$.

Wenn $\psi(x)$ eine stetige Ableitung besitzt, so läßt sich (2) nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung so schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\xi_1)\psi'(\xi_1^*)(x_1 - a) + f(\xi_2)\psi'(\xi_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots \\ \qquad + f(\xi_n)\psi'(\xi_n^*)(b - x_{n-1}), \end{array}\right. \tag{4}$$

wo ξ_ν^* im Intervall $x_{\nu-1}, x_\nu$ liegt. Es ist dann unmittelbar einzusehen, daß der Limes von (4) gleich dem gewöhnlichen Integral

$$\int_a^b f(x)\psi'(x)\, dx \tag{5}$$

ist, so daß in diesem Falle das Stieltjessche Integral nichts wesentlich Neues bietet.

Ein zweiter einfacher Fall ist der, daß $\psi(x)$ eine streckenweise konstante Funktion ist, die an endlich vielen Stellen $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ im Innern von a, b positive Sprünge von der Größe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ erleidet. Dann ist, wie man leicht sieht,

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \sigma_1 f(c_1) + \sigma_2 f(c_2) + \cdots + \sigma_k f(c_k). \tag{6}$$

Dasselbe gilt natürlich für eine unendliche (konvergente) Summe dieser Art. Wie (5) einer stetig differenzierbaren Massenverteilung entspricht, so stellt (6) den Fall einzelner konzentrierter Massen dar. Beide Sonderfälle, ihre Kombination und, darüber hinaus, Verteilungen viel allgemeinerer Art umfaßt man mit dem Ansatz des Stieltjesschen Integrals.

Als Beispiel betrachten wir eine Massenbelegung, welche aus einer gleichförmigen Belegung der Strecke 0,1 von der Dichte ϱ und außerdem den punktförmigen Massen m_1, m_2, m_3 je in den Punkten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ besteht. Dann läßt sich weder das statische Moment

$$\varrho \int_0^1 x\,dx + \frac{m_1}{4} + \frac{m_2}{2} + 3\frac{m_3}{4},$$

noch das Trägheitsmoment

$$\varrho \int_0^1 x^2\,dx + \frac{m_1}{16} + \frac{m_2}{4} + 9\frac{m_3}{16}$$

durch ein einziges Integral oder eine einzige Summe in übersichtlicher Weise darstellen. Wir können sie dagegen in Form der Stieltjesschen Integrale

$$\int_0^1 x\,d\psi(x), \qquad \int_0^1 x^2\,d\psi(x)$$

ausdrücken, wobei

$$\psi(x) = \begin{cases} \varrho x & \text{für } 0 \leqq x < \frac{1}{4}, \\ \varrho x + m_1 & \text{„ } \frac{1}{4} \leqq x < \frac{1}{2}, \\ \varrho x + m_1 + m_2 & \text{„ } \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{4}, \\ \varrho x + m_1 + m_2 + m_3 & \text{„ } \frac{3}{4} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

ist.

Analoge Betrachtungen gelten in der Ebene und im Raume. Eine Ortsfunktion $f(P)$ in der Ebene heißt dabei monoton wachsend,

wenn die durch f als Belegungsfunktion bestimmte, einem beliebigen achsenparallelen Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ zukommende Masse stets $\geqq 0$ ausfällt. Das heißt

$$f(P_1) - f(P_2) + f(P_3) - f(P_4) \geqq 0,$$

wobei $P_1 P_2 P_3 P_4$ dem positiven Umlauf entspricht und P_1 die Ecke mit kleinster Abszisse und Ordinate bezeichnet.

2. Das Lebesguesche Integral. Eine andere Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals ist das Lebesguesche. Es hat sich bei manchen Fragen der Analysis, die für die mathematische Physik nicht ohne Bedeutung sind (z. B. Entwicklung sogenannter willkürlicher Funktionen), herausgestellt, daß der Bereich der im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen nicht immer zweckmäßig abgegrenzt ist; es gibt wichtige Sätze, deren Gültigkeitsbereich sich nicht mit der Voraussetzung der Riemannschen Integrabilität in Einklang bringen läßt. Es ist 1904 Lebesgue gelungen, durch eine neue Definition des Integrals diese Schwierigkeit in nicht geringem Maße zu beseitigen [1]. Geometrisch anschaulich handelt es sich um folgendes: In der klassischen Integraldefinition geht man von einer Einteilung des Integrationsintervalls (des Wertbereiches der unabhängigen Veränderlichen) aus; dagegen bildet hier eine Einteilung des Wertbereiches der zu integrierenden Funktion $f(x)$ den Ausgangspunkt und man mißt die „Länge" derjenigen x-Mengen, für die der Wert von $f(x)$ in einen dieser Teilbereiche fällt.

a) Zu diesem Zwecke wird eine auf Borel zurückgehende Methode der Messung der „Länge" von Mengen benutzt. Um das näher begründen zu können, schicken wir einige Definitionen voraus. Wir betrachten irgendeine beschränkte lineare Punktmenge E, d. h. eine Gesamtheit von Punkten, die alle in einem endlichen Intervall a, b gelegen sind. Wir betrachten ferner eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl [2] von Intervallen („Intervallmenge") so, daß jeder Punkt von E mindestens einem dieser Intervalle angehört. Die Menge E wird durch diese Intervallmenge gewissermaßen überdeckt. Die Gesamtlänge, d. h. die Summe der Längen dieser Intervalle ist eine

[1]) Vgl. sein Buch: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Paris, Gauthier-Villars, 2. Aufl., 1928), insbesondere Chapitre VII.

[2]) Eine Menge heißt abzählbar, wenn ihre Elemente in eindeutig umkehrbare Beziehung zu den natürlichen Zahlen gebracht werden können, wenn man also die Elemente dieser Menge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ „abzählen" kann. Die rationalen Zahlen bilden z. B. eine abzählbare Menge, wogegen ein berühmter Satz von Cantor besagt, daß die Menge der Punkte zwischen 0 und 1 (das „Kontinuum") nicht abzählbar ist.

positive Zahl (eventuell $+\infty$). Die untere Grenze dieser Zahlen bei jeder möglichen Wahl dieser Intervallmenge heißt das äußere Maß $m_a(E)$ von E. Das innere Maß $m_i(E)$ wird durch die Formel

$$m_i(E) = b - a - m_a(E') \tag{7}$$

definiert, wobei E' die sogenannte Komplementärmenge, d. h. die Gesamtheit sämtlicher Punkte von a, b bezeichnet, die keine Punkte von E sind. Es ist stets $m_i(E) \leqq m_a(E)$. Gilt hier das Gleichheitszeichen, so heißt E meßbar und $m_i(E) = m_a(E) = m(E)$ ihr Maß.

Die Summe $E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots$ von endlich oder abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen (d. i. die Gesamtheit sämtlicher Punkte, die mindestens einer Menge E_ν angehören) ist ebenfalls meßbar und $m(E) \leqq m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + \cdots$. Hier gilt das Gleichheitszeichen, wenn die E_ν keine gemeinsamen Punkte haben. Auch die Menge der gemeinsamen Punkte von abzählbar vielen meßbaren Mengen ist wieder meßbar.

Eine im Intervall a, b definierte Funktion $f(x)$ heißt meßbar, wenn die Menge derjenigen Punkte von a, b, an denen der Wert von $f(x)$ zwischen zwei Zahlen α und β liegt, d. h. $E[\alpha < f(x) < \beta]$, bei jeder Wahl der Konstanten α und β meßbar ausfällt.

b) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Definition des Lebesgueschen Integrals. Wir betrachten zunächst eine im Intervall a, b erklärte beschränkte und meßbare Funktion $f(x): m \leqq f(x) \leqq M$ und teilen das Intervall m, M, in dem der „Wertevorrat" von $f(x)$ gelegen ist, in beliebige Teile ein:

$$\mu_0 = m < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \mu_n = M. \tag{8}$$

Wir multiplizieren μ_ν bzw. $\mu_{\nu-1}$ mit dem Maß der Menge, in deren Punkten $f(x)$ Werte zwischen $\mu_{\nu-1}$ und μ_ν annimmt. Die Summen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \quad \times \text{Maß von } E[\mu_{\nu-1} < f(x) \leqq \mu_\nu], \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \mu_{\nu-1} \times \text{Maß von } E[\mu_{\nu-1} \leqq f(x) < \mu_\nu] \end{aligned}\right. \tag{9}$$

sind dann durch (8) eindeutig bestimmt. Es läßt sich nun unter den genannten Bedingungen zeigen, daß diese gegen einen und denselben Limes konvergieren, wenn die Differenzen $\mu_\nu - \mu_{\nu-1}$ sämtlich gegen Null streben. Dieser Limes heißt das Lebesguesche Integral von $f(x)$ in a, b. Eine beschränkte und meßbare Funktion ist somit stets im Lebesgueschen Sinne integrabel [(L) integrabel]. Man zeigt, daß eine beschränkte und im Riemannschen Sinne integrable [(R)

integrable] Funktion stets meßbar ist und daß ihr Lebesguesches Integral mit dem gewöhnlichen übereinstimmt. Wir haben es also hier tatsächlich mit einer Verallgemeinerung des klassischen Integralbegriffes zu tun.

Ist nun $f(x)$ zwar meßbar, aber nicht beschränkt, dann ist das obige Verfahren nicht anwendbar. In diesem Falle definieren wir zunächst eine Funktion $f(x;\ \omega_1,\ \omega_2)$, wobei die Parameter ω_1 und ω_2 ganz beliebige Zahlen sind, $\omega_1 < \omega_2$. Wir setzen:

$$(10)\qquad f(x;\ \omega_1,\ \omega_2) = \begin{cases} f(x) & \text{für } \omega_1 < f(x) < \omega_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist ebenfalls meßbar, außerdem beschränkt, es existiert also das Lebesguesche Integral

$$(11)\qquad J(\omega_1,\ \omega_2) = \int_a^b f(x;\ \omega_1,\ \omega_2)\,d\,x.$$

Der Limes desselben, wenn ω_1 und ω_2 voneinander unabhängig gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ konvergieren, sofern er vorhanden ist, heißt das Lebesguesche Integral von $f(x)$ in a, b. In diesem Falle ist also die Definition des Integrals an die Existenz eines Grenzwertes gebunden. Aus dieser Definition folgt übrigens, daß mit f auch $|f|$ integrabel ist[1]), eine Eigenschaft, die in der klassischen Integrationstheorie (vgl. § 2, 2) bekanntlich nicht gilt. Man zeigt auch sehr leicht, daß es Funktionen gibt, die im Sinne von § 2, 2, a) integrabel sind, ohne (L) integrabel zu sein. Diese Eigenschaft haben eben die Funktionen, welche im Sinne von § 2, 2, a) integrabel, jedoch nicht absolut integrabel sind.

3. Anwendungen des Lebesgueschen Integrals. Die Bedeutung des Lebesgueschen Integrals besteht, wie gesagt, darin, daß es bei manchen wichtigen Sätzen der Integralrechnung natürlicher ist, anstatt des klassischen Integralbegriffs diesen allgemeineren zugrunde zu legen. Als einen solchen Satz wollen wir den folgenden über die Integration einer Funktionenfolge erwähnen:

Es sei $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$ eine in dem Intervall a, b konvergente Folge von meßbaren Funktionen, die dort gleichmäßig beschränkt sind: $|f_n| < M$ für jedes n. Dann ist die Grenzfunktion $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ ebenfalls meßbar und es ist

$$(12)\qquad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\,d\,x = \int_a^b f\,d\,x.$$

---

[1]) Es ist klar, daß mit f auch $|f|$ meßbar ist.

Als ein Fall, in dem man notgedrungen Lebesguesche Integrale verwendet, sei der Fischer-Rieszsche Satz erwähnt (VIII, § 1, **1**). Bei diesem Satz, der neuerdings vielfach Anwendung gefunden hat, handelt es sich um eine Eigenschaft der sogenannten Orthogonalfunktionen. Darunter versteht man, wie das in VIII, § 1 ausführlich dargelegt werden soll, Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., die in einem bestimmten Intervall a, b (L) integrabel sind, ihre Quadrate φ_1^2, φ_2^2, ... ebenfalls, für die ferner $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ Null oder eins ist, je nachdem $m \neq n$ bzw. $m = n$ ist[1]). Das einfachste und bekannteste Beispiel einer solchen Funktionenfolge bilden etwa die Funktionen $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $1, \cos x$, $\cos 2x$, ... (zu denen noch passende numerische Faktoren hinzukommen) für das Intervall $0, 2\pi$. Bezeichnet nun $f(x)$ eine ebenfalls samt f^2 (L) integrable Funktion, so kann man die sogenannten Fourierschen Konstanten von $f(x)$

$$(13) \qquad c_n = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden, die sich als die „Komponenten eines Vektors f“ im unendlich viel dimensionalen Raum, und zwar in den Richtungen der aufeinander senkrechten „Fundamentalvektoren“ φ_1, φ_2, ... auffassen lassen. (Vgl. VIII.) Sie haben die leicht nachweisbare Eigenschaft, daß ihre Quadratsumme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ (das Quadrat der Länge des „Vektors“ f) endlich ist. Der Fischer-Rieszsche Satz behandelt nun die Frage, ob man zu vorgegebenen Konstanten c_n immer eine Funktion f angeben kann, deren durch (13) definierte Fourier-Konstanten gerade die gegebenen Zahlen c_n sind. Eine notwendige Bedingung, welche die Konstanten c_n sicherlich zu erfüllen haben, ist natürlich die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$. Diese Bedingung ist aber — und das ist der Inhalt des in Rede stehenden Satzes — auch hinreichend, wenn sämtliche Integrale, die hierbei auftreten, im Lebesgueschen Sinne genommen werden. Mit

---

[1]) Aus der Existenz der Integrale $\int\limits_a^b f^2\,dx$, $\int\limits_a^b g^2\,dx$ folgt die von $\int\limits_a^b fg\,dx$, wovon man sich durch leichte Anwendung der Schwarzschen Ungleichheit $\left(\int\limits_a^b fg\,dx\right)^2 \leqq \int\limits_a^b f^2\,dx \int\limits_a^b g^2\,dx$ überzeugt. Dieselbe Bemerkung gilt übrigens auch für die absolute Integrabilität im Riemannschen Sinne.

anderen Worten, es gibt zu jeder Zahlenfolge $c_1, c_2, \ldots$ mit endlicher Summe $c_1^2 + c_2^2 + \cdots$ eine (L) integrable Funktion $f(x)$, deren Fourier-Konstanten bezüglich des Orthogonalsystems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die c sind. Dagegen gibt es nicht immer eine (R) integrable Funktion zu derart angegebenen $c_1, c_2, \cdots$. Natürlich kann f nicht im strengen Sinn eindeutig durch die $c_1, c_2, \ldots$ bestimmt werden; denn wenn man in einer Menge von Stellen (x-Werten), deren Lebesguesches Maß Null ist, die Funktionenwerte beliebig abändert, bleiben die Integrale über f und $f\varphi_n$, also auch die c unverändert.

Man erkennt aus diesen Andeutungen, daß der Lebesguesche Integralbegriff eine nicht nur theoretisch bedeutsame, sondern auch recht nützliche Verallgemeinerung des klassischen Integralbegriffes ist.

Einige Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung

1. L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung. Leipzig (Teubner). Bd. I, 3. Aufl. 1928; Bd. II, 3. Aufl. 1928. (Kurzer Abriß.)
2. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig (Teubner). 4. Aufl. 1928.
3. R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Berlin (Springer). Bd. I, 1927; Bd. II, 1929.
4. R. Fricke, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. Leipzig (Teubner). Bd. I, 2. Aufl. 1921; Bd. II, 3. Aufl. 1921.

Außerdem als allgemeine Einführung bzw. Repetitorium:

5. W. Nernst und A. Schoenflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. München und Berlin (R. Oldenbourg). 10. Aufl. 1923.
6. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig (Hirzel). Bd. I, 4. Aufl. 1923; Bd. II, 3. Aufl. 1921; Bd. III, 3. Aufl. 1922.
7. E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik. Leipzig (Teubner). Erster Band, erste Hälfte. 2. Aufl. 1910.
8. E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin (Springer). 2. Aufl. 1925.

Zweites Kapitel

Lineare Gebilde

Fast alle Differential- und alle Integralgleichungen, mit denen man es in der Mechanik und Physik zu tun hat, haben die Eigenschaft, „linear“ zu sein. Daraus fließen für ihre Auflösung Gesichtspunkte und Verfahren allgemeiner Art, die schon bei gewöhnlichen (algebraischen) linearen Gleichungen zur Geltung kommen. Aus diesem Grunde vor allem, ganz abgesehen von unmittelbaren Anwendungen besonderer Ergebnisse, ist einige Kenntnis der linearen Algebra für das Folgende

nötig. — Den unmittelbarsten geometrischen Ausdruck finden lineare Gebilde in dem Begriff des „Vektors“; wenn auch nicht alles, was über Vektoren zu sagen ist, in das Gebiet der linearen Operationen fällt, so findet doch das meiste für uns Wichtige in diesem Zusammenhang seinen angemessenen Platz.

§ 1. Auflösung linearer Gleichungen

1. Allgemeine Form der Lösung. Es seien n unbekannte Größen x_1, $x_2, \ldots, x_n$ mit n gegebenen Größen $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ durch die n Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \cdots + a_{nn} x_n = y_n \end{cases}$$

verknüpft, in denen die n^2 Werte $a_{\iota\varkappa}$ ebenfalls als gegeben angesehen werden. Es ist sehr zweckmäßig, sich die x_ι als die n Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im n-dimensionalen Raume vorzustellen, ebenso die y_ι, und danach zu sagen: dem Vektor $\mathfrak{x}$ sei durch das Gleichungssystem (1) der Vektor $\mathfrak{y}$ zugeordnet (oder die Gesamtheit der $\mathfrak{x}$ in die $\mathfrak{y}$ transformiert); gefragt sei umgekehrt nach dem Vektor $\mathfrak{x}$ bei gegebenem $\mathfrak{y}$.

Wir machen uns leicht klar, welche Beziehung zwischen zusammengehörigen Vektorpaaren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ (oder zwischen den x_1, $x_2, \ldots$ und den $y_1, y_2, \ldots$), die den Gleichungen (1) genügen, bei festen Werten der $a_{\iota\varkappa}$ besteht. Sei z. B. $x'_1, x'_2, \ldots$ eine Lösung von (1) für den Fall, daß auf der rechten Seite der Gleichungen $y'_1, y'_2, \ldots$ steht, und ebenso $x''_1, x''_2, \ldots$ eine Lösung für die rechten Seiten $y''_1, y''_2, \cdots$. Bezeichnen dann c' und c'' irgendwelche Konstanten, so lösen die Größen $c'x'_1 + c''x''_1$, $c'x'_2 + c''x''_2, \ldots$ die Gleichungen (1), falls auf den rechten Seiten die Werte $c'y'_1 + c''y''_1$, $c'y'_2 + c''y''_2$, $c'y'_3 + c''y''_3, \ldots$ stehen. Man erkennt dies unmittelbar durch Einsetzen der angenommenen x-Werte. In allgemeiner Form kann man diesen „linearen Charakter“ der Gleichungen (1) durch den Ansatz zum Ausdruck bringen:

$$(2) \qquad \mathfrak{L}(c'\mathfrak{x}' + c''\mathfrak{x}'') = c'\mathfrak{L}(\mathfrak{x}') + c''\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'').$$

Hierin dient der Buchstabe $\mathfrak{L}$ symbolisch zur Bezeichnung der gesamten Operation (1), die aus einem Vektor $\mathfrak{x}$ einen Vektor $\mathfrak{y}$ ableitet. Mehrere wichtige Folgerungen sind aus (2) zu ziehen.

Sind die rechten Seiten der Gleichungen (1) alle Null, so nennt man das Gleichungssystem homogen; es wird dann sicher durch $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ gelöst. Gesetzt den Fall, es gebe außer dieser „trivialen“ Lösung noch andere Lösungssysteme, die nicht aus lauter Nullen bestehen, so folgt aus (2), daß auch jede lineare Kom-

bination solcher Lösungen (Summe der mit irgendwelchen Konstanten multiplizierten Lösungen) wieder eine Lösung ist. Hat man aber ein nicht-homogenes Gleichungssystem, d. h. nicht lauter Nullen rechts, und kennt man eine Lösung dieser Gleichungen, so erhält man weitere Lösungen, indem man zu der ersten beliebige lineare Kombinationen von Lösungen des homogenen Problems hinzufügt. Die Lösung von (1) kann also nur dann eindeutig sein, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem (das durch Nullsetzen der rechten Seiten entsteht) keine andere Lösung als die triviale besitzt, Umgekehrt ist sie in diesem Falle sicher eindeutig, denn die Differenz zweier Lösungen für gleiche y wäre nach (2) immer eine Lösung des homogenen Systems.

Um die Form der allgemeinen Lösung von (1) für beliebige y zu finden, machen wir zunächst eine Reihe besonderer Annahmen für die rechten Seiten. Wir setzen einmal $y_1 = 1$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ und denken uns für diese rechten Seiten die Gleichungen aufgelöst; daß dies möglich ist, nehmen wir hier zunächst an. Die Lösungen seien bezeichnet mit $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$. Hierauf setzen wir $y_2 = 1$ und alle übrigen y Null und bezeichnen die Lösung mit $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n}$; so wird fortgefahren bis zur Lösung $A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}$ für die Annahme $y_n = 1$ und $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0$. Es ist einleuchtend, daß sämtliche n^2 Größen $A_{\iota\varkappa}$ nur von den n^2 Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ abhängen, aber nicht mehr von den ursprünglich gegebenen y-Werten. Die Lösung der Gleichungen (1) für beliebige y hat nun nach (2) die Form:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + \cdots + A_{n1}y_n \\ x_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + \cdots + A_{n2}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + A_{3n}y_3 + \cdots + A_{nn}y_n. \end{cases}$$

Man erkennt aus (3): Wenn die Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ so beschaffen sind, daß das homogene Gleichungssystem keine Lösung außer der trivialen besitzt, so stellt sich die Lösung des nicht-homogenen als ein linear-homogener Ausdruck in den y dar; andernfalls tritt auf der rechten Seite von (3) noch die Lösung des homogenen Problems additiv hinzu.

In der Vektorsprache besagt (3), daß, wenn der Vektor $\mathfrak{y}$ durch eine lineare Zuordnung (oder „Transformation“) aus einem Vektor $\mathfrak{x}$ hervorgeht, dann umgekehrt $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{y}$ in der gleichen Form hergeleitet werden kann, nur mit anderen Werten der Koeffizienten ($A_{\varkappa\iota}$ an Stelle der $a_{\iota\varkappa}$) — immer vorausgesetzt, daß nicht etwa ein von Null verschiedener Vektor $\mathfrak{x}$ existiert, dem der Vektor Null zugeordnet ist (nicht-triviale Lösung der homogenen Gleichungen).

2. Determinanten[1]. Die n^2 Größen $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn}$, die eben als n besondere Lösungssysteme der Gl. (1) für bestimmte n Annahmen über die rechten Seiten von (1) eingeführt wurden und die, wie (3) zeigt, die „Umkehrung" des Gleichungssystems (1) liefern, sind gewisse Funktionen der ursprünglichen Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ und sollen jetzt näher untersucht werden. Wir betrachten zunächst eine Funktion von n^2 in n Zeilen und n Spalten geordneten Größen

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

die wir die „Determinante" dieser Größen nennen (die lotrechten Striche sollen das Funktionszeichen ersetzen) und die durch folgende drei Eigenschaften definiert werden kann: 1. Der Wert der Funktion bleibt ungeändert, wenn man die Größen einer Zeile ersetzt durch die Summen, die entstehen, wenn man zu ihnen die Größen einer anderen Zeile addiert, also beispielsweise $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ durch $a_{11} + a_{31}$, $a_{12} + a_{32}, \ldots, a_{1n} + a_{3n}$; 2. der Wert der Funktion wird mit λ multipliziert, sobald man alle Größen einer Zeile mit λ multipliziert; 3. der Wert der Funktion ist 1, wenn alle $a_{\iota\varkappa}$ mit gleichen Indizes $\iota = \varkappa$ den Wert 1, alle anderen den Wert Null haben.

Es läßt sich zeigen, daß durch diese drei Eigenschaften die Funktion eindeutig bestimmt ist. Wir verzichten auf den Beweis für diese Behauptung und führen zunächst folgende einfachen Schlüsse an: Man darf auch ein beliebiges Vielfaches einer Zeile (nicht nur das Einfache) zu einer anderen hinzufügen, ohne den Wert der Funktion zu ändern; vertauscht man zwei Zeilen miteinander, so kehrt sich nur das Vorzeichen der Determinante um; sind alle Größen einer Zeile Null, so ist es auch der Wert der Determinante.

Bevor wir das allgemeine Gesetz angeben, nach dem der Wert einer Determinante (4) zu errechnen ist, sei ihr Wert für $n = 2$ und $n = 3$ angeschrieben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}.$$

---

[1]) Es ist vorausgesetzt, daß der Leser einige Kenntnisse der einfachsten Sätze und Definitionen besitzt. Die folgende Darstellung, die sich im Gedankengang an C. Carathéodory, Vorles. üb. reelle Funktionen, Leipzig 1918, Kap. VI, anschließt, soll nur das Wichtigste in Erinnerung bringen.

Allgemein gilt, daß die Determinante ganz, rational und homogen vom n-ten Grad in ihren Elementen ist, daß ferner niemals ein Element mit einem anderen derselben Zeile oder derselben Spalte in einem Produkt erscheint. Daraus folgt, daß die Determinante linear und homogen in den Elementen einer einzelnen Reihe (Zeile oder Spalte) ist. Überhaupt sind Zeilen und Spalten gleichwertig, d. h. eine Spiegelung des ganzen Schemas an der Hauptdiagonale ändert den Wert nicht. Man kann somit, wenn die von uns hier betrachtete Funktion (4) mit D bezeichnet wird, setzen:

$$(5) \qquad D = a_{r1} D_{r1} + a_{r2} D_{r2} + a_{r3} D_{r3} + \cdots + a_{rn} D_{rn},$$

wo r eine der Zahlen 1 bis n ist und ein beliebiges D_{rs} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ nur von den $(n-1)^2$ Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ abhängt, die außerhalb der r-ten Zeile und der s-ten Spalte stehen. Man kann nun endlich weiter folgern, da diese Funktion der $(n-1)^2$ Veränderlichen den gleichen Bedingungen genügen muß, wie sie eingangs für D ausgesprochen wurden, daß jedes D_{rs} nichts anderes ist als die Determinante, die aus den übrigbleibenden $(n-1)$ Zeilen und ebensoviel Spalten gebildet wird, versehen mit dem positiven Vorzeichen, wenn $r+s$ eine gerade, mit dem negativen, wenn $r+s$ eine ungerade Zahl ist:

$$(6) \quad D_{rs} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \cdots a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,s-1} & a_{2,s+1} \cdots a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} \cdots\cdots & \cdots\cdots a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} \cdots\cdots & \cdots\cdots a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots a_{n,s-1} & a_{n,s+1} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Dieses D_{rs} heißt die dem Element a_{rs} von D zugeordnete Unterdeterminante.

Ersetzt man in der Determinante die r-te Zeile durch die s-te Zeile, so daß nach S. 46 die Determinante den Wert 0 hat (man kann ja die zwei gleichen Zeilen voneinander subtrahieren, so daß in einer Zeile lauter Nullen stehen), so liefert die Regel (5):

$$(5') \qquad 0 = a_{s1} D_{r1} + a_{s2} D_{r2} + a_{s3} D_{r3} + \cdots + a_{sn} D_{rn} \qquad (r \neq s).$$

Man bestätigt leicht den in (5) und (6) zum Ausdruck kommenden „Laplaceschen Entwicklungssatz“ wie auch seine allgemeinere Form, die wir hier nicht benötigen, an den dargestellten Fällen $n = 2$ und $n = 3$. Nunmehr ist es auch leicht, die Werte der oben eingeführten Größen A_{rs} anzugeben, wie wir gleich sehen wollen.

Erwähnt sei noch der **Multiplikationssatz** in seiner einfachsten Form: das Produkt zweier Determinanten n-ter Ordnung kann man wieder als eine Determinante gleicher Ordnung schreiben, und zwar gilt:

$$(6') \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 b_1) & (a_1 b_2) & \dots & (a_1 b_n) \\ (a_2 b_1) & (a_2 b_2) & \dots & (a_2 b_n) \\ \vdots & & & \\ (a_n b_1) & (a_n b_2) & \cdots & (a_n b_n) \end{vmatrix},$$

wobei

$$(6'') \qquad (a_r b_s) = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \cdots + a_{rn} b_{sn}$$

ist. (Skalares Produkt der r-ten Zeile der ersten Determinante mit der s-ten Zeile der zweiten. Vgl. § 2, **1** und § 3, **1**.) Vertauscht man vorher die Zeilen und Spalten einer oder beider gegebenen Determinanten, so erhält man drei andere Formen des Multiplikationssatzes.

3. Cramersche Auflösungsformel. Wir kehren zu dem Gleichungssystem (1) zurück und wollen jetzt voraussetzen, daß die aus seinen n^2 Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ gebildete Determinante (4) einen von Null verschiedenen Wert besitze. Nach der eben in (6) gegebenen Vorschrift bilden wir die n Unterdeterminanten $D_{11}, D_{21}, \ldots, D_{n1}$, die den Elementen $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ der ersten Spalte von (4) zugeordnet sind, multiplizieren die erste der Gl. (1) mit D_{11}, die zweite mit D_{21}, die dritte mit D_{31} usf. und addieren. Auf der rechten Seite entsteht dadurch der Ausdruck

$$(7) \qquad y_1 D_{11} + y_2 D_{21} + y_3 D_{31} + \cdots + y_n D_{n1}.$$

Links hat man im ganzen n^2 Summanden, unter denen je n die gleiche Unbekannte x als Faktor enthalten. Insbesondere erscheint x_1 multipliziert mit

$$a_{11} D_{11} + a_{21} D_{21} + a_{31} D_{31} + \cdots + a_{n1} D_{n1};$$

dies ist aber nach (5), wenn man die Gleichberechtigung von Zeilen und Spalten beachtet, nichts anderes als D, nämlich die Determinante der n^2 ursprünglichen Koeffizienten. Sieht man sich nun die Glieder, die beispielsweise x_2 als Faktor enthalten, an, so lassen sie sich zu

$$a_{12} D_{11} + a_{22} D_{21} + a_{32} D_{31} + \cdots + a_{n2} D_{n1}$$

zusammenfassen. Dieser Ausdruck verschwindet aber nach (5′). Da genau dasselbe für die Glieder mit $x_3, x_4, \ldots, x_n$ gilt, so haben wir tatsächlich durch die angegebene Operation eine Gleichung gewonnen, die nur die eine Unbekannte x_1 aufweist, und zwar mit dem Koeffizienten D. Zufolge (7) erhalten wir also die Lösung

$$(8) \qquad x_1 = \frac{y_1 D_{11} + y_2 D_{21} + y_3 D_{31} + \cdots + y_n D_{n1}}{D},$$

was in der Tat der Form nach mit (3) übereinstimmt: Wenn die Determinante D des Gleichungssystems (1) nicht verschwindet, gibt es eine und nur eine Lösung; sie hat die Gestalt (3) mit

$$A_{rs} = \frac{D_{rs}}{D}, \tag{8'}$$

wo D_{rs} die a_{rs} „zugeordnete", durch (6) festgelegte Unterdeterminante bezeichnet. Sind die rechten Seiten y_i in (1) alle gleich Null, so gibt es (bei $D \neq 0$) nur die „triviale Lösung" $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Die in (8) oder (3) mit (8') zum Ausdruck kommende Lösung von (1) wird oft als „Cramersche Regel" in folgendem Satz ausgesprochen: Man ersetze die Elemente der ersten, zweiten, ... n-ten Spalte von (4) durch die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und bilde jedesmal die entsprechende Determinante aus den n^2 Elementen; sie heiße D_1 bzw. $D_2, D_3, \ldots, D_n$. Dann ist $x_1 = D_1 : D$, $x_2 = D_2 : D, \ldots$, $x_n = D_n : D$. Daß dies richtig ist, folgt einfach daraus, daß unser Ausdruck (7) gerade die jetzt definierte Determinante D_1 ist usf.

Den Fall $D = 0$ (verschwindende Determinante eines Gleichungssystems) werden wir erst vollständig erledigen können, nachdem wir noch vorher einige Hilfsbegriffe eingeführt haben. Sind die Gleichungen homogen, so liefert für $D = 0$ die Cramersche Regel die Lösung in der unbestimmten Form $0:0$.

4. Lineare Formen oder Vektorgebilde. Es sind drei einfache Begriffe, die wir zur Behandlung beliebiger linearer Gleichungssysteme brauchen: der Begriff des linearen Vektorgebildes, der der linearen Unabhängigkeit von Vektoren und der des „Ranges" oder der Dimension eines Vektorgebildes.

Es seien zunächst $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ m Vektoren des n-dimensionalen Raumes, gegeben durch ihre mn Komponenten, die wir etwa in der Form

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n} & (\text{Komponenten von } \mathfrak{a}_1) \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2n} & (\quad\text{"}\quad\quad\text{"}\quad \mathfrak{a}_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \cdots a_{mn} & (\quad\text{"}\quad\quad\text{"}\quad \mathfrak{a}_m) \end{array}\right. \tag{9}$$

anschreiben. Ein solches Schema von mn in Zeilen und Spalten geordneten Zahlen nennen wir auch eine „Matrix". Bezeichnen jetzt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ beliebige m Zahlen, so nennen wir die Gesamtheit aller Vektoren, die sich in der Form

$$\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m \tag{10}$$

darstellen lassen, ein „lineares Vektorgebilde“. Unter Vermeidung der geometrischen Ausdrucksweise nennt man die n Komponenten von (10), also $\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1}$, $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2}$ usf., ein „System von n linearen Formen“.

Eine Gruppe von p Vektoren $\mathfrak{a}$ heißt „linear unabhängig“, wenn es keine p Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ gibt (abgesehen von $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$), für die die Gleichung $\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_p \mathfrak{a}_p = 0$ besteht. Gehört ein Vektor $\mathfrak{b}$ dem Vektorgebilde (10) an, so ist die Gruppe der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}$ sicher nicht linear unabhängig.

Ein und dasselbe lineare Vektorgebilde kann in mehrfacher Weise durch m Vektoren festgelegt werden; z. B. ist das Vektorgebilde (10) identisch mit dem durch $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_m$ festgelegten Gebilde

$$\lambda_1 (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + \lambda_2 (\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2) + \lambda_3 \mathfrak{a}_3 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m.$$

Besteht zwischen den m Vektoren von (10) eine lineare Abhängigkeit, so läßt sich die Zahl der das Gebilde „erzeugenden“ Vektoren sicher erniedrigen. Denn man kann etwa $\mathfrak{a}_m$ linear durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{m-1}$ ausdrücken und dies in (10) einführen, womit dann ein beliebiger Vektor $\mathfrak{b}$ des Gebildes als lineare Kombination von nur $m - 1$ Vektoren erscheint. Andererseits läßt sich die Zahl der Erzeugenden sicher nicht vermindern, wenn diese alle linear unabhängig sind. Denn m Vektoren, die sich durch $m - 1$ linear ausdrücken lassen, stehen notwendigerweise in linearer Abhängigkeit; die m ursprünglichen Erzeugenden des Vektorgebildes gehören aber diesem an und könnten somit nicht linear unabhängig sein, wenn sie sich durch $m - 1$ (oder weniger) darstellen ließen. Aus diesem Grunde sieht man auch ein, daß im n-dimensionalen Raume zwischen mehr als n Vektoren immer eine lineare Abhängigkeit bestehen muß. Denn jeder Vektor läßt sich durch das System der n „Einheitsvektoren“ 1, 0, 0, ..., 0; 0, 1, 0, ..., 0; 0, 0, 1, ..., 0; ...; 0, 0, 0, ..., 1 linear darstellen.

Unter „Rang“ oder „Dimension eines Vektorgebildes“ versteht man die kleinste Zahl von (linear unabhängigen) Vektoren, durch die sich das Gebilde in der Form (10) darstellen läßt. Der Rang kann unmöglich größer sein als die Dimensionszahl n des gesamten Raumes; ist er gleich n, so gehören dem betrachteten Vektorgebilde alle Vektoren des Raumes an. Im dreidimensionalen Raume bilden die Vektoren, die einer Ebene parallel sind und sich in der Form $\lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b}$ darstellen lassen, ein Gebilde vom Rang 2, die Vektoren, die einer Geraden parallel sind und die Form $\lambda \mathfrak{a}$ haben, ein Gebilde vom Rang 1.

Die eben abgeleiteten Begriffe stehen in engem Zusammenhang mit dem früher erörterten Determinantenbegriff. Wir wollen wieder die

Matrix (9), d. h. die je n Komponenten von m Vektoren, ins Auge fassen und dabei voraussetzen, daß $m \leqq n$ sei. Aus dieser Matrix lassen sich in vielfacher Weise Determinanten von erster bis m-ter Ordnung derart bilden, daß man eine entsprechende Anzahl von Zeilen und Spalten willkürlich auswählt. Besteht nun zwischen den m Vektoren eine lineare Abhängigkeit, so kann man einen von ihnen, z. B. $\mathfrak{a}_1$, linear durch die anderen ausdrücken, d. h. es ist $\mathfrak{a}_1 = \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m$. Subtrahiert man also von der ersten Zeile der Matrix (9) das λ_2-fache der zweiten, das λ_3-fache der dritten usf., so erhält man eine Zeile von lauter Nullen und erkennt: jede aus der Matrix gebildete Determinante m-ter Ordnung verschwindet. Umgekehrt gilt aber auch der sehr wichtige Satz: Wenn zwischen den m Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ keine lineare Abhängigkeit besteht, können unmöglich alle Determinanten m-ter Ordnung, die aus der Matrix (9) (durch Weglassen von irgendwelchen $n - m$ Spalten) gebildet werden, verschwinden. Für $m = 2$ ist das unmittelbar klar; denn hier bedeutet das Nullwerden der zweireihigen Determinanten wie $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$, daß $a_{11} : a_{21} = a_{12} : a_{22}$, d. h. daß das Verhältnis je zweier untereinanderstehender Größen immer dasselbe, daß also $\mathfrak{a}_2 = \lambda \mathfrak{a}_1$ ist. Hat man aber den Satz für irgendein $m - 1$, so gilt er auch für m, wie folgende Überlegung zeigt. Aus der linearen Unabhängigkeit der m gegebenen Vektoren folgt zunächst die von $m - 1$ unter ihnen. Wir dürfen annehmen, die Komponenten seien so angeordnet, daß die aus den ersten $m - 1$ Spalten (und $m - 1$ Zeilen) gebildete Determinante von Null verschieden ist. Betrachten wir jetzt von allen Vektoren einen Augenblick lang nur die ersten $m - 1$ Komponenten, so ist der m-te Vektor sicher durch die $m - 1$ früheren linear darstellbar [weil wir uns ja dabei in einem $(m - 1)$-dimensionalen Raum bewegen], d. h. man kann durch Subtrahieren entsprechender Multipla der ersten $m - 1$ Zeilen von der letzten in dieser an den ersten $m - 1$ Stellen Nullen herstellen. Da aber im ganzen n-dimensionalen Raume $\mathfrak{a}_m$ nicht linear abhängig sein soll von den $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_{m-1}$, muß bei dieser Operation irgendwo, z. B. an p-ter Stelle ($p > m - 1$), in der letzten Zeile ein von Null verschiedenes Element a' übriggeblieben sein. Nimmt man nun zu den $m - 1$ ersten Spalten diese p-te hinzu, so entsteht eine Determinante gleich dem a'-fachen der Determinante aus den ersten $m - 1$ Zeilen und Spalten, also sicher eine von Null verschiedene.

Dieser Zusammenhang zwischen linearer Abhängigkeit und Verschwinden von Determinanten erlaubt uns, den Begriff des Ranges eines Vektorgebildes als eine Eigenschaft der Matrix aus seinen mn Komponenten auszusprechen: Die Matrix (9) ist vom Range r, wenn sämtliche aus ihren Zeilen und Spalten gebildeten Determi-

nanten höherer als r-ter Ordnung verschwinden, aber mindestens eine Determinante r-ter Ordnung von Null verschieden ist. Der Rang der Matrix stimmt mit dem Rang des Vektorgebildes, dessen Komponenten sie darstellt, überein.

Man kann hieraus eine oftmals wichtige Folgerung ziehen. Wenn man neben den m Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ des n-dimensionalen Raumes die n Vektoren des m-dimensionalen Raumes betrachtet, deren Komponenten die Zahlen $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}; a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}; \ldots; a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ sind, so hat das aus diesen gebildete Vektorgebilde denselben Rang wie das zuerst betrachtete.

5. Beliebige lineare Gleichungen. Wir betrachten zuerst homogene Gleichungen, d. h. solche, deren rechte Seiten Null sind:

$$(11)\qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0. \end{cases}$$

Die Zahl m der Gleichungen braucht mit der Zahl n der Unbekannten nicht übereinzustimmen. Wir suchen alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oder alle n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{x}$, die sämtlichen Gleichungen (11) genügen. Es kommt dabei, wie wir gleich sehen werden, wesentlich auf den Rang r der aus den $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ bestehenden Matrix an, den wir auch den Rang des Gleichungssystems (11) nennen. Wir können $r > 0$ und höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen n und m voraussetzen.

Ist $r < m$, so kann man die Gleichungen jedenfalls so anordnen, daß unter den aus den ersten r Zeilen der $a_{\iota\varkappa}$ gebildeten Determinanten r-ter Ordnung eine nicht verschwindet. Es sind also die ersten r unter den Vektoren voneinander unabhängig, die übrigen $m - r$ sind lineare Kombinationen der ersteren. Man sieht, daß jedes Wertsystem, das die ersten r Gleichungen befriedigt, auch den weiteren $m - r$ genügt, weil eine homogene lineare Kombination von lauter Nullen auch wieder Null ergibt. Daraus folgt der Satz: Ist r der Rang des Gleichungssystems (11), so kann man sich bei Bestimmung der Lösung auf r unabhängige Gleichungen des Systems (nämlich solche, in deren Matrix eine nicht verschwindende r-reihige Determinante auftritt) beschränken.

Ist der Rang r eines homogenen Gleichungssystems gleich der Zahl n der Unbekannten, so gibt es (nach Weglassung der überflüssigen $m - r$ Gleichungen) nur eine r-reihige Determinante, nämlich die aus sämtlichen $a_{\iota\varkappa}$, und da diese nicht verschwindet, darf man die Cramersche Regel anwenden, die (wegen $\mathfrak{y} = 0$) zu $\mathfrak{x} = 0$ führt: Ein homo-

genes Gleichungssystem, dessen Rang gleich der Anzahl der Unbekannten ist, hat **nur** die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ist $r < n$, so denken wir uns die Unbekannten so angeordnet, daß die aus den **ersten** r Reihen gebildete Determinante von Null verschieden ist. Nimmt man dann für $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ **beliebige** Werte an, so kann man auf das Gleichungssystem

$$(12)\quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1r} x_r = -(a_{1,r+1} x_{r+1} + a_{1,r+2} x_{r+2} + \cdots + a_{1n} x_n) \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2r} x_r = -(a_{2,r+1} x_{r+1} + a_{2,r+2} x_{r+2} + \cdots + a_{2n} x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rr} x_r = -(a_{r,r+1} x_{r+1} + a_{r,r+2} x_{r+2} + \cdots + a_{rn} x_n) \end{cases}$$

die **Cramer**sche Regel anwenden und erhält damit (vgl. auch die allgemeine in 1 dargelegte Form der Lösung) für jedes der $x_1, x_2, \ldots, x_r$ einen linear homogenen Ausdruck in $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Bezeichnen wir mit D' die Determinante r-ter Ordnung der in (12) links stehenden Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$, mit $D'_{11}, D'_{12}, \ldots, D'_{1,n-r}$ die Determinanten, die aus D' hervorgehen, wenn man deren erste Spalte durch die erste, zweite, ..., letzte der rechts stehenden Spalten ersetzt, analog mit $D'_{21}, D'_{22}, \ldots, D'_{2,n-r}$, dann $D'_{31}, D'_{32}, \ldots, D'_{3,n-r}$, endlich $D'_{r1}, D'_{r2}, \ldots, D'_{r,n-r}$ die Determinanten, in denen die zweite, dritte, ..., letzte der Spalten links in (12) durch eine der rechts stehenden ersetzt wird, so lautet die Lösung von (12):

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{D'_{11}}{D'} x_{r+1} - \dfrac{D'_{12}}{D'} x_{r+2} - \cdots - \dfrac{D'_{1,n-r}}{D'} x_n \\ x_2 = -\dfrac{D'_{21}}{D'} x_{r+1} - \dfrac{D'_{22}}{D'} x_{r+2} - \cdots - \dfrac{D'_{2,n-r}}{D'} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = -\dfrac{D'_{r1}}{D'} x_{r+1} - \dfrac{D'_{r2}}{D'} x_{r+2} - \cdots - \dfrac{D'_{r,n-r}}{D'} x_n. \end{cases}$$

Dieses Ergebnis kann man auch in der Form schreiben:

$$(13')\quad \mathfrak{x} = \lambda_1 \mathfrak{b}_1 + \lambda_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \mathfrak{b}_{n-r},$$

wenn mit $\mathfrak{b}_1$ ein Vektor bezeichnet wird, dessen erste r Komponenten die Zahlen $-D'_{11} : D', -D'_{21} : D', \cdots, -D'_{r1} : D'$ sind, dessen $(r+1)$-te Komponente den Wert 1, dessen übrige Komponenten den Wert Null haben usf., während $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ ganz beliebige Zahlen sind: **Die Gesamtheit der Lösungen eines homogenen Gleichungssystems vom Range r mit n Unbekannten besteht aus einem Vektorgebilde vom Range $n-r$**, dessen Erzeugende durch (13) gegeben werden.

Hervorhebenswert ist auch noch folgende Formulierung, die von der Verwendung des Rangbegriffs frei ist: **Damit ein homogenes**

ngssystem eine Lösung außer der trivialen besitzt, ndig und hinreichend, daß die Determinante des gssystems verschwindet; die Lösung ist dann und nur uf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor eindeutig, aus den Koeffizienten des Gleichungssystems mindestens nicht verschwindende $(n-1)$-reihige Determinante läßt. Dies ist nur die spezielle Folgerung für den Fall $n-1$. Man kann hier die Lösung sofort finden, indem man .. 1 unabhängige Gleichungen auswählt und aus der Matrix von $n-1$ Zeilen und n Spalten alle jene Determinanten bildet, die durch Weglassen je einer Spalte entstehen. Sei D_s die durch Streichung der s-ten Spalte entstandene, so ist $x_1 = \lambda D_1$, $x_2 = -\lambda D_2, \ldots$, $x_n = (-1)^{n-1}\lambda D_n$ bei beliebigem λ die allgemeine Lösung.

Es ist nun auch nicht schwer, den Fall beliebiger nichthomogener Gleichungen zu erledigen. Wenn es Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt, die das System (11) mit auf den rechten Seiten stehenden $y_1, y_2, \ldots, y_m$ befriedigen, so heißt dies, daß der Vektor $\mathfrak{y}$ eine lineare Kombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_n'$ ist, deren Komponenten

$$(14)\qquad \begin{cases} a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1} & (\text{von } \mathfrak{a}_1') \\ a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{m2} & (\text{von } \mathfrak{a}_2') \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{mn} & (\text{von } \mathfrak{a}_n') \end{cases}$$

sind. Der Vektor $\mathfrak{y}$ gehört also dem durch $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_n'$ bestimmten Vektorgebilde an, dessen Rang nach der Schlußbemerkung in **4** gleich dem Range des Vektorgebildes $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, also gleich dem Range r des Gleichungssystems ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des inhomogen gemachten Gleichungssystems (11) ist die, daß durch Hinzufügen des Vektors $\mathfrak{y}$ zu den Vektoren $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_n'$ der Rang des Vektorgebildes nicht erhöht wird. Hat das System einen Rang m gleich der Zahl der Gleichungen, so kann eine Erhöhung gar nicht eintreten, d. h. die Aufgabe ist sicher lösbar. Aus dem in **1** erörterten Zusammenhang zwischen den Lösungen des homogenen und des nichthomogenen Problems folgt, daß die letztere nur dann eindeutig sein kann, wenn der Rang des Gleichungssystems gleich der Zahl n der Unbekannten ist, d. h. wenn n voneinander unabhängige Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante vorhanden sind.

Die Lösung des nichthomogenen Systems findet man in jedem Falle, indem man r Gleichungen und r Unbekannte so auswählt, daß die zugehörige Koeffizientendeterminante r-ter Ordnung nicht verschwindet, dann unter Nullsetzen der übrigen $n-r$ Unbekannten

und Außerachtlassen der übrigen $m - r$ Gleichungen die Cramersche Regel anwendet; zu der so gewonnenen partikulären Lösung ist dann die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit ihren $n - r$ willkürlichen Konstanten hinzuzufügen.

Für den Fall $n = m$, Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Gleichungen, folgt aus der Cramerschen Regel im Zusammenhang mit den hier gewonnenen Ergebnissen über homogene Gleichungen der wichtige — vom Determinantenbegriff freie — Satz, der die „Alternative“ heißt: n lineare Gleichungen mit n Unbekannten haben entweder für beliebige rechte Seiten eine eindeutige Lösung, insbesondere, wenn die rechten Seiten Null sind, nur die triviale; oder es besteht eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems, dann ist das nichthomogene nur für besondere rechte Seiten, und nicht eindeutig, lösbar. Der Bedingung, der die rechten Seiten genügen müssen ($\mathfrak{y}$ lineare Kombination der $\mathfrak{a}'$), werden wir im folgenden § 2, 1 einen anschaulichen Ausdruck geben.

§ 2. Das Hauptachsenproblem

Eine große Klasse von Aufgaben der mathematischen Physik — die gesamte Theorie der harmonischen Schwingungen — findet ihren analytischen Ausdruck in Überlegungen, die eine Erweiterung der einfachen Aufgabe aus der analytischen Geometrie: die Hauptachsen eines Ellipsoids zu finden, darstellen. Wir wollen daher diese Aufgabe, in entsprechend allgemeiner Form, im Anschluß an die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Begriffe hier behandeln.

1. Orthogonalität und Koordinatentransformation. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren des n-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$, so bezeichnen wir als ihr „skalares Produkt“ (und schreiben dafür $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$) die Größe

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Zwei Vektoren, deren skalares Produkt Null ist, nennen wir orthogonal oder senkrecht, einen Vektor, dessen skalares Produkt mit sich selbst gleich 1 ist, einen Einheitsvektor. Es gibt jedenfalls ein System von n paarweise zueinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren, nämlich:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 \text{ mit den Komponenten } & 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ \mathfrak{e}_2 \quad\text{„} \quad \text{„} \quad\quad \text{„} & 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ \mathfrak{e}_3 \quad\text{„} \quad \text{„} \quad\quad \text{„} & 0, 0, 1, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mathfrak{e}_n \quad\text{„} \quad \text{„} \quad\quad \text{„} & 0, 0, 0, \ldots, 1. \end{cases}$$

Aus der Definition des skalaren Produkts folgt, daß es dem kommutativen Gesetz, dem assoziativen mit der gewöhnlichen Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, endlich dem distributiven Gesetz genügt, d. h. daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $\lambda . \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$ gilt. (Vgl. dazu auch § 3, 1.)

Wir zeigen nun zunächst: Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_m$, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind niemals voneinander linear abhängig. Bestände nämlich eine Beziehung

$$\lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{v}_m = 0,$$

so könnte man durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}_1$, da $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_3 = \cdots = \mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_m = 0$ ist, die Gleichung $\lambda_1 \mathfrak{v}_1^2 = 0$ ableiten, die aber nur für $\lambda_1 = 0$ befriedigt wird; es müßten also sämtliche λ Null sein.

Unter Verwendung der jetzt eingeführten Bezeichnung können wir ein System homogener linearer Gleichungen [(11) in § 1] kurz so schreiben:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{x} = 0, \ldots, \mathfrak{a}_m\mathfrak{x} = 0, \tag{2}$$

d. h. die Aufgabe läuft darauf hinaus, die Vektoren $\mathfrak{x}$ zu finden, die zu m gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ senkrecht stehen. Man kann auch sagen, es würden die Vektoren gesucht, die auf jedem Vektor des durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ bestimmten linearen Vektorgebildes orthogonal sind; denn aus (2) folgt auch $(\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_m\mathfrak{a}_m)\mathfrak{x} = 0$. Das Ergebnis § 1, 5 (13') besagt nun: D i e G e s a m t h e i t d e r V e k t o r e n, d i e a u f d e n e n e i n e s V e k t o r g e b i l d e s v o m R a n g e r s e n k r e c h t s t e h e n, b i l d e t e i n V e k t o r g e b i l d e v o m R a n g e $n - r$. Auch die Lösbarkeitsbedingung nichthomogener Gleichungen findet jetzt einen einfachen Ausdruck. Daß der Vektor $\mathfrak{y}$ dem Vektorgebilde der $\mathfrak{a}_1' \ldots \mathfrak{a}_n'$ angehören soll, § 1, 5 (14), heißt ebensoviel wie: $\mathfrak{y}$ ist orthogonal zu allen Vektoren, die zu $\mathfrak{a}_1' \ldots \mathfrak{a}_n'$ orthogonal sind, also zu allen Lösungen des homogenen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix in § 1, (14) angeschrieben ist. Nennt man ein solches Gleichungssystem, dessen Matrix aus der des ursprünglichen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten hervorgeht, das dem ersteren „adjungierte", so folgt: D i e n o t w e n d i g e u n d h i n r e i c h e n d e B e d i n g u n g f ü r d i e L ö s b a r k e i t e i n e s n i c h t h o m o g e n e n G l e i c h u n g s s y s t e m s

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{x} = y_1, \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{x} = y_2, \ldots, \mathfrak{a}_m\mathfrak{x} = y_m \tag{2'}$$

b e s t e h t d a r i n, d a ß $\mathfrak{y}$ o r t h o g o n a l i s t z u a l l e n L ö s u n g e n d e s a d j u n g i e r t e n h o m o g e n e n G l e i c h u n g s s y s t e m s. Die Bedingung annulliert sich, wenn dieses letztere Gleichungssystem keine Lösungen besitzt, also seine Determinante (d. i. die der ursprünglichen Gleichungen) von Null verschieden ist.

Wir benutzen den hier neu formulierten Satz über die homogenen Gleichungen, um zu erkennen, daß es im n-dimensionalen Raume auf sehr vielfältige Weise möglich ist, Systeme von n paarweise aufeinander senkrechten Einheitsvektoren auszuwählen. Wir nehmen einen Einheitsvektor $\mathfrak{o}_1$ ganz beliebig an, dann gibt es ein $(n-1)$-dimensionales Gebilde, dessen sämtliche Vektoren zu $\mathfrak{o}_1$ orthogonal sind. Innerhalb dieses wählen wir ein $\mathfrak{o}_2$, worauf noch ein $(n-2)$-dimensionales Gebilde bleibt, das zu $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ orthogonal ist usf. Ein Beispiel für ein solches System von n Vektoren $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_n$ ist das in (1) angegebene System der $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$. Im allgemeinen seien die zeilenweise angeschriebenen Komponenten der $\mathfrak{o}$:

$$(3) \qquad \begin{cases} o_{11}, \; o_{12}, \; o_{13}, \; \ldots, \; o_{1n} \\ o_{21}, \; o_{22}, \; o_{23}, \; \ldots, \; o_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ o_{n1}, \; o_{n2}, \; o_{n3}, \; \ldots, \; o_{nn}. \end{cases}$$

In dieser Matrix ist definitionsgemäß die Quadratsumme jeder Zeile gleich 1, die Produktsumme zweier verschiedener Zeilen (das skalare Produkt der betreffenden $\mathfrak{o}$) gleich Null; sie besitzt aber noch weitere sehr wichtige Eigenschaften, die wir gleich ableiten wollen.

Machen wir die Matrix (3) zum Koeffizientenschema eines linearen Gleichungssystems, das wir kurz so schreiben:

$$(4) \qquad \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = 1, \quad \mathfrak{o}_2\mathfrak{x} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{o}_n\mathfrak{x} = 0,$$

so wird dieses jedenfalls durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}_1$ befriedigt. Die Determinante von (3) verschwindet sicher nicht, da aufeinander senkrecht stehende Vektoren linear unabhängig sind. Bezeichnen wir sie mit O, ferner mit O_{rs} die einem Element o_{rs} adjungierte Unterdeterminante, so ist nach der Cramerschen Regel die Lösung von (4) durch

$$x_1 = \frac{O_{11}}{O}, \quad x_2 = \frac{O_{12}}{O}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{O_{1n}}{O}$$

gegeben. Andererseits hatten wir eben gefunden, daß $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}_1$ ist, also haben wir

$$o_{11} = \frac{O_{11}}{O}, \quad o_{12} = \frac{O_{12}}{O}, \quad \ldots, \quad o_{1n} = \frac{O_{1n}}{O}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln folgt, daß die aus den Unterdeterminanten O_{ik} gebildete Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} O_{11} O_{12} \ldots O_{1n} \\ O_{21} O_{22} \ldots O_{2n} \\ \vdots \\ O_{n1} O_{n2} \ldots O_{nn} \end{vmatrix} = O^n \begin{vmatrix} o_{11} o_{12} \ldots o_{1n} \\ o_{21} o_{22} \ldots o_{2n} \\ \vdots \\ o_{n1} o_{n2} \ldots o_{nn} \end{vmatrix}$$

den Wert O^{n+1} besitzt. Andererseits ergibt sich unter Berücksichtigung von (5) und (5′) in § 1 aus dem Multiplikationssatz [§ 1, (6′) und (6″)] für Determinanten, daß

$$O\Omega = O^n$$

ist, d. h.

$$\Omega = O^{n-1}.$$

Aus diesen beiden Werten für Ω folgt $O^2 = 1$, d. h. $O = \pm 1$.

Wir wollen immer annehmen, das Vorzeichen des letzten der Vektoren $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_n$ sei so gewählt worden, daß das Pluszeichen zu Recht besteht. Dann folgt $o_{11} = O_{11}$, $o_{12} = O_{12}, \ldots, o_{1n} = O_{1n}$ und die gleiche Beziehung muß natürlich für die Elemente jeder anderen Zeile von (3) bestehen. Bildet man daher die Quadratsumme der Elemente der ersten Spalte $o_{11}^2 + o_{21}^2 + \cdots + o_{n1}^2 = o_{11}O_{11} + o_{21}O_{21} + \cdots + o_{n1}O_{n1}$, so lehrt der Entwicklungssatz der Determinanten [§ 1, (5)], daß sie den Wert $O = 1$ hat, während die Produktsumme der ersten und zweiten Spalte $o_{11}o_{12} + o_{21}o_{22} + \cdots + o_{n1}o_{n2} = o_{11}O_{12} + o_{21}O_{22} + \cdots + o_{n1}O_{n2}$ gleich dem Wert einer Determinante ist, die aus O hervorgeht, wenn man darin die zweite Spalte noch einmal durch die erste ersetzt, also gleich Null. So können wir die Eigenschaften der „orthogonalen Matrix“ (3) dahin zusammenfassen: Die Quadratsumme jeder Reihe (Zeile oder Spalte) ist 1, die Produktsumme paralleler Reihen 0, der Gesamtwert der Determinante 1, der Wert jeder Unterdeterminante gleich dem des Elements, dem sie zugeordnet ist. Es sind dieselben Eigenschaften, denen im dreidimensionalen Raume die Matrix der neun Richtungskosinus zwischen zwei rechtwinkligen Achsenkreuzen genügt.

Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Vektor, so nennen wir die skalaren Produkte $x_1' = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x}$, $x_2' = \mathfrak{o}_2\mathfrak{x}, \ldots, x_n' = \mathfrak{o}_n\mathfrak{x}$ die „Komponenten von $\mathfrak{x}$ in bezug auf das Orthogonalsystem oder Achsenkreuz (3)“. Definitionsgemäß hat man

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1' = \mathfrak{o}_1\mathfrak{x} = o_{11}x_1 + o_{12}x_2 + \cdots + o_{1n}x_n \\ x_2' = \mathfrak{o}_2\mathfrak{x} = o_{21}x_1 + o_{22}x_2 + \cdots + o_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = \mathfrak{o}_n\mathfrak{x} = o_{n1}x_1 + o_{n2}x_2 + \cdots + o_{nn}x_n, \end{cases}$$

während die Auflösung von (5) nach der Cramerschen Regel unter Berücksichtigung aller abgeleiteten Eigenschaften von (3) liefert:

$$(5')\qquad \begin{cases} x_1 = o_{11}x_1' + o_{21}x_2' + \cdots + o_{n1}x_n' \\ x_2 = o_{12}x_1' + o_{22}x_2' + \cdots + o_{n2}x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = o_{1n}x_1' + o_{2n}x_2' + \cdots + o_{nn}x_n'. \end{cases}$$

Die Gl. (5) und (5′) nennt man Koordinaten-Transformationsformeln. Man beweist mit ihrer Hilfe leicht, daß das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ sich auch als Produktsumme der Komponenten $x'y'$ ausdrückt:

$$(6)\begin{cases} x_1' y_1' + x_2' y_2' + \cdots + x_n' y_n' = x_1 y_1 (o_{11}^2 + o_{21}^2 + \cdots + o_{n1}^2) + \\ x_1 y_2 (o_{11} o_{12} + o_{21} o_{22} + \cdots + o_{n1} o_{n2}) + \cdots + x_n y_n (o_{1n}^2 + o_{2n}^2 \\ \qquad + \cdots + o_{nn}^2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathfrak{x}\mathfrak{y} \end{cases}$$

und analog das Quadrat einer „Vektorlänge" (skalares Produkt eines Vektors mit sich selbst) als Quadratsumme der Komponenten:

$$(6') \qquad x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \mathfrak{x}\mathfrak{x}.$$

2. Quadratische Form und lineare Transformation. Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung im dreidimensionalen Raume, bezogen auf ihren Mittelpunkt, lautet bekanntlich $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 = \text{konst.}$ Verallgemeinern wir dies auf den n-dimensionalen Raum, so erhalten wir die Gleichung

$$(7)\begin{cases} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 \\ \qquad + \cdots + 2 a_{n-1\,n} x_{n-1} x_n = \text{konst.} \end{cases}$$

Die linke Seite nennt man auch eine „quadratische Form" in den $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man kann sie einfacher schreiben und mit den bisher behandelten Begriffen in Beziehung bringen, indem man das lineare Gleichungssystem

$$(8)\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = y_n \end{cases}$$

mit der besonderen Maßgabe der Symmetrie

$$(9) \qquad a_{12} = a_{21}, \; a_{13} = a_{31}, \; \ldots, \; a_{rs} = a_{sr}, \; \ldots$$

einführt. Dann erscheint nämlich die linke Seite von (7) einfach als das skalare Produkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Wir wollen jetzt die früher schon erwähnte Auffassung festhalten, daß die Gl. (8) eine Zuordnung von Vektoren $\mathfrak{y}$ zu den Vektoren $\mathfrak{x}$, oder noch besser eine „lineare Transformation" der sämtlichen Vektoren $\mathfrak{x}$ in die Vektoren $\mathfrak{y}$ bedeutet. Für (8) schreiben wir kürzer

$$(8') \qquad \mathfrak{y} = x_1 \mathfrak{a}_1 + x_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + x_n \mathfrak{a}_n,$$

wo $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ die Vektoren bezeichnen, deren Komponenten in dem Schema (8) spaltenweise und — zufolge der Symmetriebedingung (9) — auch zeilenweise angeordnet erscheinen. Als noch kürzere, symbolische Schreibweise für (8) oder (8′) verwenden wir

$$(8'') \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x},$$

wo also $\mathfrak{A}$ ein Symbol für die gesamte, durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bestimmte, an $\mathfrak{x}$ vorzunehmende Operation ist. Die Gleichung der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung lautet dann:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x})\mathfrak{x} = \text{konst}, \tag{7'}$$

d. h. es sind alle Vektoren zu nehmen, *deren skalares Produkt mit ihren Transformierten einen festen Wert hat.*

Sind $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zwei beliebige Vektoren, so beweist man auf Grund der Symmetriebedingung (9) leicht den Satz:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_2)\mathfrak{x}_1, \tag{10}$$

in Worten: *das skalare Produkt eines Vektors* $\mathfrak{x}_1$ *mit dem Transformierten von* $\mathfrak{x}_2$ *ist gleich dem skalaren Produkt des Vektors* $\mathfrak{x}_2$ *mit dem Transformierten von* $\mathfrak{x}_1$. Denn auf der linken Seite von (10) liefert die Ausführung des skalaren Produktes und Einsetzung von (8) eine Produktsumme von Komponenten der beiden gegebenen Vektoren, wobei das Produkt der r-ten Komponente von $\mathfrak{x}_1$ und der s-ten Komponente von $\mathfrak{x}_2$ den Koeffizienten a_{sr} erhält; auf der rechten Seite hat dasselbe Glied den Koeffizienten a_{rs}, also sind zufolge (9) beide Seiten einander gleich.

Die im Eingang dieses Paragraphen angedeutete Aufgabe geht dahin, ein besonderes Achsenkreuz zu finden, für das die Gleichung der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung eine besonders einfache Gestalt gewinnt. Nachdem wir nun die Flächengleichung auf die Gleichungen einer linearen Transformation zurückgeführt haben, müssen wir nachsehen, wie *diese* sich bei Veränderung des Bezugssystems verhalten. Denken wir uns in (8) für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werte aus den Transformationsformeln (5′) eingeführt und dann entsprechend (5) die Komponenten $y_1' = \mathfrak{y}\mathfrak{o}_1, y_2' = \mathfrak{y}\mathfrak{o}_2, \ldots, y_n' = \mathfrak{y}\mathfrak{o}_n$ gebildet, so erhalten wir jedenfalls für die y' linear homogene Ausdrücke in den x':

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}' x_1' + a_{12}' x_2' + \cdots + a_{1n}' x_n' \\ y_2' = a_{21}' x_1' + a_{22}' x_2' + \cdots + a_{2n}' x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}' x_1' + a_{n2}' x_2' + \cdots + a_{nn}' x_n'. \end{array}\right. \tag{11}$$

Die Frage ist, was sich über diese a_{rs}', die durch die früheren a_{rs} bestimmt werden, aussagen läßt.

Wendet man die Gl. (11) auf den Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}_1$ an, für den $x_1' = 1$, alle anderen x' gleich Null sind, so sieht man, daß der Transformierte von $\mathfrak{o}_1$ die erste Spalte des Koeffizientenschemas (11) zu Komponenten bezüglich des neuen Achsenkreuzes hat. Zum Beispiel ist die zweite Komponente, d. h. das skalare Produkt des Transformierten von $\mathfrak{o}_1$ mit $\mathfrak{o}_2$, gleich a_{21}', also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{o}_1)\mathfrak{o}_2 = a_{21}'.$$

Andererseits findet man durch Anwendung von (11) auf $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}_2$ und Aufsuchung der ersten Komponente des Transformierten:

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{o}_2)\,\mathfrak{o}_1 = a'_{12}.$$

Aus (10) folgt demnach $a'_{21} = a'_{12}$ usf. oder in Worten: Die Eigenschaft, symmetrisch zu sein, bleibt dem Schema einer linearen Transformation bei Übergang zu einem anderen orthogonalen Achsenkreuz erhalten. Dieser Satz bildet die Grundlage für die im folgenden auszuführende Lösung der eingangs gestellten Aufgabe.

3. Die Säkulargleichung. Wir fragen zunächst: Gibt es, wenn eine lineare Transformation der Form (8) mit symmetrischer Matrix vorgeschrieben ist, Vektoren $\mathfrak{x}$, deren Transformierte $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{x}$ parallel sind? Setzt man in (8) $\mathfrak{y} = \lambda'\mathfrak{x}$, also $y_1 = \lambda' x_1$, $y_2 = \lambda' x_2, \ldots, y_n = \lambda' x_n$, so entsteht ein System von n homogenen Gleichungen mit n Unbekannten, das nach § 1, 5 nur dann eine Lösung außer der trivialen besitzt, wenn seine Determinante verschwindet:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda' & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda' & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda' & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-\lambda' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung n-ten Grades in λ' heißt die „charakteristische Gleichung" der quadratischen Form (7) oder der linearen Transformation (8) oder die „Säkulargleichung" [1], nach ihrer Bedeutung in der Physik auch die „Frequenzgleichung". Zufolge des Fundamentalsatzes der Algebra (III, § 4, **1**) hat sie n Wurzeln, die von vornherein nicht notwendig reell und nicht notwendig untereinander verschieden sein müssen. Führt man irgendeinen Wurzelwert, etwa $\lambda' = \lambda'_1$ in die Gl. (8) ein, indem man auf deren rechte Seiten $\lambda'_1 x_1, \lambda'_1 x_2, \ldots, \lambda'_1 x_n$ setzt, so muß man mindestens einen (bis auf seine Länge bestimmten) Vektor $\mathfrak{x}$ erhalten, dessen Richtung bei der Transformation ungeändert bleibt; wenn λ'_1 komplex ist, wird auch der zugehörige Vektor $\mathfrak{x}$ nicht reell sein können.

Es lassen sich nun aus der Symmetrie der Matrix von (8), oder der Symmetrie von (12), zwei entscheidende Schlüsse ziehen. Seien λ'_1 und λ'_2 zwei verschiedene Wurzelwerte von (12) und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ zugehörige Vektoren, die den Gl. (8) mit $\mathfrak{y}_1 = \lambda'_1\mathfrak{x}_1$, bzw. $\mathfrak{y}_2 = \lambda'_2\mathfrak{x}_2$ genügen, also kurz geschrieben:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_1 = \lambda'_1\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2 = \lambda'_2\mathfrak{x}_2.$$

[1]) Weil sie in der theoretischen Astronomie bei Berechnung der Frequenz sogenannter säkularer Störungen auftritt.

Dann folgt, indem man die erste Gleichung skalar mit $\mathfrak{x}_2$, die zweite mit $\mathfrak{x}_1$ multipliziert und eine von der anderen subtrahiert:

$$(13) \qquad (\lambda_1' - \lambda_2')\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{x}_2)\mathfrak{x}_1 = 0$$

zufolge der oben abgeleiteten Vertauschbarkeits-Beziehung (10). Da $\lambda_1' \neq \lambda_2'$ vorausgesetzt war, haben wir bewiesen, daß $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0$ ist: Zwei Vektoren, deren Richtungen erhalten bleiben, stehen senkrecht aufeinander, wenn sie zu verschiedenen Wurzelwerten der Säkulargleichung gehören. Aus (13) kann man aber auch schließen, daß nicht-reelle Wurzelwerte bei der Säkulargleichung ausgeschlossen sind. Denn solche können bei einer Gleichung mit reellen Koeffizienten immer nur paarweise auftreten, etwa so, daß $\lambda_1' = \alpha + i\beta$, $\lambda_2' = \alpha - i\beta$ ist. Die zu solchen Wurzeln gehörigen Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ müssen auch konjugiert-komplexe Komponenten besitzen, d. h. wenn die von $\mathfrak{x}_1$ etwa $u_1 + iv_1$, $u_2 + iv_2, \ldots, u_n + iv_n$ lauten, sind die von $\mathfrak{x}_2$ notwendig $u_1 - iv_1$, $u_2 - iv_2, \ldots, u_n - iv_n$. Das aus diesen Komponenten gebildete skalare Produkt ist aber eine stets positive Größe, nämlich $u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + \cdots + u_n^2 + v_n^2$; demnach liefert (13) jetzt $\lambda_1' = \lambda_2'$, also $\beta = 0$: Die Säkulargleichung kann nur reelle Wurzeln haben.

Der Wert $\lambda' = 0$ kann, wie (12) zeigt, nur dann eine Wurzel sein, wenn die Determinante des Gleichungssystems (8), oder wie man auch sagt, die „Diskriminante der quadratischen Form" (7) verschwindet. Wir können daher folgenden Satz aussprechen, der mit gewissen Einschränkungen schon die Lösung unserer Aufgabe enthält: Ist die Diskriminante der quadratischen Form, nämlich die aus ihren Koeffizienten gebildete Determinante, nicht Null und sind alle n Wurzeln der Säkulargleichung $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ untereinander verschieden, so gibt es ein und nur ein Achsenkreuz, dessen n zueinander paarweise orthogonale Richtungen bei der Transformation (8) erhalten bleiben; sind x_ι', y_ι' die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ für dieses Koordinatensystem, so lauten die Transformationsgleichungen, die mit (8) gleichbedeutend sind, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die reziproken Werte der $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ bedeuten:

$$(14) \qquad x_1' = \lambda_1 y_1', \quad x_2' = \lambda_2 y_2', \quad \ldots, \quad x_n' = \lambda_n y_n',$$

so daß die quadratische Form (7), bzw. die Gleichung der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung im neuen Achsenkreuz als eine Summe von n Quadraten erscheint:

$$(15) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \frac{x_1'^2}{\lambda_1} + \frac{x_2'^2}{\lambda_2} + \frac{x_3'^2}{\lambda_3} + \cdots + \frac{x_n'^2}{\lambda_n} = \text{konst.}$$

Die so bestimmten n Achsen nennt man die **Hauptachsen** der quadratischen Form oder der Fläche zweiter Ordnung. Die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in (14) und (15) sind die reziproken Werte der Wurzeln der Säkulargleichung.

Sind die Wurzeln von (12) nicht alle verschieden, so läßt sich unser Satz, abgesehen von der Eindeutigkeit des Hauptachsenkreuzes, noch aufrechterhalten. Haben wir nämlich einen Wurzelwert λ_1' und eine zugehörige Richtung $\mathfrak{o}_1$ gefunden, die sich bei der Transformation nicht ändert, so können wir ein Koordinatensystem wählen, in dem $\mathfrak{o}_1$ die erste Achsenrichtung bildet, während die anderen noch beliebig sind. Unterwirft man einen Vektor in dieser Achsenrichtung der Transformation, so geht er in einen Vektor der gleichen Richtung über. Es sind daher die Größen $a'_{21} = a'_{31} = \cdots = a'_{n1} = 0$ in den Transformationsgleichungen, und ebenso gilt wegen der Symmetrie $a'_{12} = a'_{13} = \cdots = a'_{1n} = 0$. Die erste Transformationsgleichung lautet daher $x'_1 = \lambda_1 y'_1$, und die übrigen Transformationsgleichungen enthalten die Komponente x'_1 gar nicht und stellen somit eine lineare, symmetrische Transformation eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes dar, nämlich des Vektorgebildes, das durch die $n-1$ zu $\mathfrak{o}_1$ senkrechten Einheitsvektoren des neuen Achsenkreuzes bestimmt wird. Auf diese Transformation wenden wir die gleiche Überlegung an, nehmen einen Wurzelwert λ_2' der charakteristischen Gleichung (der mit λ_1' übereinstimmen kann) und eine zugehörige Richtung $\mathfrak{o}_2$, die auf $\mathfrak{o}_1$ deshalb senkrecht stehen muß, weil alle Vektoren des jetzt betrachteten $(n-1)$-dimensionalen Vektorgebildes auf $\mathfrak{o}_1$ senkrecht stehen. So fährt man fort und erhält schließlich ein n-achsiges Koordinatensystem, in dem die Transformationsgleichungen die Gestalt (14) haben. Ist aber $\lambda_1' = \lambda_2'$, so sind $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ zwei linear unabhängige Lösungen desselben linearen, homogenen Gleichungssystems $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda_1'\mathfrak{x}$, es ist somit auch jede lineare Kombination von $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ eine Lösung, d. h. es gibt unendlich viele zu diesem Wurzelwert λ_1 gehörige Richtungen, die bei der Transformation ungeändert bleiben. Im allgemeinen sieht man daraus: Die Matrix auf der linken Seite von (12) hat den Rang $n-r$, sobald für λ' ein r-facher Wurzelwert der Gleichung (12) eingesetzt wird. Denn es gibt, sobald ein λ'-Wert r-mal bei dem früher beschriebenen Reduktionsverfahren auftritt, r zueinander senkrechte, also linear unabhängige Lösungen derjenigen linearen Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante die linke Seite von (12) darstellt.

Der eben ausgesprochene Satz kann auch für $\lambda' = 0$ nicht aufhören zu gelten. Ist $\lambda' = 0$ ein r-facher Wurzelwert der Säkulargleichung, so hat die Diskriminante [die aus der linken Seite von (12) durch Weglassen von λ' entsteht] den Rang $n-r$. Daß auch die Umkehrung

richtig ist, sieht man ein, wenn man sich (12) nach Potenzen von λ' entwickelt denkt. Das λ'-freie Glied ist die Diskriminante selbst, das Glied mit λ' enthält eine Summe von n Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung als Koeffizienten, das Glied mit λ'^2 eine Summe von Determinanten $(n-2)$-ter Ordnung usf. Ist also der Rang der Matrix von (8) $n-r$, so verschwinden in der nach λ' entwickelten Säkulargleichung die Glieder von niederer Ordnung als λ'^r, w. z. b. w. Wie sieht aber jetzt die auf Hauptachsen transformierte quadratische Form aus? Wenn wir das früher beschriebene Reduktionsverfahren ausführen, so können wir jedenfalls $n-r$ zueinander paarweise orthogonale Richtungen festlegen, so daß die ersten $n-r$ Transformationsgleichungen

$$(16) \qquad x_1' = \lambda_1 y_1', \quad x_2' = \lambda_2 y_2', \quad \ldots, \quad x_{n-r}' = \lambda_{n-r} y_{n-r}'$$

lauten, wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \neq 0$, aber nicht notwendig untereinander verschieden sind. Die weiteren Transformationsgleichungen können nur noch Gleichungen zwischen je r Komponenten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sein. Da aber jetzt $\lambda' = 0$ eine r-fache Wurzel der zugehörigen Säkulargleichung r-ter Ordnung ist, hat die Diskriminante der quadratischen Form von r Veränderlichen den Rang $r - r = 0$, d. h. alle Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}'$, deren Indizes höher als $n-r$ sind, verschwinden, und es ist $y_{n-r+1}' = y_{n-r+2}' = \cdots = y_n' = 0$. Somit braucht man bei der Berechnung von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, nämlich der linken Seite von (7), nur die in (16) auftretenden ersten $n-r$ Komponenten zu berücksichtigen:

$$(17) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \frac{x_1'^2}{\lambda_1} + \frac{x_2'^2}{\lambda_2} + \frac{x_3'^2}{\lambda_3} + \cdots + \frac{x_{n-r}'^2}{\lambda_{n-r}} = \text{konst.}$$

Wir können die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen: Es gibt zu einer beliebigen quadratischen Form von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mindestens ein Achsenkreuz, auf das transformiert die Form als eine Summe von $n-r$ quadratischen Gliedern in $x_1', x_2', \ldots, x_{n-r}'$ erscheint; die Koeffizienten dieser Glieder sind die von Null verschiedenen Wurzeln der Säkulargleichung; sind alle Wurzelwerte untereinander verschieden, so ist dieses Hauptachsenkreuz eindeutig bestimmt, tritt ein Wurzelwert p-mal auf, so kann jede Richtung, die dem von den p Achsen erzeugten linearen Vektorgebilde angehört, als Hauptachse gelten; die Zahl $n-r$ der nicht verschwindenden Wurzeln ist gleich dem Range der Diskriminante.

Häufig hat man es in den Anwendungen mit quadratischen Formen zu tun, von denen von vornherein bekannt ist, daß sie für alle Wertverbindungen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (außer natürlich für $\mathfrak{x} = 0$) nur positive Werte annehmen können; man nennt solche

Formen positiv definit. Aus unseren Überlegungen geht hervor, daß die Wurzeln der Säkulargleichung einer positiv definiten Form sämtlich positiv sein müssen; denn beispielsweise $\lambda_1 < 0$ würde bedeuten, daß die Form für $x_1' = 1,\ x_2' = x_3' = \cdots = x_n' = 0$ negativ wird, und das r-fache Auftreten des Wurzelwertes Null würde die Form für $x_1' = x_2' = \cdots = x_{n-r}' = 0,\ x_n' = 1$ zu Null machen.

4. Anwendungen. Der geometrische Ausdruck der eben abgeleiteten Sätze ist die Lösung des sogenannten Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung. Wir besprechen dieses nur so weit, als es zu einer Veranschaulichung und zu einem besseren Verständnis der analytischen Ergebnisse führt. Ist die Diskriminante der durch die Flächengleichung bestimmten Form ungleich Null, so gibt es, wie wir jetzt wissen, ein Koordinatensystem, in dem die Gleichung der Fläche nur die n Quadrate der Koordinaten mit bestimmten Zahlenkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ enthält. Die neuen Koordinatenebenen sind daher durchweg Symmetrieebenen der Fläche (da die Vorzeichenvertauschung bei einer einzelnen Koordinate keine Änderung der linken Seite der Gleichung hervorbringt). Geben wir der Konstanten rechts in (7) oder (15) den Wert 1, so sind die Quadratwurzeln aus den positiven unter den $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gleich den Abschnitten, die die Fläche auf den betreffenden Achsen ausschneidet, und diese Größen sind zugleich Extreme der vom Mittelpunkt aus nach den Flächenpunkten gezogenen Radienvektoren. Das Zusammenfallen zweier Wurzelwerte, z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$, bedeutet, daß der Schnitt der Fläche mit der x_1'-x_2'-Ebene ein Kreis ist, bei dem jeder Durchmesser die Rolle einer Hauptachse oder Symmetrieachse übernehmen kann. So vermittelt die Vorstellung der Rotationsflächen zweiter Ordnung im dreidimensionalen Raum einen gewissen Einblick in die Bedeutung der bei mehrfachen Wurzeln entstehenden Unbestimmtheit der Hauptachsen. Dem Falle verschwindender Diskriminante oder der Verminderung der Variablenzahl in der Hauptachsengleichung entspricht in der gewöhnlichen Geometrie die Zylinderfläche. Die Gleichung eines elliptischen Zylinders, dessen Erzeugenden die Richtung der z-Achse haben, bezogen auf das Hauptachsenkreuz in der x-y-Ebene, lautet ja, wie bekannt,

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

In den Problemen der Analysis, zu denen uns die Fragestellungen der mathematischen Physik führen werden, kommen noch weitere Folgerungen aus den Ergebnissen der früheren Abschnitte zur Anwendung. Neben der quadratischen Form (7) betrachtet man auch

die „bilineare Form“, die von den $2n$ Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ abhängt:

$$(18)\quad \begin{cases} B = a_{11} u_1 v_1 + a_{22} u_2 v_2 + \cdots + a_{nn} u_n v_n + a_{12}(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \cdots \\ \qquad + a_{n-1,n}(u_{n-1} v_n + u_n v_{n-1}), \end{cases}$$

wofür wir auch kürzer nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise

$$(18')\qquad B = (\mathfrak{A}\mathfrak{u})\mathfrak{v} = (\mathfrak{A}\mathfrak{v})\mathfrak{u}$$

schreiben können. Wählt man zu Koordinatenachsen die Hauptachsen, die zu den $a_{\iota\varkappa}$ gehören, so hat der Vektor $\mathfrak{A}\mathfrak{u}$ die Komponenten $\lambda_1' u_1'$, $\lambda_2' u_2', \ldots, \lambda_{n-r}' u_{n-r}'$, und man erhält daher

$$(18'')\qquad B = \frac{u_1' v_1'}{\lambda_1} + \frac{u_2' v_2'}{\lambda_2} + \cdots + \frac{u_{n-r}' v_{n-r}'}{\lambda_{n-r}'}.$$

Der Reduktion der quadratischen Form auf die Gestalt (17) entspricht die der Bilinearform auf die Gestalt (18'').

Die Gl. (8), die wir jetzt wegen der Symmetrie des Schemas der $a_{\iota\varkappa}$ auch in der Form

$$(19)\qquad \sum_{\iota=1}^{n} a_{\iota\varkappa} x_\iota = y_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben wollen, zeigen — besonders wenn man (8') ansieht —, daß der Vektor $\mathfrak{y}$ dem durch die $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bestimmten linearen Vektorgebilde angehört. Ist der Rang $n - r$ dieses Gebildes oder der Diskriminante der $a_{\iota\varkappa}$ kleiner als n, so kann man nicht einen beliebigen Vektor $\mathfrak{y}$ in der Form (19) darstellen (d. h. zu ihm einen passenden Vektor $\mathfrak{x}$ finden), sondern nur einen aus dem $(n - r)$-dimensionalen Vektorgebilde. Wir sagen also im allgemeinen, es gäbe gewisse, der Matrix $a_{\iota\varkappa}$ oder, wie wir jetzt auch sagen wollen, dem „Kern“ $a_{\iota\varkappa}$ „erreichbare“ Vektoren $\mathfrak{y}$. Da die $n - r$ Hauptachsen, die zu nicht verschwindenden Wurzeln der Säkulargleichung gehören, $n - r$ linear unabhängige Einheitsvektoren darstellen, die sicher dem Kern erreichbar sind ($\mathfrak{o}_1$ beispielsweise ist der Transformierte von $\lambda_1 \mathfrak{o}_1$), so kann man jeden dem Kern erreichbaren Vektor $\mathfrak{y}$ als lineare Kombination dieser Einheitsvektoren $\mathfrak{o}$ darstellen, d. h. ihn nach den $n - r$ Hauptachsenrichtungen in Komponenten zerlegen:

$$(20)\qquad \mathfrak{y} = y_1' \mathfrak{o}_1 + y_2' \mathfrak{o}_2 + \cdots + y_{n-r}' \mathfrak{o}_{n-r}.$$

Die Gesamtheit der dem Kern erreichbaren Vektoren ist identisch mit der Gesamtheit der nach den $n - r$ Hauptachsenrichtungen zerlegbaren.

Wir betrachten jetzt das System nichthomogener linearer Gleichungen

$$(21)\qquad \mathfrak{x} - \lambda(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \mathfrak{f},$$

worin $\mathfrak{x}$ den unbekannten Vektor, λ eine gegebene Zahl, $\mathfrak{f}$ einen gegebenen Vektor bezeichnen soll. Ausführlicher geschrieben lautet (21)

$$(21')\qquad \mathfrak{x} - \lambda(\mathfrak{a}_1 x_1 + \mathfrak{a}_2 x_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n x_n) = \mathfrak{f},$$

oder in Komponentenzerlegung:

$$(21'')\qquad \begin{cases} x_1 - \lambda(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n) = f_1 \\ x_2 - \lambda(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n) = f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - \lambda(a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n) = f_n. \end{cases}$$

Derartige Gleichungen treten in der Theorie der erzwungenen Schwingungen auf, so wie die früher untersuchten homogenen Gleichungen den freien Schwingungen entsprechen. Die Lösung von (21″) hängt natürlich von der Determinante des Gleichungssystems ab, und man erkennt leicht, daß diese sich nicht wesentlich von der Determinante (12) unterscheidet. In der Tat braucht man in (21″) nur λ durch $1/\lambda'$ zu ersetzen und dann jede Gleichung mit $-\lambda'$ zu multiplizieren: das dann entstehende System hat (12) zur Koeffizientendeterminante. Man muß daraus schließen, daß (21) nur für solche λ-Werte, die von den früher betrachteten Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ verschieden sind, bei beliebigen f lösbar ist. Wir wollen jetzt auf Grund der eben abgeleiteten Formeln die Lösung von (21) in einer Gestalt angeben, die diese Tatsache unmittelbar zum Ausdruck bringt.

Die Gl. (21) setzt unmittelbar in Evidenz, daß der Vektor $\mathfrak{x} - \mathfrak{f}$ dem durch $\mathfrak{A}$ (oder $\lambda\mathfrak{A}$) dargestellten Kern erreichbar ist. Wir dürfen daher nach dem schon bewiesenen Satze anschreiben:

$$(22)\qquad \mathfrak{x} - \mathfrak{f} = c_1 \mathfrak{o}_1 + c_2 \mathfrak{o}_2 + \cdots + c_{n-r} \mathfrak{o}_{n-r} = \lambda(\mathfrak{A}\mathfrak{x}).$$

Multiplizieren wir mit $\mathfrak{o}_1$, beachten, daß $\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2 = \mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_3 = \cdots = 0$, $\mathfrak{o}_1^2 = 1$, schreiben für $\mathfrak{x}\mathfrak{o}_1 = x_1'$, $\mathfrak{f}\mathfrak{o}_1 = f_1'$, so erhalten wir

$$x_1' - f_1' = c_1 = \lambda(\mathfrak{A}\mathfrak{x})\mathfrak{o}_1.$$

Auf den Ausdruck rechts wenden wir die Darstellung der bilinearen Form (18′) durch die Entwicklung (18″) an, wobei zu bedenken ist, daß $\mathfrak{o}_1$ die erste Komponente 1, alle anderen Komponenten gleich Null im Hauptachsenkreuz besitzt, also

$$\lambda(\mathfrak{A}\mathfrak{x})\mathfrak{o}_1 = \lambda \frac{x_1' \cdot 1}{\lambda_2}.$$

Aus dieser und der vorangehenden Beziehung folgt aber

$$x_1' = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} f_1', \quad c_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} f_1'$$

und natürlich die analoge Gleichung für $c_2, c_3, \ldots, c_{n-r}$. Sieht man nun das Hauptachsenproblem für die Matrix $\mathfrak{A}$ als gelöst an, so kennt man die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$, die Einheitsvektoren $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_{n-r}$ und die Komponenten $f_1', f_2', \ldots, f_{n-r}'$ des gegebenen Vektors $\mathfrak{f}$ und hat jetzt nach Einsetzen der c in (22) die Lösung von (21) in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{f} + \lambda \left[\frac{f_1' \mathfrak{o}_1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{f_2' \mathfrak{o}_2}{\lambda_2 - \lambda} + \cdots + \frac{f_{n-r}' \mathfrak{o}_{n-r}}{\lambda_{n-r} - \lambda} \right]. \tag{23}$$

Man sieht, daß, wenn λ mit einem Wurzelwert $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zusammenfällt, die Lösung einen unendlichen Wert für $\mathfrak{x}$ ergeben muß, wenn nicht gerade die betreffende Komponente des Vektors $\mathfrak{f}$ verschwindet. Würde man die Gl. (21) nach der Cramerschen Regel lösen, so müßte als Nennerdeterminante wesentlich der Ausdruck (12) auftreten, der für $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2, \ldots$ usf. verschwindet. Die Form (23) der Lösung ist nichts anderes als die Partialbruchzerlegung der Cramerschen Formel. — Es ist zu beachten, daß bei der Ableitung nicht vorausgesetzt wurde, der gegebene Vektor $\mathfrak{f}$ sei dem Kern erreichbar oder nach den $n-r$ Hauptachsen zerlegbar; es geht aus dem Resultat hervor, daß etwaige Komponenten von $\mathfrak{f}$, die außerhalb des $(n-r)$-dimensionalen, durch die $a_{\iota\varkappa}$ bestimmten Vektorgebildes liegen, ohne Einfluß auf den Wert von $\mathfrak{x}$ bleiben.

5. Paare quadratischer Formen. In der Theorie der Schwingungen spielt auch der folgende Satz, der sich auf zwei quadratische Formen

$$A = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa, \quad B = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa \tag{24}$$

bezieht, eine gewisse Rolle: Es sei von den beiden quadratischen Formen A und B die letztere positv definit; dann lassen sich solche linearen Kombinationen ξ der ursprünglichen Koordinaten x einführen:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \cdots + c_{1n}\xi_n \\ x_2 = c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + \cdots + c_{2n}\xi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}\xi_1 + c_{n2}\xi_2 + \cdots + c_{nn}\xi_n, \end{array} \right. \tag{25}$$

daß A und B in den ξ ausgedrückt die Gestalt

$$A = \frac{\xi_1^2}{\lambda_1} + \frac{\xi_2^2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\xi_n^2}{\lambda_n}, \quad B = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \tag{26}$$

annehmen. Die $c_{\iota\varkappa}$ sind reell, ihre Determinante verschwindet nicht; die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind die reziproken Werte der Wurzeln von

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda' b_{11} & a_{12}-\lambda' b_{12} \ldots a_{1n}-\lambda' b_{1n} \\ a_{21}-\lambda' b_{21} & a_{22}-\lambda' b_{22} \ldots a_{2n}-\lambda' b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1}-\lambda' b_{n1} & a_{n2}-\lambda' b_{n2} \ldots a_{nn}-\lambda' b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

die stets reell, aber nicht notwendig von Null verschieden sind. Dies läßt sich wie folgt beweisen.

Die Gl. (27) ist die Bedingung dafür, daß die n linear-homogenen Gleichungen, die wir in konsequenter Abkürzung so schreiben:

$$(28)\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda' \mathfrak{B}\mathfrak{x},$$

eine Lösung außer der trivalen besitzen, d. h. dafür, daß der vermöge der ersten quadratischen Form Transformierte von $\mathfrak{x}$ parallel sei dem vermöge der zweiten Form Transformierten. Sind λ_1' und λ_2' zwei Wurzeln von (27) und $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zugehörige nicht triviale Lösungen von (28):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 = \lambda_1' \mathfrak{B}\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 = \lambda_2' \mathfrak{B}\mathfrak{x}_2,$$

so findet man, wie in **3** durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_2$ bzw. $\mathfrak{x}_1$ und Subtraktion:

$$0 = (\lambda_1' - \lambda_2')(\mathfrak{B}\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_2.$$

Wäre nun $\lambda_1' = \alpha + \beta i$, $\lambda_2' = \alpha - \beta i$, so müßten den Komponenten $u_\iota + v_\iota i$ von $\mathfrak{x}_1$ die Komponenten $u_\iota - v_\iota i$ von $\mathfrak{x}_2$ entsprechen. Für diese ist aber

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_2 = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} b_{\iota\varkappa}(u_\iota + v_\iota i)(u_\varkappa - v_\varkappa i) = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} b_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa + \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} b_{\iota\varkappa} v_\iota v_\varkappa.$$

Hier steht rechts die Summe zweier positiver Zahlen, da die Form B als positiv definit vorausgesetzt wurde, also muß $\lambda_1' - \lambda_2' = 0$ sein, d. h. $\beta = 0$; die Wurzeln von (27) sind daher sicher reell.

Sei nun λ_1' eine der Wurzeln von (27), so daß die Diskriminante der quadratischen Form $A - \lambda_1' B$ verschwindet [die linke Seite von (27) ist ja die Diskriminante von $A - \lambda' B$]. Man kann dann nach **3** eine Koordinatentransformation so vornehmen, daß der neue Ausdruck von $A - \lambda_1' B$ jedenfalls nicht mehr als $n - 1$ von den neuen Koordinaten enthält, weil doch der Rang der quadratischen Form kleiner als n ist. Führt man die neuen Koordinaten in die Form B selbst ein, so entsteht eine Form B':

$$(29)\qquad B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B'(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{n} b_{\iota\varkappa}' x_\iota' x_\varkappa',$$

in der sicher der erste Koeffizient b'_{11} nicht verschwinden oder negativ sein kann, weil sonst B entgegen der Voraussetzung für $x'_1 = 1$, $x'_2 = x'_3 = \cdots = x'_n = 0$ Null oder negativ würde. Setzen wir aber

$$\sqrt{\frac{1}{b'_{11}}}(b'_{11} x'_1 + b'_{12} x'_2 + \cdots + b'_{1n} x'_n) = \xi_1, \tag{30}$$

so erkennt man ohne weiteres, daß B in allen Gliedern, die x'_1 enthalten, mit dem Quadrat von ξ_1 übereinstimmt. Mit anderen Worten, es ist B die Summe von ξ_1^2 und einer quadratischen Form B_1 in den $n-1$ Variablen $x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$. Da man, wie früher gezeigt, auch $A - \lambda'_1 B$ als quadratische Form in $x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ ausdrücken kann (man braucht nur der Achsenrichtung, die bei der Transformation auf Hauptachsen aus der Gleichung herausfällt, den Index 1 zu geben), demnach auch $A - \lambda'_1 B + \lambda'_1 B_1$ als eine ebensolche Form A_1, so erhält man:

$$\begin{aligned} A - \lambda' B &= A - \lambda'_1 B + (\lambda'_1 - \lambda') B \\ &= A_1(x'_2, \ldots, x'_n) + \lambda'_1 \xi_1^2 - \lambda' [B_1(x'_2, \ldots, x'_n) + \xi_1^2]. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung, die für ganz beliebiges λ' bestehen muß, folgt

$$A = \lambda'_1 \xi_1^2 + A_1(x'_2, \ldots, x'_n), \quad B = \xi_1^2 + B_1(x'_2, \ldots, x'_n). \tag{31}$$

Man braucht jetzt nur mit den beiden Formen A_1 und B_1, die nur noch $n-1$ Variable enthalten, genau so zu verfahren und diesen Vorgang weiter fortzusetzen, um A und B in der Gestalt (26) zu erhalten. Daß die in (26) auftretenden Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nichts anderes sein können als die reziproken Werte der Wurzeln der ursprünglichen Gl. (27), erkennt man daran, daß z. B. in der quadratischen Form $A - \frac{1}{\lambda_2} B$ die Variable ξ_2 nicht auftritt, so daß ihre Diskriminante [die für $\lambda' = 1/\lambda_2$ durch (27) dargestellt wird] verschwinden muß.

Um die „Normalkoordinaten" oder „Hauptkoordinaten" ξ aus den x wirklich zu berechnen, also die Lösung von (25) herzustellen, müßte man nach unserer Ableitung die in (30) auftretenden $b'_{\iota\varkappa}$ kennen, das sind die Koeffizienten von B nach Transformation auf die Hauptachsen von $A - \lambda'_1 B$. Es ist aber leicht einzusehen, daß dazu die Lösung des Hauptachsenproblems gar nicht erforderlich ist, da es ja genügt, in $A - \lambda'_1 B$ eine Koordinate zu eliminieren, ohne daß im übrigen alle nicht quadratischen Glieder verschwinden; dies ist in der Regel in weit einfacherer Weise zu erreichen, soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

§ 3. Vektoranalysis in drei Dimensionen

Nachdem wir schon in den beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels den Begriff des Vektors im n-dimensionalen Raume und die einfachsten Rechnungsoperationen (Addition, Komponentenbildung, skalare Multiplikation) benutzt haben, soll jetzt eine erheblich weitergehende Zusammenstellung der Rechnungsregeln und Formeln für den natürlichen dreidimensionalen Raum folgen. Dabei ist wieder vorausgesetzt, daß der Leser von diesen Dingen hier nicht zum erstenmal erfährt.

1. Die einfachsten Beziehungen. In einem rechtwinkligen Achsenkreuz x, y, z ist eine Richtung ν durch die drei Richtungskosinus $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$, deren Quadratsumme 1 ist, eindeutig gegeben. Wir setzen als bekannt voraus, daß der Kosinus des Winkels zweier Richtungen ν und μ sich in der Gestalt

$$(1)\quad \cos(\nu,\mu) = \cos(\nu,x)\cos(\mu,x) + \cos(\nu,y)\cos(\mu,y) + \cos(\nu,z)\cos(\mu,z)$$

darstellen läßt, daß insbesondere die Produktsumme der Kosinus Null ist, wenn ν auf μ senkrecht steht. Auf dieser Grundlage wird der Vektor in folgender Weise analytisch definiert. Man versteht unter einem Vektor $\mathfrak{v}$ die Zuordnung skalarer Zahlen v_ν an die Richtungen des Raumes vermöge eines in den Richtungskosinus linearen, homogenen Gesetzes:

$$(2)\qquad v_\nu = v_x \cos(\nu, x) + v_y \cos(\nu, y) + v_z \cos(\nu, z).$$

Die Koeffizienten rechts in (2) sind notwendigerweise die Werte von v_ν für $\nu = x$, $\nu = y$, $\nu = z$. Wählt man ein neues Koordinatenkreuz x', y', z', so folgt aus (1), daß sich $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$ linear und homogen in den neuen Richtungskosinus ausdrücken, so daß aus (2) wird

$$(3)\qquad v_\nu = v_{x'} \cos(\nu, x') + v_{y'} \cos(\nu, y') + v_{z'} \cos(\nu, z'),$$

wobei die Koeffizienten wiederum nichts anderes sein können als die Werte von v_ν für die neuen Achsenrichtungen. Man nennt v_ν die „Komponente“ oder besser den „Wert des Vektors $\mathfrak{v}$“ für die Richtung ν. Der Ausdruck (2) hat einen Größtwert für die Richtung, deren Kosinus sich verhalten wie $v_x : v_y : v_z$; man nennt sie die „Richtung des Vektors“ und den absoluten Betrag des Größtwertes $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ seine „Länge“.

Aus der Definition geht hervor, daß ein Vektor durch drei Zahlen, z. B. durch die drei Komponenten v_x, v_y, v_z für die Richtungen eines Rechtwinkelkreuzes, gegeben ist. Konstruiert man irgendwo im Raume

zwei Punkte a und b, deren Koordinatendifferenzen (x-Koordinate von b minus x-Koordinate von a usf.) gleich v_x, v_y, v_z sind, so besagt (2) nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie, daß v_ν gleich der Projektion der Strecke $a \rightarrow b$ auf die Richtung ν ist. Man kann daher einen Vektor statt durch die drei Zahlen v_x, v_y, v_z auch durch eine Strecke $a \rightarrow b$ als gegeben ansehen, von der der Anfangspunkt willkürlich, die Richtung, der Richtungssinn und die Länge wesentlich sind. So gelangt man zu der geometrischen Definition eines Vektors als einer „gerichteten Größe": Jedes orientierte[1]) Punktepaar bestimmt einen Vektor; Punktepaare, die durch Translation ineinander überführbar sind, bestimmen denselben Vektor.

Sowohl auf die analytische wie auf die geometrische Definition des Vektors kann man jetzt die bekannte Erklärung der linearen Operationen, nämlich der Addition (Subtraktion) von Vektoren und der Multiplikation (Division) mit einer skalaren Zahl, aufbauen. Es mag hier genügen, daran zu erinnern, daß nach dieser Erklärung die linearen Operationen an den Komponenten zu vollziehen sind, also beispielsweise $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda \mathfrak{a}$ die Vektoren mit den Komponenten $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$, bzw. λa_x, λa_y, λa_z sind, daß andererseits in der geometrischen Darstellung die Addition auf ein Aneinanderfügen der Punktepaare (Parallelogrammgesetz), die Multiplikation auf die entsprechende Vervielfachung der Entfernung $a \rightarrow b$ hinausläuft. Selbstverständlich ergeben sich daraus das kommutative, das assoziative und das distributive Gesetz in der Form.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}, \quad \lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda \mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{b}. \tag{4}$$

Mit Hilfe dieser Begriffe kann man einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ durch drei Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, die den Achsenrichtungen parallel sind und die Länge 1 haben, darstellen:

$$\mathfrak{v} = v_x \mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + v_z \mathfrak{k}. \tag{5}$$

Über das Gebiet der linearen Operationen hinaus führen die Begriffe des skalaren und des vektoriellen Produktes zweier Vektoren. Wir definieren als skalares oder „inneres" Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, deren Längen a, b sind, die skalare Größe

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,^{2)} = ab \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{6}$$

Die erste Form ist unabhängig vom Koordinatensystem, ihre Übereinstimmung mit der zweiten (und damit mit der viel all-

---

[1]) Unter „orientiert" versteht man bei einem Paar von Elementen die Eigenschaft, daß eines von ihnen als das erste gekennzeichnet erscheint.

[2]) Man sagt auch bisweilen: „$\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$", aber nicht „$\mathfrak{a}$ mal $\mathfrak{b}$" (vgl. unten).

gemeineren zu Beginn von § 2, 1) folgt aus den hier fortlaufend benutzten Grundbeziehungen der analytischen Geometrie. Die skalare Multiplikation genügt dem kommutativen Gesetz, dem distributiven gegenüber der früher erklärten Addition und dem assoziativen gegenüber der früher erklärten Multiplikation mit einem Skalar:

$$(7)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \quad \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{b}).$$

Wir bezeichnen hier, wie überall in diesem Werke, das skalare Produkt sowie das Produkt eines Vektors mit einem Skalar durch die einfach aneinandergereihten Faktoren, gelegentlich unter Zwischensetzung eines Punktes, ganz so, wie in der Algebra Produkte geschrieben werden; nur für das Produktzeichen $\times$ (und das Wort: mal) behalten wir uns eine andere Verwendung vor. Klammern werden nur in dem allgemein üblichen Sinne zur Zusammenfassung von Buchstabengruppen gebraucht.

Als vektorielles Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder als die „Ergänzung ihres äußeren Produktes" $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ (sprich: $\mathfrak{a}$ mal $\mathfrak{b}$) erklären wir einen Vektor, dessen Länge gleich $ab|\sin(\mathfrak{a},\mathfrak{b})|$ ist und dessen Richtung auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derart senkrecht steht, daß von der Seite, nach der sie weist, gesehen, die Drehung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ so erscheint, wie die Drehung von x nach y von der positiven z-Richtung aus gesehen wird. Diese Multiplikation genügt dem kommutativen Gesetz nur mit Zeichenwechsel, verhält sich aber im übrigen wie die skalare:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = -(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}, \\ \lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\times(\lambda\mathfrak{b}). \end{cases}$$

Für die drei Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ folgt unmittelbar aus der Definition:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{i}\times\mathfrak{j} = \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{k}\times\mathfrak{i} = \mathfrak{j}; \\ \mathfrak{j}\times\mathfrak{i} = -\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{k}\times\mathfrak{j} = -\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{i}\times\mathfrak{k} = -\mathfrak{j}. \end{cases}$$

Setzt man daher für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die aus (5) folgenden Ausdrücke ein, so erhält man die Darstellung des vektoriellen Produktes durch seine Komponenten:

$$(10)\qquad \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathfrak{k}.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ sind somit die drei zweireihigen Determinanten, die man, bei folgerichtigem Fortschreiten von Spalte zu Spalte, aus der Matrix

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}$$

bilden kann.

der zuletzt angeführten Eigenschaft des Vektorproduktes der Satz über das ternäre Produkt

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

da die Entwicklung der dreireihigen Determinante nach einer der drei Zeilen eben einen der links stehenden Ausdrücke liefert (Vertauschungsregel). Die Größe (11) bedeutet den mit einem Vorzeichen versehenen Rauminhalt des Parallelepipeds, dessen Seiten den Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gleich und parallel sind.

Das ternäre Produkt $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ hat zur x-Komponente die Größe

$$a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z).$$

Fügt man hier $a_x b_x c_x$ einmal mit positivem und einmal mit negativem Zeichen hinzu, so entsteht der Ausdruck $b_x(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - c_x(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, somit der „Entwicklungssatz“:

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{12}$$

Anwendung von (11) und (12) auf vierfache Produkte liefert:

$$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) &= (\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) &= \mathfrak{b}[\mathfrak{a}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})] - \mathfrak{a}[\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})]. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

2. Differentiation von Vektoren. Ist ein Vektor $\mathfrak{v}$ Funktion einer skalaren Größe, z. B. der Zeit t, so genügt die Anwendung der linearen Operationen (Subtraktion, Division durch eine Zahl) zur Erklärung des Differentialquotienten oder der Ableitung:

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{v}(t+h) - \mathfrak{v}(t)}{h}. \tag{14}$$

Der Zusammenhang zwischen den Ableitungen der Komponenten und den Komponenten der Ableitung $\dot{\mathfrak{v}}$ ist leicht zu erkennen:

$$\dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{15}$$

Umgekehrt ist auch die Bedeutung des Symbols

$$\int_0^t \mathfrak{v}\,dt = \mathfrak{i}\int_0^t v_x\,dt + \mathfrak{j}\int_0^t v_y\,dt + \mathfrak{k}\int_0^t v_z\,dt \tag{16}$$

entweder durch direkte Übertragung des Integralbegriffs auf die Vektoraddition oder durch die in (16) angedeutete Komponentenzerlegung ohne weiteres zu erklären. Wir merken noch die beiden unmittelbar aus der Definition folgenden Formeln an:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\times\mathfrak{b}\right) + \left(\mathfrak{a}\times\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right). \tag{17}$$

Ist eine **skalare Größe** f **Funktion eines Vektors** $\mathfrak{r}$ (den wir uns als „Ortsvektor" mit den Komponenten x, y, z vorstellen wollen), so gibt es zunächst drei Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen; ler sogenannte „Satz vom totalen Differentialquotienten" liefert dann lie Ableitung nach einer beliebigen, durch das Linienelement ds repräsentierten Richtung, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschließt:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{18}$$

Diese Gleichung entspricht genau der Definition eines Vektors ıach (2): Es wird durch (18) jeder durch α, β, γ gegebenen Richtung ine Zahl zugeordnet, die sich linear und homogen in den Richtungs-cosinus darstellt. Man nennt den so bestimmten Vektor „**Gradient** von f" und schreibt:

$$\operatorname{grad} f = \mathfrak{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{19}$$

Daß $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$, erscheint selbstverständlich; ber die Verknüpfung der Differentiation mit der Produktbildung prechen wir noch später.

Schwieriger zu behandeln ist der Fall eines **Vektors** $\mathfrak{v}$, **der selbst unktion eines Vektors** $\mathfrak{r}$ **ist**. Die dreimal drei Differentialquotienten er Komponenten v_x, v_y, v_z nach den Richtungen x, y, z (oder igentlich nach den Komponenten von $\mathfrak{r}$) geben ein Gebilde höherer tufe, das erst im folgenden Paragraphen (Tensorrechnung) vollständig rledigt werden kann. Innerhalb der engeren Vektoranalysis können ie beiden Begriffe der **Divergenz** ($\operatorname{div}\mathfrak{v}$) und des **Rotors** ($\operatorname{rot}\mathfrak{v}$) eines eränderlichen Vektors $\mathfrak{v}$ erklärt werden. Man weist durch einfache echnung nach, daß die durch folgende Gleichung definierte skalare röße

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{20}$$

nen von der Wahl der Achsenrichtungen unabhängigen Wert hat. enn aus (2) und (18) folgt

$$\left\{\begin{aligned} v_{x'} &= v_x\cos(x, x') + v_y\cos(y, x') + v_z\cos(z, x'),\\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \cos(x, x')\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \cos(y, x')\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \cos(z, x')\cdot\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}\right. \tag{21}$$

it den analogen Gleichungen für die y'- und z'-Richtung. Wendet an diese und (21) an und berücksichtigt, daß, der Orthogonalität der eiden Achsenkreuze wegen, die Quadratsumme dreier entsprechender

gemischten Ableitungen, d. h. $\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \ldots$, oder $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$. Da in diesem Falle für die Vektorverteilung $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} f$ gilt, so folgt aus dem Bestehen von $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$, daß $\mathfrak{v}$ ein Gradient ist. Man bezeichnet auch $f = -\operatorname{pot} \mathfrak{v}$ (sprich: „Potential"). Für $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} f$ schreibt man häufig $\mathfrak{v} = -\operatorname{gef} f$ (sprich: „Gefälle"), wobei also der Vektor $\operatorname{gef} f$ stets die Richtung des größten Abfalls der Funktion f besitzt und diesem der Größe nach gleich ist.

3. Integration. Die über Raumteile V, Flächenstücke F oder Linien L zu erstreckenden Vektorintegrale

$$\int \mathfrak{v}\, dV, \quad \int \mathfrak{v}\, dF, \quad \int \mathfrak{v}\, dL$$

bedürfen keiner besonderen Erklärung, da sich ihre Bedeutung durch Zurückgehen auf die Komponentenintegrale, z. B. $\int \mathfrak{v}_x\, dV$, ohne weiteres

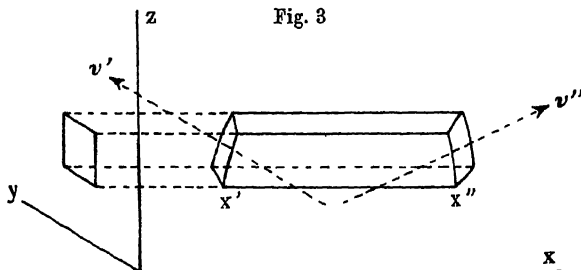



Fig. 3

ergibt. Ebenso leicht ergibt sich für das Linienintegral $J = \int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}$, wo der Vektor $d\mathfrak{L}$ ein Bogenelement einer gegebenen rektifizierbaren Kurve bedeutet. der Wert $J = \int v \cos(\mathfrak{v}, d\mathfrak{L})\,.\, dL$, also eine skalare Integration. Ist insbesondere $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} f$, so folgt $J = \int \frac{\partial f}{\partial s}\, ds$. Das Linienintegral eines Gradienten einer eindeutigen Funktion f über eine geschlossene Kurve verschwindet demnach.

Wichtig und charakteristisch für die Vektoranalysis sind nur gewisse Beziehungen, die auf den Gaußschen Satz über den Zusammenhang zwischen Raum- und Flächenintegralen zurückgehen. Ist V ein regulär begrenzter Raumteil, d. h. ein solcher, dessen ganz im Endlichen gelegene Begrenzungsfläche F aus endlich vielen stetig gekrümmten Flächenstücken besteht, und bedeutet f eine in V stetig differenzierbare Funktion von x, so kann man das Integral

$$\int\limits_{(V)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dV = \iiint \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx$$

in der Weise berechnen, daß man V (s. Fig. 3) in Prismen vom Querschnitte $dy\,dz$ mit Erzeugenden parallel der x-Achse zerlegt und zuerst das Integral über einen solchen Zylinder, gleich Querschnitt mal der Differenz der f-Werte an den Zylinderenden, bildet. Da die Flächenelemente dF, die ein Zylinder aus der Begrenzungsfläche F herausschneidet, als Projektion auf die y-z-Ebene die Größe $dy\,dz$ ergeben, so hat man, wenn $\bar{\nu}$ den Einheitsvektor der äußeren Normalenrichtung in dF bezeichnet, den Gaußschen Satz:

$$(28)\qquad \int\limits_{(V)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dV = \int\limits_{(F)} f\cos(\nu, x)\,dF = \int\limits_{(F)} f.(\bar{\nu}\,\mathfrak{i})\,dF.$$

Schreibt man kürzer $d\mathfrak{F}$ für $\bar{\nu}\,dF$, also für den Vektor der Größe dF und der Richtung der äußeren Normale, so liefert die Anwendung von (28) auf die drei Bestandteile von $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ mit Rücksicht auf (2):

$$(29)\qquad \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\mathfrak{v}\,dV = \int\limits_{(F)} (\bar{\nu}\,\mathfrak{v})\,dF = \int\limits_{(F)} v_\nu\,dF = \int\limits_{(F)} \mathfrak{v}\,d\mathfrak{F}\ ^{1})$$

und analog für $\operatorname{grad} f$ in (19) und $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ in (23):

$$(30)\qquad \int\limits_{(V)} \operatorname{grad} f\,dV = \int\limits_{(F)} f\,d\mathfrak{F},\quad \int\limits_{(V)} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\,dV = \int\limits_{(F)} (\bar{\nu}\times\mathfrak{v})\,dF = -\int\limits_{(F)} \mathfrak{v}\times d\mathfrak{F}.$$

Die Gl. (29) gestattet, indem man sich unter $\mathfrak{v}$ einen Geschwindigkeitsvektor denkt, die Deutung der $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ als der pro Volumeneinheit aus einem abgeschlossenen kleinen Bereich in der Sekunde austretenden Menge; denn diese wird jedenfalls durch das Oberflächenintegral von $v_\nu\,dF$ geliefert. In Worten lautet (29), der wesentlichste Teil des Gaußschen Satzes: Das Raumintegral der Divergenz eines Vektors ist gleich dem Oberflächenintegral der Normalkomponente dieses Vektors.

Handelt es sich um eine ebene Vektorverteilung, etwa so, daß $v_z = 0$ und der Definitionsbereich ein regulär begrenztes Flächenstück F der x-y-Ebene ist, dessen Berandung L also aus einer endlichen Zahl stetig gekrümmter Linien besteht, so wird analog (29) und (30):

$$(31)\quad \int\limits_{(F)} \operatorname{div}\mathfrak{v}\,dF = \int\limits_{(L)} v_\nu\,dL,\ \int\limits_{(F)} \operatorname{grad} f\,dF = \int\limits_{(L)} f\bar{\nu}\,dL,\ \int\limits_{(F)} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\,dF = \int\limits_{(L)} (\bar{\nu}\times\mathfrak{v})\,dL,$$

wobei jetzt $\bar{\nu}$ die (in der x-y-Ebene liegende) äußere Normale zur Randlinie L bezeichnet. Die dritte Gleichung enthält nur eine einzige skalare Aussage, da nach der Definition (23) der rot der ebenen Vektorverteilung die z-Richtung besitzt, was natürlich auch für das

[1]) Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (27) in I, § 3, 4, wenn dort für P, Q, R die Komponenten von $\mathfrak{v}$ gesetzt werden.

rechts stehende Vektorprodukt $\overline{\nu} \times \mathfrak{v}$ zutrifft. Dieses Produkt hat die Größe $v \sin(\overline{\nu}, \mathfrak{v})$ und die positive oder negative z-Richtung, je nachdem die kürzeste Drehung von $\overline{\nu}$ nach $\mathfrak{v}$ positiv oder negativ erscheint. Bezeichnen wir daher mit $d\mathfrak{L}$ einen Vektor von der Größe dL, dessen Richtung die der Tangente an L ist, und zwar jene, die durch positive Drehung der äußeren Normale um 90^0 entsteht (Fig. 4), so stimmt $(\nu \times \mathfrak{v})\, dL$ mit $\mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}$ nach Größe und Vorzeichen überein; den Richtungssinn von $d\mathfrak{L}$ kann man auch als positiven Umfahrungssinn der Fläche oder als denjenigen Umlaufssinn, der die Fläche zur Linken läßt, beschreiben. Es gilt dann für die ebene Vektorverteilung

$$\int\limits_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{F} = \int\limits_{(L)} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}. \tag{31'}$$

Kehren wir wieder zu der allgemeinen Vektorfunktion zurück, bei der auch $v_z \neq 0$ sein kann, wenden aber die Gaußsche Überlegung

Fig. 4

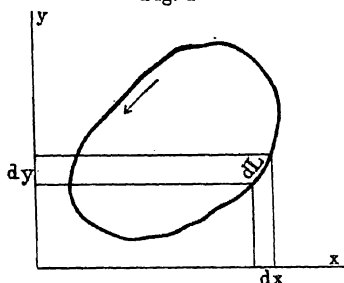
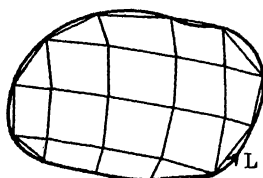



Fig. 5

nur auf ein Flächen- bzw. Linienstück der x-y-Ebene an, so gelten wieder die Gl. (31), von denen die dritte aber jetzt eine Vektorgleichung ist. Uns interessiert vornehmlich ihre z-Komponente, deren rechte Seite von v_z unabhängig ist, so daß dafür ebenso wie früher das Integral von $\mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}$ geschrieben werden kann. Wir haben also jetzt für eine beliebige Vektorverteilung und ein Flächenstück der x-y-Ebene [1]):

$$\int\limits_{(F)} (\operatorname{rot} \mathfrak{v})_z\, d\mathfrak{F} = \int\limits_{(L)} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}. \tag{31''}$$

Dieser Satz läßt noch eine wesentliche Erweiterung zu.

Es sei innerhalb des Bereiches der Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ (Fig. 5) L eine beliebige ebene oder räumlich gekrümmte, geschlossene Kurve, die den Rand des stetig gekrümmten, sonst aber beliebigen Flächenstückes F bildet. Auf L und auf F denken wir uns ein ge-

[1]) Diese Gleichung geht auch aus der in I, § 3, 3 bewiesenen Formel (23) durch einfache Spezialisierung $P = v_x$, $Q = v_y$ hervor.

eignetes Netz von Punkten festgelegt und diese Punkte derart durch Ebenen verbunden, daß eine dem F eingeschriebene Polyederschale entsteht, deren Rand ein dem L eingeschriebenes Polygon bildet. Für jedes einzelne Ebenenstück gilt (31''), wonach das über die Fläche erstreckte Integral der zur Fläche senkrechten Rotorkomponente gleich ist dem Randintegral des Vektors $\mathfrak{v}$ bei positivem Umlauf. Denkt man sich alle diese einzelnen Gleichungen angeschrieben und addiert, so fallen auf der rechten Seite die Integrale über jene Randstücke, die auf den Innenkanten der Schale liegen, fort, weil sie zweimal und dabei mit entgegengesetztem Zeichen auftreten; es bleibt somit nur das Integral über den äußeren Rand der Schale übrig. Macht man das Netz dichter und dichter, so daß die Polyederschale schließlich in F, ihr äußerer Rand in L übergeht, so kann an der Gleichheit der beiden Ausdrücke sich nichts ändern. Man muß noch darauf achten, daß die Normalenrichtungen der Schale die Normalen der Fläche approximieren, was jedoch bei geeigneter Wahl des Netzes stets erreicht werden kann. Es gilt, wenn wir wieder mit $d\mathfrak{F}$ den Vektor in der Richtung der Flächennormale bezeichnen, für eine beliebige stetige Vektorverteilung und ein beliebiges stetig gekrümmtes Flächenstück F, dessen Rand L ist:

$$\int\limits_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{F} \doteq \int\limits_{(L)} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{L}. \tag{32}$$

Das Vorzeichen von $d\mathfrak{L}$ ist dabei so zu wählen, daß von der Seite, nach der $d\mathfrak{F}$ weist, der Umlauf positiv erscheint. Dies ist der Stokessche Satz, der in Worten etwa so ausgesprochen werden kann: Das über ein Flächenstück genommene Integral der zur Fläche senkrechten Rotorkomponente ist gleich dem über den Rand der Fläche erstreckten Integral der zum Rand parallelen Komponente des Vektors selbst. Für eine geschlossene Oberfläche ist daher das Flächenintegral Null, bei einer rotorfreien Vektorverteilung ist das Linienintegral für jede geschlossene Linie Null (vgl. S. 78); läßt sich zwischen zwei geschlossenen Linien ein Flächenstück spannen, auf dem $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$, so hat das Linienintegral auf beiden den gleichen absoluten Wert. Aus dem Stokesschen Satze folgt auch die Umkehrung des Satzes über das Linienintegral auf S. 78: Besitzt eine Vektorverteilung die Eigenschaft, daß das Linienintegral über jede geschlossene Kurve verschwindet, so ist der Vektor ein Gradient.

Auf die gleiche Weise wie den Stokesschen Satz beweist man die folgende nützliche Formel:

$$\int\limits_{(F)} d\mathfrak{F} \times \operatorname{grad} f = \int\limits_{(L)} f\, d\mathfrak{L}. \tag{32'}$$

Man beweist den Satz zuerst für ein ebenes Flächenstück unter Benutzung des Gaußschen Satzes (28) und geht dann in der gleichen Weise wie beim Stokesschen Satz zu räumlichen Flächen über.

Wir kehren nochmals zu dem Gaußschen Satz (28) zurück und wenden ihn auf das Produkt $f = u \frac{\partial v}{\partial x}$ an:

$$\int_{(V)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dV + \int_{(V)} u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV = \int_{(F)} u \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\bar{v}, x)\, dF.$$

Denken wir uns die analogen Gleichungen für y und z an Stelle von x hinzugefügt und die drei addiert, so steht unter dem ersten Integralzeichen links das skalare Produkt $\operatorname{grad} u \,.\, \operatorname{grad} v$, unter dem zweiten das Produkt von u in Δv, endlich rechts das Produkt von u in $\frac{\partial v}{\partial n}$, also[1])

$$\int_{(V)} \operatorname{grad} u \,.\, \operatorname{grad} v\, dV = \int_{(F)} u \frac{\partial v}{\partial n} dF - \int_{(V)} u \Delta v\, dV. \tag{33}$$

Hier steht links eine symmetrische Funktion von u und v, daher muß auch rechts die Vertauschung von u und v zulässig sein [bzw. man hätte von vornherein auch $f = v \frac{\partial u}{\partial x}$ in (28) einführen können]. So erhalten wir die in der Theorie der Differentialgleichungen, namentlich in der Potentialtheorie sehr wichtige Formel von Green:

$$\int_{(V)} (u \Delta v - v \Delta u)\, dV = \int_{(F)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dF, \tag{34}$$

von der später sehr ausgiebig Gebrauch gemacht werden wird.

4. Krummlinige Koordinaten. In vielen Aufgaben der mathematischen Physik ist es bekanntlich sehr vorteilhaft, statt der gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten allgemeinere Systeme, z. B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten zu verwenden. Es entsteht dann die Aufgabe, die wichtigsten Differentialausdrücke wie grad, div, Δ usf. durch die Komponenten des Vektors nach den allgemeinen Koordinaten und durch die Differentialquotienten nach diesen auszudrücken. Dazu setzen uns die eben abgeleiteten Formeln, insbesondere die Gaußsche Formel (29) und die Stokessche (32) in einfacher Weise instand.

---

[1]) Vgl. auch Gl. (29) in I, § 3, 4. Dort fehlt der erste Bestandteil der rechten Seite, weil $u = 0$ auf der Oberfläche vorausgesetzt ist.

Es seien drei Flächenscharen $\alpha(x, y, z) = \text{konst}$, $\beta(x, y, z) = \text{konst}$, $\gamma(x, y, z) = \text{konst}$ als Koordinatenflächen gegeben. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht eine bestimmte α-, eine bestimmte β- und eine bestimmte γ-Fläche; die Schnittlinie der β- und γ-Fläche bestimme die Richtung 1 (Fig. 6), die wir nach der Seite, nach der α wächst, positiv nehmen, die Schnittlinie der γ- und α-Fläche ebenso die Richtung 2 usf. Wir wollen den weiteren Überlegungen die Beschränkung auferlegen, daß die drei Richtungen 1, 2, 3 in jedem Punkte zueinander senkrecht stehen, daß es sich also um zwar krummlinige, aber rechtwinklige Koordinatensysteme handelt.

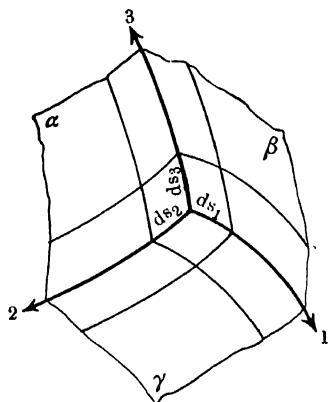
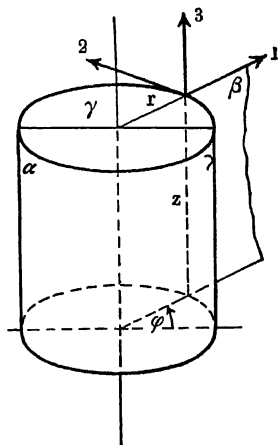



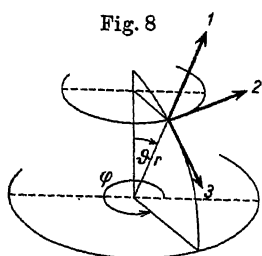
Fig. 6 Fig. 7

Schreiten wir in der Richtung 1, also auf der Schnittlinie β–γ ein kurzes Stück fort, so entspricht jedem Punkte eine neue α-Fläche, also ein neuer Wert von α; haben wir das Bogenelement ds_1 durchschritten, so hat der α-Wert eine gewisse Zunahme $d\alpha$ erfahren, die im allgemeinen von ds_1 verschieden sein wird. Wir setzen, gleich die analoge Betrachtung für die beiden anderen Richtungen mit einschließend,

$$(35) \qquad d\alpha = h_1 ds_1, \quad d\beta = h_2 ds_2, \quad d\gamma = h_3 ds_3.$$

Was die h bedeuten, erkennen wir am besten an Beispielen. Unter Zylinderkoordinaten versteht man (vgl. Fig. 7) die Bestimmung eines Raumpunktes durch seine Höhe z über einer Grundebene und die Polarkoordinaten r, φ seiner Projektion auf die Grundebene. Nehmen wir r für α, φ für β und z für γ, so sind die α-Flächen lotrecht stehende Zylinderflächen mit gemeinsamer Achse, die β-Flächen

die lotrechten Ebenen, die durch diese Achse hindurchgehen, die γ-Flächen die wagerechten Ebenen. Die Richtung 1 ist die radiale Richtung nach außen und dabei offenbar $d\alpha = dr = ds_1$; die Richtung 3 weist lotrecht nach oben, und auch hier hat man $d\gamma = dz = ds_3$. Dagegen verläuft der Schnitt der α- und γ-Flächen kreisförmig, die positive 2-Richtung ist die Tangente an den Zylinder bzw. den Kreisquerschnitt des Zylinders, und man hat $ds_2 = r d\varphi = r d\beta$. Also gilt für Zylinderkoordinaten r, φ, z:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = 1. \tag{36}$$

Fig. 8

Hat man Kugelkoordinaten r, φ, ϑ, wobei $\alpha = r =$ konst Kugelflächen vom Halbmesser r darstellen, $\beta = \varphi =$ konst die Ebenen durch den lotrechten Durchmesser aller Kugeln, endlich $\gamma = \vartheta =$ konst die Kegelflächen mit diesem Durchmesser als gemeinsamer Achse und dem Öffnungswinkel 2ϑ, so wird

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta;$$

man sieht (Fig. 8), daß wieder $d\alpha = dr = ds_1$, dann aber $ds_2 = r \sin\vartheta\, d\varphi = r \sin\vartheta\, d\beta$, $ds_3 = r d\vartheta = r d\gamma$ wird. Somit gilt für Kugelkoordinaten r, φ, ϑ:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r \sin\vartheta}, \quad h_3 = \frac{1}{r}. \tag{37}$$

Auf jeden Fall rechnet sich, unter Voraussetzung der Orthogonalität der Koordinaten, das Linienelement ds einer beliebigen Kurve zu

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}. \tag{38}$$

Ohne weiteres erhält man aus (35) die Komponenten eines grad nach den Richtungen 1, 2, 3 als die Differentialquotienten nach ds_1, ds_2, ds_3, also wenn $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen bezeichnen:

$$\operatorname{grad} f = \mathfrak{i}_1 h_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \mathfrak{i}_2 h_2 \frac{\partial f}{\partial \beta} + \mathfrak{i}_3 h_3 \frac{\partial f}{\partial \gamma}. \tag{39}$$

Um den Ausdruck für div $\mathfrak{v}$ zu finden, gehen wir von (29) aus und wenden diese Gleichung auf das von drei Paaren benachbarter Koordinatenflächen begrenzte Volumenelement (Fig. 6) $dV = ds_1\, ds_2\, ds_3$ an. Sind v_1, v_2, v_3 die Komponenten von $\mathfrak{v}$ im betrachteten Punkte nach den drei Koordinatenrichtungen, so liefern die drei in diesem

Punkte zusammentreffenden Begrenzungsflächen des Raumelements zur rechten Seite von (29) die Beiträge

$$-v_1\,ds_2\,ds_3,\quad -v_2\,ds_3\,ds_1,\quad -v_3\,ds_1\,ds_2.$$

Die drei gegenüberliegenden Begrenzungen liefern

$$v_1\,ds_2\,ds_3+\frac{\partial}{\partial s_1}(v_1\,ds_2\,ds_3)\,ds_1,\quad v_2\,ds_3\,ds_1+\frac{\partial}{\partial s_2}(v_2\,ds_3\,ds_1)\,ds_2\ \text{usf.}$$

Es bleibt somit, wenn man (35) berücksichtigt, rechts in (29) im ganzen:

$$h_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_1}{h_2h_3}\right)ds_1\,d\beta\,d\gamma+h_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_2}{h_3h_1}\right)ds_2\,d\gamma\,d\alpha+h_3\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_3}{h_1h_2}\right)ds_3\,d\alpha\,d\beta.$$

Dieser Ausdruck ist nach (29) gleich $\operatorname{div}\mathfrak{v}\,.\,ds_1\,ds_2\,ds_3$ zu setzen, also ist allgemein für rechtwinklige Koordinaten:

$$\text{(40)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{v}=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_1}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_2}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_3}{h_1h_2}\right)\right].$$

Ganz ähnlich dient der Stokessche Satz (32) zur Berechnung jeder Komponente von $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$; man braucht diese Gleichung nur auf eine der Begrenzungsflächen des eben betrachteten Volumenelementes, z. B. auf das in der γ-Ebene liegende Flächenstück $ds_1\,ds_2$ und seine Umrandung anzuwenden. Zur rechten Seite von (32) tragen die im Ausgangspunkt zusammentreffenden Randstücke die Werte $v_1\,ds_1$ und $-v_2\,ds_2$ bei, die gegenüberliegenden

$$-v_1\,ds_1-\frac{\partial}{\partial s_2}(v_1\,ds_1)\,ds_2\quad\text{und}\quad v_2\,ds_2+\frac{\partial}{\partial s_1}(v_2\,ds_2)\,ds_1.$$

Im ganzen steht somit rechts in (32) bei Berücksichtigung von (35):

$$h_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_2}{h_2}\right)ds_1\,d\beta-h_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_1}{h_1}\right)ds_2\,d\alpha$$

und dies ist dem Produkt $ds_1\,ds_2$ mal der γ-Komponente von $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ gleichzusetzen. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck für den $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$:

$$\text{(41)}\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathfrak{v}=\ &\mathfrak{i}_1\,h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_3}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_2}{h_2}\right)\right]+\mathfrak{i}_2h_3h_1\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_1}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_3}{h_3}\right)\right]\\&+\mathfrak{i}_3h_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_2}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_1}{h_1}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Die Vereinigung von (39) und (40) liefert mit Rücksicht auf die erste Gl. (27), wonach $\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad}u$ ist:

$$\text{(42)}\quad \Delta u=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right)\right].$$

Zur Bequemlichkeit des Lesers setzen wir noch die besonderen Formen der Ausdrücke (39) bis (42) für Zylinder- und Kugelkoordinaten her, wie sie sich durch Einsetzen von (36) und (37) ergeben. Es gilt für Zylinderkoordinaten r, φ, z:

$$(43)\quad \begin{cases} \operatorname{grad} f = \mathfrak{i}_1 \dfrac{\partial f}{\partial r} + \mathfrak{i}_2 \dfrac{\partial f}{r\partial \varphi} + \mathfrak{i}_3 \dfrac{\partial f}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_1) + \dfrac{\partial v_2}{r\partial\varphi} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{i}_1 \left[\dfrac{\partial v_3}{r\partial\varphi} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z}\right] + \mathfrak{i}_2 \left[\dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial r}\right] + \mathfrak{i}_3 \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_2) - \dfrac{\partial v_1}{r\partial\varphi}\right], \\ \Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{r^2\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \end{cases}$$

und für Kugelkoordinaten r, φ, ϑ:

$$(44)\quad \begin{cases} \operatorname{grad} f = \mathfrak{i}_1 \dfrac{\partial f}{\partial r} + \mathfrak{i}_2 \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi} + \mathfrak{i}_3 \dfrac{\partial f}{r\partial\vartheta}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 v_1) + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial v_2}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial(\sin\vartheta\, v_3)}{\partial\vartheta}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{i}_1 \left[\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial v_3}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial(\sin\vartheta\, v_2)}{\partial\vartheta}\right] + \mathfrak{i}_2 \left[\dfrac{\partial v_1}{r\partial\vartheta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_3)}{\partial r}\right] \\ \qquad + \mathfrak{i}_3 \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_2)}{\partial r} - \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial v_1}{\partial\varphi}\right], \\ \Delta u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial\vartheta}\right). \end{cases}$$

Die Ausdrücke für ebene Polarkoordinaten erhält man aus (43) durch Unterdrückung der auf die 3-Komponente bezüglichen Glieder.

§ 4. Tensoranalysis in drei Dimensionen

1. Definitionen und Grundeigenschaften. Um den Begriff des Tensors oder der Dyade zu erklären, gehen wir am besten von der in § 3, 1 gegebenen analytischen Definition des Vektors aus. Wir brauchen nur in der dort verwendeten Gl. (2) die vier skalaren Zahlen v_ν, v_x, v_y, v_z durch vier Vektoren zu ersetzen und gelangen so zu einer Definition, die den Tensor in genau der gleichen Weise aus dem Vektor entstehen läßt, wie der Vektor aus dem Skalar hervorgeht: Man versteht unter einem Tensor oder einer Dyade Π die Zuordnung von Vektoren $\mathfrak{p}_\nu$ an die Richtungen des Raumes vermöge eines in den Richtungskosinus linearen, homogenen Gesetzes:

$$(1)\qquad \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_x \cos(\nu, x) + \mathfrak{p}_y \cos(\nu, y) + \mathfrak{p}_z \cos(\nu, z).$$

Die (vektoriellen) Koeffizienten rechts in (1) sind offenbar die Werte von $\mathfrak{p}_\nu$ für $\nu = x$, $\nu = y$, $\nu = z$. Wählt man ein neues Koordinatenkreuz x', y', z', so folgt genau wie in § 3, **1**, daß auch

$$(2) \qquad \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_{x'} \cos(\nu, x') + \mathfrak{p}_{y'} \cos(\nu, y') + \mathfrak{p}_{z'} \cos(\nu, z')$$

gilt. Wir wollen gleich, da die Anwendung des Tensorbegriffes nicht so geläufig sein dürfte wie die des Vektors, ein konkretes Beispiel ins Auge fassen. Wenn man durch einen Punkt im Innern eines beliebigen Körpers Flächenelemente gelegt denkt, deren Normalenrichtung durch ν gekennzeichnet sei, so ist jedem ν ein Vektor der „inneren Spannung", d. i. der auf die Flächeneinheit reduzierten, an dem Element wirkenden Kraft, zugeordnet; die Gesamtheit dieser Vektoren $\mathfrak{p}_\nu$ folgt aus Gleichgewichtsgründen der Gl. (1), so daß aus drei $\mathfrak{p}$-Werten alle anderen berechnet werden können. Die Spannungen in einem Punkte irgend eines Körpers bilden mithin einen Tensor oder eine Dyade.

Die Definitionsgleichung (1) zeigt, daß ein Tensor durch drei Vektoren, also auch durch neun skalare Zahlen bestimmt wird. Wir nennen $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}_x$ usf. die Werte des Tensors Π für die Richtungen ν, x usf. Wenn wir die skalaren Komponenten dieser Vektoren mit $p_{\nu x}, p_{\nu y}, \ldots,$ $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$ bezeichnen, so kann man (1) ersetzen durch die drei skalaren Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} p_{\nu x} = p_{xx} \cos(\nu, x) + p_{yx} \cos(\nu, y) + p_{zx} \cos(\nu, z), \\ p_{\nu y} = p_{xy} \cos(\nu, x) + p_{yy} \cos(\nu, y) + p_{zy} \cos(\nu, z), \\ p_{\nu z} = p_{xz} \cos(\nu, x) + p_{yz} \cos(\nu, y) + p_{zz} \cos(\nu, z). \end{cases}$$

Man nennt gewöhnlich die Matrix, die aus der des Gleichungssystems (3) durch Vertauschung von Zeilen und Spalten hervorgeht, nämlich

$$(4) \qquad \left\{ \begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix} \right.$$

die Matrix des Tensors Π, oder auch schlechthin den Tensor Π selbst. In (4) stehen in der ersten Zeile die Komponenten des Wertes von Π für die x-Richtung, in der zweiten die für die y-Richtung usf.

Zu einer geometrischen Definition des Tensors oder zu einer Veranschaulichung des Tensors durch ein einfaches räumliches Gebilde werden wir erst später (in **3**) gelangen. Darin, daß hier eine so unmittelbare Deutung wie beim Vektor nicht möglich ist, liegt die einzige und offenbar unwesentliche Erschwerung der Tensorrechnung gegenüber dem Rechnen mit Vektoren selbst.

Die beiden linearen Operationen, die Addition (Subtraktion) zweier Tensoren und die Multiplikation (Division) eines Tensors mit

einer skalaren Zahl, lassen sich ohne weiteres im Anschluß an die analytische Definition erklären. Man versteht unter der Summe zweier Tensoren A und B einen Tensor Γ, dessen Wert $\mathfrak{c}_\nu$ für eine beliebige Richtung ν die Summe der betreffenden Werte $\mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{b}_\nu$ ist. Aus der Linearität der Gl. (1) folgt, daß man nur $\mathfrak{c}_x = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{c}_y = \mathfrak{a}_y + \mathfrak{b}_y$ usf. zu setzen braucht, um einen solchen Summentensor zu erhalten, und aus den Eigenschaften der Vektoraddition weiter, daß folgende vier (durch Strichpunkte getrennte) Gleichungsgruppen stets gleichzeitig bestehen:

$$(5)\quad \begin{cases} A + B = \Gamma;\ \mathfrak{a}_\nu + \mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{c}_\nu;\ \mathfrak{a}_x + \mathfrak{b}_x = \mathfrak{c}_x,\ \mathfrak{a}_y + \mathfrak{b}_y = \mathfrak{c}_y,\ \mathfrak{a}_z + \mathfrak{b}_z = \mathfrak{c}_z; \\ a_{xx} + b_{xx} = c_{xx},\quad a_{xy} + b_{xy} = c_{xy},\quad a_{xz} + b_{xz} = c_{xz}, \\ a_{yx} + b_{yx} = c_{yx},\quad a_{yy} + b_{yy} = c_{yy},\quad a_{yz} + b_{yz} = c_{yz}, \\ a_{zx} + b_{zx} = c_{zx},\quad a_{zy} + b_{zy} = c_{zy},\quad a_{zz} + b_{zz} = c_{zz}. \end{cases}$$

In analoger Weise erklärt man als Produkt eines Tensors A mit einer Zahl λ einen Tensor B, dessen Wert $\mathfrak{b}_\nu$ für die Richtung ν das λ-fache des Wertes $\mathfrak{a}_\nu$ von A ist, so daß jetzt folgende Gleichungen zusammengehören:

$$(6)\quad \begin{cases} B = \gamma A;\ \mathfrak{b}_\nu = \lambda\,\mathfrak{a}_\nu;\ \mathfrak{b}_x = \lambda\,\mathfrak{a}_x,\ \mathfrak{b}_y = \lambda\,\mathfrak{a}_y,\ \mathfrak{b}_z = \lambda\,\mathfrak{a}_z; \\ b_{xx} = \lambda\,a_{xx},\ b_{xy} = \lambda\,a_{xy},\ \ldots,\ b_{yx} = \lambda\,a_{yx},\ \ldots,\ b_{zz} = \lambda\,a_{zz}. \end{cases}$$

Es bedarf keines besonderen Beweises, daß diese Operationen dem kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetz genügen:

$$(7)\quad A + B = B + A,\ A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma,\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Die für die Verwendung des Tensorbegriffes weitaus wichtigste Operation ist die Multiplikation des Tensors mit einem Vektor. Man versteht unter dem Produkt $A\mathfrak{v}$ des Tensors A mit dem Vektor $\mathfrak{v}$ den mit der Länge v von $\mathfrak{v}$ multiplizierten Wert des Tensors für die Richtung ν von $\mathfrak{v}$, also einen Vektor. Da $v \cos(\nu x) = v_x$ usw. gilt, so haben wir zufolge (1):

$$(8)\qquad A\mathfrak{v} = v_x\,\mathfrak{a}_x + v_y\,\mathfrak{a}_y + v_z\,\mathfrak{a}_z.$$

Bezeichnen wir den Vektor $A\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{v}'$, so sind seine Komponenten nach (8):

$$(9)\qquad \begin{cases} v'_x = a_{xx}\,v_x + a_{yx}\,v_y + a_{zx}\,v_z \\ v'_y = a_{xy}\,v_x + a_{yy}\,v_y + a_{zy}\,v_z \\ v'_z = v_{xz}\,v_x + a_{yz}\,v_y + a_{zy}\,v_z. \end{cases}$$

Man kann sonach den Tensor A, bzw. seine aus den neun Zahlen $a_{xx}, \ldots, a_{zz}$ bestehende Matrix auch als eine „lineare Transformation“ auffassen, die einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ in einen neuen $\mathfrak{v}'$ transformiert, doch ist zu beachten, daß in der Tensormatrix (4) Zeilen und Spalten zu vertauschen sind. Die aus dem Koeffizientenschema (9) spalten-

weise gebildeten Vektoren sind die Werte $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ des Tensors. Auf diese Weise wird ein enger Zusammenhang zwischen dem Tensorbegriff und den in den §§ 1 und 2 behandelten linearen Gebilden in n Veränderlichen hergestellt; doch sind für die Beherrschung der dreidimensionalen Tensoranalysis die allgemeineren Theorien für beliebig viel Dimensionen nicht erforderlich.

Aus den Definitionen (8) oder (9) gewinnt man die distributiven Gesetze:

$$(10)\begin{cases} A(\mathfrak{v}+\mathfrak{w}) = (v_x+w_x)\mathfrak{a}_x+(v_y+w_y)\mathfrak{a}_y+(v_z+w_z)\mathfrak{a}_z = A\mathfrak{v}+A\mathfrak{w} \\ (A+B)\mathfrak{v} = v_x(\mathfrak{a}_x+\mathfrak{b}_x)+v_y(\mathfrak{a}_y+\mathfrak{b}_y)+v_z(\mathfrak{a}_z+\mathfrak{b}_z) = A\mathfrak{v}+B\mathfrak{v}, \end{cases}$$

sowie die beiden kommutativen Gesetze:

$$(11)\qquad A(\lambda\mathfrak{v}) = (\lambda A)\mathfrak{v} = \lambda v_x\mathfrak{a}_x+\lambda v_y\mathfrak{a}_y+\lambda v_z\mathfrak{a}_z = \lambda(A\mathfrak{v}).$$

Ferner erkennt man, wie sich mit Hilfe der Definition (8) der Wert einer Dyade für irgendeine Richtung darstellen läßt. Da der Einheitsvektor $\bar{\nu}$ die Komponenten $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$ usf. hat, folgt aus (8)

$$(12)\qquad \mathfrak{a}_\nu = A\bar{\nu};\quad \mathfrak{a}_x = A\mathfrak{i},\quad \mathfrak{a}_y = A\mathfrak{j},\quad \mathfrak{a}_z = A\mathfrak{k}.$$

Um die Anwendung dieser Operationen zu erläutern, behandeln wir gleich hier das folgende, grundlegende Beispiel eines Tensors. Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ als stetige und differenzierbare Funktion der Koordinaten x, y, z oder, wie wir sagen wollen, des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ gegeben, so ist jeder Richtung ν ein Vektor, nämlich der Differentialquotient von $\mathfrak{v}$ nach dieser Richtung, zugeordnet. Nach dem „Satz vom totalen Differentialquotienten", der schon in § 3 (18) gebraucht wurde, gilt für die Ableitung nach der Richtung ν:

$$(13)\qquad \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\nu} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}\cos(\nu, x)+\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y}\cos(\nu, y)+\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z}\cos(\nu, z),$$

d. h. aber nach unserer jetzigen Terminologie: Die Ableitung eines Vektors $\mathfrak{v}$, der Funktion eines Vektors $\mathfrak{r}$ ist, nach diesem $\mathfrak{r}$ bildet einen Tensor; wir wollen ihn als „derivierten Tensor" (derivierte Dyade) von $\mathfrak{v}$ mit $\dfrac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}}$ bezeichnen. Seine Matrix ist offenbar

$$(13')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Nennen wir $d\mathfrak{r}$ irgendein Vektordifferential (einen Vektor von unendlich kleiner Länge), so ist das Differential von $\mathfrak{v}$ bei Fortschreiten um $d\mathfrak{r}$ gleich dem Produkt der derivierten Dyade mit $d\mathfrak{r}$:

$$d\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}} d\mathfrak{r}.$$

Auch können wir die in § 3, 2 eingeführte Operation (25) jetzt so darstellen:

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}}\mathfrak{a} = a_x\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z}.$$

Auf die weiteren Beziehungen der Tensorrechnung zur Differentialanalysis der Vektoren kommen wir weiter unten zurück.

2. Dyadische Produkte von Vektoren. Sind zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben, so kann man aus ihnen in zweierlei Weise Tensoren ableiten, die gewisse Eigenschaften eines „Produktes" von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufweisen und die man als „dyadische Produkte" von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

Wir wollen, wenn $\bar{\nu}$ einen beliebigen Einheitsvektor bezeichnet, der Richtung von $\bar{\nu}$ den Vektor $\mathfrak{p}_\nu$ zuordnen, der aus $\mathfrak{a}$ durch Multiplikation mit dem skalaren Produkt $\mathfrak{b}\bar{\nu} = b\cos(\mathfrak{b}, \bar{\nu})$ hervorgeht:

(14) $$\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\bar{\nu}) = \mathfrak{a}[b_x\cos(\nu, x) + b_y\cos(\nu, y) + b_z\cos(\nu, z)].$$

Diese Zuordnung hat die Gestalt (1) mit $\mathfrak{p}_x = b_x\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_y = b_y\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_z = b_z\mathfrak{a}$; demnach haben wir tatsächlich aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einen Tensor gewonnen, den wir das Gibbssche Produkt oder die Gibbssche Dyade der beiden Vektoren nennen und für den wir das Symbol $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ (sprich $\mathfrak{a}$, Punkt—Strich, $\mathfrak{b}$) gebrauchen. Die Matrix dieses Tensors — der natürlich kein „allgemeiner Tensor" sein kann, da er schon durch sechs Größen, die Komponenten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, bestimmt wird — lautet ersichtlicherweise:

(14') $$\left\{\begin{matrix} a_x b_x & a_y b_x & a_z b_x \\ a_x b_y & a_y b_y & a_z b_y \\ a_x b_z & a_y b_z & a_z b_z. \end{matrix}\right.$$

Die in (8) eingeführte Produktbildung liefert nun, wenn $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor der Richtung ν ist:

(15) $$(\mathfrak{a};\mathfrak{b})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\bar{\nu})v = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}).$$

Man sieht also, daß die Frage, womit $\mathfrak{v}$ zu multiplizieren ist, damit das ternäre Produkt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v})$ herauskommt, durch die Tensorbildung $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ beantwortet wird. Stellen wir uns dieselbe Aufgabe hinsichtlich des

Produktes $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{v})$, so müssen wir einen Tensor wie folgt definieren: Einer beliebigen Richtung ν wird der Vektor $\mathfrak{p}_\nu$

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \bar{\nu}) = \mathfrak{i}\left[a_y\left(b_x \cos(\nu, y) - b_y \cos(\nu, x)\right) - a_z(\cdots)\right] \\ \qquad\qquad + \mathfrak{j}\,[\cdots] + \mathfrak{k}\,[\cdots] \end{cases}$$

zugeordnet. Die Zuordnung ist, wie man erkennt, linear und homogen in den Richtungskosinus, also haben wir wirklich einen Tensor vor uns, den wir mit $\mathfrak{a} \overset{\times}{,} \mathfrak{b}$ (sprich $\mathfrak{a}$, Kreuz—Strich, $\mathfrak{b}$) bezeichnen und das Jaumannsche Produkt oder die Jaumannsche Dyade der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nennen. Die Matrix dieses Tensors lautet, wie aus (16) unmittelbar abzuleiten ist:

$$(16')\quad \begin{cases} -a_y b_y - a_z b_z & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & -a_z b_z - a_x b_x & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & -a_x b_x - a_y b_y. \end{cases}$$

Durch Produktbildung nach (8) erhält man jetzt die entscheidende Anwendungsformel von (16)[1]:

$$(17)\qquad (\mathfrak{a} \overset{\times}{,} \mathfrak{b})\,\mathfrak{v} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \bar{\nu})\, v = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{v}),$$

d. h. $\mathfrak{a} \overset{\times}{,} \mathfrak{b}$ ist der Faktor, mit dem $\mathfrak{v}$ multipliziert werden muß, um das ternäre Produkt $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{v})$ zu liefern. Man überzeugt sich leicht, daß durch beide Formeln (15) und (17) in Verbindung mit der Vertauschungsregel der Vektorrechnung § 3, (11) die Aufgabe des Heraushebens eines Faktors aus einem ternären Produkt für alle Fälle erledigt ist.

Um nur ein Beispiel für die praktische Verwendung der Umformungen (15) und (17) zu geben, betrachten wir die sogenannte Trägheitsdyade. Rotiert ein starrer Körper mit einer durch den Vektor $\bar{\omega}$ nach Größe und Richtung gegebenen Drehgeschwindigkeit, so hat ein Punkt, dessen Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von einem Punkt der Drehachse aus gerechnet sein mag, die Geschwindigkeit $\bar{\omega} \times \mathfrak{x}$. Das Moment der Geschwindigkeit dieses Punktes ist dabei $\mathfrak{x} \times (\bar{\omega} \times \mathfrak{x})$ und das Moment der Bewegungsgröße des ganzen Körpers oder sein Impulsmoment

$$(18)\qquad \mathfrak{J} = \int \mathfrak{x} \times (\bar{\omega} \times \mathfrak{x})\, dm,$$

das Integral über sämtliche Massenelemente dm erstreckt. Die Formel (17) gestattet uns, das unter dem Integralzeichen konstante $\bar{\omega}$ herauszuheben:

$$(18')\qquad \mathfrak{J} = -\int (\mathfrak{x} \overset{\times}{,} \mathfrak{x})\, dm \,.\, \bar{\omega} = \Theta\, \bar{\omega},$$

---

[1]) $\mathfrak{v}$ habe wieder die Richtung ν.

wobei jetzt Θ einen Tensor bezeichnet, dessen Matrix nach (16′) folgendermaßen aussieht:

$$(18'')\quad \begin{cases} \int (y^2+z^2)\,dm & -\int xy\,dm & -\int xz\,dm \\ -\int yx\,dm & \int (z^2+x^2)\,dm & -\int yz\,dm \\ -\int zx\,dm & -\int zy\,dm & \int (x^2+y^2)\,dm. \end{cases}$$

Man nennt diesen Tensor, wie schon erwähnt, die Trägheitsdyade, die Elemente in der Hauptdiagonale der Matrix die Trägheitsmomente, die anderen die Deviations- oder Zentrifugalmomente.

Bei der Ableitung von (18′) und (18″) haben wir schon von gewissen, allerdings ganz selbstverständlichen, Rechenregeln Gebrauch gemacht, die bei den dyadischen Produktbildungen zur Geltung kommen. Das distributive Gesetz und das assoziative hinsichtlich der Multiplikation mit einem Skalar folgen unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (14) und (16) und lassen sich etwa so zusammenfassen: Es gilt für beliebige skalare Zahlen λ, μ

$$(19)\quad \begin{cases} (\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2);(\mu_1\mathfrak{b}_1+\mu_2\mathfrak{b}_2) \\ =\lambda_1\mu_1(\mathfrak{a}_1;\mathfrak{b}_1)+\lambda_1\mu_2(\mathfrak{a}_1;\mathfrak{b}_2)+\lambda_2\mu_1(\mathfrak{a}_2;\mathfrak{b}_1)+\lambda_2\mu_2(\mathfrak{a}_2;\mathfrak{b}_2) \end{cases}$$

und die analoge Gleichung für die Jaumannschen Produkte. Vertauschung der beiden Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bewirkt, daß in der Matrix der Tensoren $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}\overset{\times}{;}\mathfrak{b}$ Zeilen und Spalten die Rollen tauschen.

Zwischen den beiden Produktdyaden, die aus demselben Vektorpaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ abgeleitet werden, läßt sich eine Beziehung herstellen, sobald man den „Einheitstensor“ oder die „Identitätsdyade“ oder den „Idemfaktor“ E einführt, der dadurch definiert ist, daß jeder Richtung ν der Einheitsvektor $\bar{\nu}$ selbst zugeordnet wird. Die Matrix von E lautet

$$(20)\quad \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{cases}$$

Man bestätigt nun durch Einsetzen von (14′), (16′) und (20), daß die Tensorgleichung

$$(21)\quad (\mathfrak{a}\overset{\times}{;}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b};\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})E$$

immer zu Recht besteht. Denn beispielsweise als erstes Element der Matrix links in (21) ergibt sich nach (16′) $-a_y b_y - a_z b_z$ und rechts nach (14′) und (20) $b_x a_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$, als zweites Element der ersten Zeile links $a_x b_y$, rechts (wegen Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) $b_y a_x - 0$ usf.

Die dyadischen Produkte stellen, wie schon erwähnt, nur spezielle Dyaden dar, da sie ja nur von sechs skalaren Zahlen, den Kompo-

nenten ihrer beiden Faktoren, abhängen. Man kann aber die Definition der Gibbsschen Dyade in sehr zweckmäßiger Weise dazu benutzen, um einen ganz beliebigen Tensor Π durch seine drei Werte $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ für die Koordinatenrichtungen auszudrücken, analog der elementaren Vektorformel $\mathfrak{v} = v_x \mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + v_z \mathfrak{k}$. Bedenkt man nämlich, daß in (1) statt $\cos(\nu, x)$ das skalare Produkt $\mathfrak{i}\bar{\nu}$ gesetzt werden darf, so erscheint der erste Summand in (1) in der Form $\mathfrak{p}_x(\mathfrak{i}\bar{\nu})$, genau analog (14), wenn hier $\mathfrak{p}_x$ für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}$ für $\mathfrak{b}$ geschrieben wird. Somit ist allgemein:

$$\Pi = (\mathfrak{p}_x ; \mathfrak{i}) + (\mathfrak{p}_y ; \mathfrak{j}) + (\mathfrak{p}_z ; \mathfrak{k}). \tag{22}$$

Man kann so, indem man von der Gibbsschen Produktdyade ausgeht, den Tensorbegriff durch Gl. (22) einführen, wobei allerdings die Anschaulichkeit der in **1** gegebenen Definition verloren geht.

3. Transformation und Invarianten des Tensors. Wir wenden uns jetzt einer Untersuchung zu, die in engem Zusammenhang mit dem in § 2 behandelten Hauptachsenproblem steht, ja teilweise nur die Spezialisierung dieser Aufgabe für das dreidimensionale Gebiet bedeutet. Wir wollen aber hier im großen Ganzen die Überlegungen unabhängig von § 2 durchführen.

Zunächst stellen wir fest, daß es zwei besondere Gattungen von Tensoren gibt, die wir als die symmetrischen und antisymmetrischen bezeichnen. Ein antisymmetrischer Tensor sei definiert durch die Zuordnung

$$\mathfrak{p}_\nu = \bar{\omega} \times \bar{\nu}, \tag{23}$$

wo $\bar{\omega}$ einen festen, von $\bar{\nu}$ unabhängigen, sonst aber beliebigen Vektor bedeutet. Die Matrix dieses Tensors in einem beliebigen Cartesischen Koordinatensystem lautet:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0, \end{matrix}\right. \tag{23'}$$

hat also die Eigenschaft, daß symmetrisch zur Hauptdiagonale stehende Glieder entgegengesetzt gleich, die Elemente in der Hauptdiagonale Null sind. Umgekehrt ist klar, daß jede Matrix von dieser Beschaffenheit auf die Zuordnung (23) führt, da sie ja nur drei unabhängige Größen enthält, die in jedem Falle als die Komponenten von $\bar{\omega}$ genommen werden können.

Als symmetrischen Tensor bezeichnen wir einen solchen, in dessen Matrix an Stellen, die symmetrisch zur Hauptdiagonale liegen, gleiche Größen stehen, also

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx} \tag{24}$$

gilt; wir wollen zeigen, daß diese Eigenschaft, sobald sie für **ein** Koordinatensystem besteht, auch für jedes andere bestehen muß. Zu diesem Zwecke beweisen wir etwas allgemeiner, analog Gl. (10) in § 2, die Gleichheit der skalaren Produkte

$$(\Pi \mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = (\Pi \mathfrak{b})\,\mathfrak{a} \tag{25}$$

unter Voraussetzung von (24). Bildet man $\Pi\mathfrak{a}$ nach (8) und multipliziert die einzelnen nach (9) gebildeten Komponenten von $\Pi\mathfrak{a}$ mit b_x, b_y, b_z, so erhält man für die linke Seite von (25)

$$(25')\quad \begin{cases} p_{xx}a_xb_x + p_{yx}a_yb_x + p_{zx}a_zb_x + p_{xy}a_xb_y + p_{yy}a_yb_y + p_{zy}a_zb_y \\ \qquad + p_{xz}a_xb_z + p_{yz}a_yb_z + p_{zz}a_zb_z \end{cases}$$

und dieser Ausdruck ändert sich zufolge (24) nicht bei Vertauschung von a mit b. Hat man nun ein neues Koordinatenkreuz mit den Richtungen $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$, so braucht man in (25) nur $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{j}'$ zu setzen, dann ist wegen (12) $\Pi\mathfrak{i}' = \mathfrak{p}_{x'}$, $\mathfrak{p}_{x'}\mathfrak{j}' = p_{x'y'}$, andererseits $\Pi\mathfrak{j}' = \mathfrak{p}_{y'}$, $\mathfrak{p}_{y'}\mathfrak{i}' = p_{y'x'}$, also $p_{x'y'} = p_{y'x'}$, w. z. b. w.

Es gibt, wie wir eben gezeigt haben, zwei Klassen von besonderen Tensoren, die von drei Konstanten abhängigen antisymmetrischen und die von sechs Größen abhängigen symmetrischen Tensoren. Man kann leicht sehen, daß **ein ganz beliebiger, von neun Zahlen p_{xx}, p_{xy}, …, p_{zz} abhängiger Tensor sich in eindeutiger Weise als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen darstellen läßt.** Die Matrizen der beiden Bestandteile sind:

$$(26)\quad \begin{cases} \begin{matrix} p_{xx} & \tfrac{1}{2}(p_{xy} + p_{yx}) & \tfrac{1}{2}(p_{xz} + p_{zx}) \\ \tfrac{1}{2}(p_{yx} + p_{xy}) & p_{yy} & \tfrac{1}{2}(p_{yz} + p_{zy}) \\ \tfrac{1}{2}(p_{zx} + p_{xz}) & \tfrac{1}{2}(p_{zy} + p_{yz}) & p_{zz} \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} 0 & \tfrac{1}{2}(p_{xy} - p_{yx}) & \tfrac{1}{2}(p_{xz} - p_{zx}) \\ \tfrac{1}{2}(p_{yx} - p_{xy}) & 0 & \tfrac{1}{2}(p_{yz} - p_{zy}) \\ \tfrac{1}{2}(p_{zx} - p_{xz}) & \tfrac{1}{2}(p_{zy} - p_{yz}) & 0. \end{matrix} \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht durch Addition entsprechender Elemente beider Matrizen, daß die Summe dieser Tensoren tatsächlich Π ist. Die Zerlegung ist aber auch eindeutig; denn in der Hauptdiagonale des ersten Summanden müssen die p_{xx} usf. stehen, weil der zweite hier nur Nullen enthält, während für die anderen Elemente an gleicher Stelle jeweils ihre Summe und Differenz gegeben ist, z. B. für die zweite Stelle der ersten Zeile die Summe p_{xy} und die Differenz p_{yx}.

Aus den sechs Skalaren p_{xx}, …, p_{zz}, die einen symmetrischen Tensor bestimmen, kann man die quadratische Form in den drei Variablen x, y, z bilden:

$$Q = p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx + 2p_{xy}xy \tag{27}$$

und nun entweder auf die allgemeine in § 2 entwickelte Theorie zurückgreifen oder $Q =$ konst als die Gleichung einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ansehen und sich auf deren Eigenschaften berufen. Welchen Weg man auch einschlägt, man gelangt zu dem Schluß, daß es (mindestens) ein Achsenkreuz x', y', z' gibt, auf das bezogen die Form Q übergeht in [§ 2, (17)]

$$Q = \frac{x'^2}{\lambda_1} + \frac{y'^2}{\lambda_2} + \frac{z'^2}{\lambda_3}, \tag{27'}$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die — immer reellen — Wurzeln der „Säkulargleichung" [§ 2, (12)]

$$\begin{vmatrix} p_{xx} - \frac{1}{\lambda} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} - \frac{1}{\lambda} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

bedeuten. Den Zusammenhang zwischen dem Tensor Π und der quadratischen Form Q kann man in zweierlei Weise herstellen. Nennen wir $\mathfrak{x}$ den Vektor mit den Komponenten x, y, z, so ist Q nichts anderes als das skalare Produkt $(\Pi \mathfrak{x})\mathfrak{x}$, wie man unmittelbar aus (25') und allgemeiner aus § 2, (7') erkennt. Andererseits kann man zu einer beliebigen Richtung $\bar{\nu}$ die ν-Komponente von $\mathfrak{p}_\nu$ bilden:

$$p_{\nu\nu} = \mathfrak{p}_\nu . \bar{\nu} = (\Pi \bar{\nu})\bar{\nu} = p_{xx}\cos^2(\nu, x) + \cdots + 2 p_{yz} \cos(\nu, y) \cos(\nu, z) + \cdots \tag{29}$$

(also z. B. wenn Π die Spannungsdyade ist, die Normalkomponente der Spannung) und sich dann eine Strecke proportional dem reziproken Werte der Quadratwurzel aus diesem $p_{\nu\nu}$ in der Richtung $\bar{\nu}$ aufgetragen denken. Hat die Strecke die Länge ϱ und ihr Endpunkt die Koordinaten $\xi = \varrho \cos(\nu, x)$ usf., so folgt aus $p_{\nu\nu} = K : \varrho^2$ und (29)

$$K = p_{xx}\xi^2 + p_{yy}\eta^2 + p_{zz}\zeta^2 + 2 p_{yz}\eta\zeta + 2 p_{zx}\zeta\xi + 2 p_{xy}\xi\eta, \tag{29'}$$

d. h. die Endpunkte der konstruierten Strecken liegen auf der Fläche $Q = K$. Wählt man also das eben erwähnte Hauptachsenkreuz x', y', z' als Koordinatensystem, so daß die Gl. (29') vermöge (27') in

$$K = \frac{\xi'^2}{\lambda_1} + \frac{\eta'^2}{\lambda_2} + \frac{\zeta'^2}{\lambda_3} \tag{29''}$$

übergeht, so sieht man, daß, auf dieses Achsenkreuz bezogen, die sechs Skalare des symmetrischen Tensors die Werte haben:

$$\begin{cases} p_{x'x'} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad p_{y'y'} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad p_{z'z'} = \frac{1}{\lambda_3}; \\ p_{y'z'} = p_{z'y'} = p_{z'x'} = p_{x'z'} = p_{x'y'} = p_{y'x'} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Wählt man die Konstante K in (29') gleich 1, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die (positiven oder negativen) Quadrate der halben Hauptachsenlängen der Fläche zweiter Ordnung. Es ist nur eine wenig veränderte Form des Satzes in § 2, **3**, wenn wir jetzt aussprechen: Zu jedem symmetrischen Tensor gibt es (mindestens) ein Rechtwinkelkreuz von Achsen, auf das bezogen die außerhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente in seiner Matrix verschwinden. Wir haben beispielsweise oben (18'') das Schema der sogenannten Trägheitsdyade abgeleitet und können jetzt bemerken, daß es symmetrisch ist; daraus folgt — mit den oben eingeführten Bezeichnungen —, daß es in jedem Körper mindestens ein rechtwinkliges Achsenkreuz gibt, für das die Deviationsmomente verschwinden. Ähnliches stellt sich hinsichtlich des Spannungstensors heraus.

Noch eine Folgerung läßt sich aus dem Hauptachsensatz ziehen. Die drei Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ haben sich als Größen ergeben, die jedenfalls von der Wahl der ursprünglichen Achsen unabhängig sind. Daher müssen auch die drei Koeffizienten der Gleichung dritten Grades (28), die die λ bestimmt, Werte haben, die gegen Änderung der Koordinaten invariant sind, weil zwei algebraische Gleichungen nur dann alle Wurzeln gemeinsam haben können, wenn sie völlig übereinstimmen. Nun lautet die Säkulargleichung (28) ausgeschrieben:

$$(31)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) + \frac{1}{\lambda}\left[\begin{vmatrix} p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix}\right. \\ \left. + \begin{vmatrix} p_{zz} & p_{zx} \\ p_{xz} & p_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{vmatrix}\right] - \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Es hat somit für jeden symmetrischen Tensor die Summe der Elemente in der Hauptdiagonale der Matrix, die Summe der Hauptminoren zweiter Ordnung und die ganze Determinante einen von den Koordinatenrichtungen unabhängigen Wert. Insbesondere die Konstanz

$$(32)\qquad p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{x'x'} + p_{y'y'} + p_{z'z'}$$

läßt sich für einen beliebigen (nicht symmetrischen) Tensor behaupten, wie aus der Zerlegung in (26) hervorgeht. Man nennt (32) den ersten Skalar des Tensors Π. Der erste Skalar von $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ ist, wie aus (14') hervorgeht, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Das wichtigste Anwendungsbeispiel für die Zerlegung der Dyade und für die Bedeutung des ersten Skalars bietet die schon oben erwähnte derivierte Dyade einer Vektorverteilung (13), (13'). Der antisymmetrische Teil von (13') ist die zum Vektor $\overline{\omega} = {}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ gehörige Dyade (23) bzw. (23'); aus dieser Tatsache folgt die Vektor-

eigenschaft des rot $\mathfrak{v}$ unabhängig von der in § 3 durchgeführten, etwas umständlichen Rechnung. Der symmetrische Teil mit der Matrix

$$
(33) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}
\end{cases}
$$

heißt auch der Deformator von $\mathfrak{v}$ (def $\mathfrak{v}$); denn die sechs Größen, die in seiner Matrix auftreten, bedeuten, wenn $\mathfrak{v}$ die Verschiebung des Punktes $\mathfrak{r}$ bezeichnet, lediglich Formänderungsgrößen: $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ ist die Dehnung in der x-Richtung, $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ ein Maß für die Verkleinerung des rechten, ursprünglich durch Schenkel parallel der x- und der y-Achse bestimmten Winkels. Wird durch die Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ eine kongruente Transformation beschrieben, so ist def $\mathfrak{v} = 0$ und die derivierte Dyade reduziert sich auf den ersten Teil $\bar{\omega} \times \bar{\nu}$ (reine Drehung).

4. Weitere Formeln und Verallgemeinerungen. Der weitere Ausbau der Tensoranalysis führt naturgemäß zu einer großen Zahl von Definitionen, namentlich für verschiedene Arten von Produktbildungen. Von größerer Bedeutung in den Anwendungen ist bisher nur das „Tensorprodukt zweier Tensoren" geworden, insbesondere sein erster Skalar, der auch schlechthin der Produktskalar oder auch das „skalare Produkt" der beiden gegebenen Tensoren heißt.

Seien A und B zwei beliebige Tensoren, deren Werte für die Koordinatenrichtungen wie früher mit $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \mathfrak{a}_z$; $\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_z$ bezeichnet seien. Wir definieren als ihr Tensorprodukt eine neue Dyade $\Gamma = A \times B$, indem wir dem Einheitsvektor $\bar{\nu}$ den Vektor

$$
(34) \qquad \mathfrak{c}_\nu = \Gamma \bar{\nu} = B(A\bar{\nu})
$$

zuordnen. Daß diese Zuordnung linear und homogen in den Komponenten von ν (also den Richtungskosinus) ist, sieht man unmittelbar an (34); also liefert (34) wirklich einen Tensor. Seine Werte für die drei Achsenrichtungen sind

$$
(34') \quad \begin{cases}
\mathfrak{c}_x = B(A\mathfrak{i}) = B\mathfrak{a}_x = \mathfrak{b}_x a_{xx} + \mathfrak{b}_y a_{xy} + \mathfrak{b}_z a_{xz} \\
\mathfrak{c}_y = \qquad\qquad\qquad\;\; = \mathfrak{b}_x a_{yx} + \mathfrak{b}_y a_{yy} + \mathfrak{b}_z a_{yz} \\
\mathfrak{c}_z = \qquad\qquad\qquad\;\; = \mathfrak{b}_x a_{zx} + \mathfrak{b}_y a_{zy} + \mathfrak{b}_z a_{zz}
\end{cases}
$$

und danach haben die neun Skalare in der Matrix von Γ die Gestalt:

(34″) $c_{xx} = a_{xx} b_{xx} + a_{xy} b_{yx} + a_{xz} b_{zx}, \quad c_{xy} = a_{xx} b_{xy} + a_{xy} b_{yy} + a_{xz} b_{zy}$ usf.

Wichtig ist, wie schon erwähnt, der erste Skalar der Dyade Γ, für den man kurz AB schreibt und der nach (34″) den Wert hat:

$$(35) \quad \begin{cases} AB = a_{xx} b_{xx} + a_{yy} b_{yy} + a_{zz} b_{zz} + a_{yz} b_{zy} + a_{zy} b_{yz} + a_{zx} b_{xz} \\ \qquad + a_{xz} b_{zx} + a_{xy} b_{yx} + a_{yx} b_{xy}. \end{cases}$$

Daß der Ausdruck (35), das skalare Produkt von A und B, von der Wahl der Koordinatenrichtungen unabhängig ist, geht aus unserer Ableitung hervor. In der Elastizitätstheorie betrachtet man speziell das skalare Produkt zweier symmetrischer Tensoren, nämlich der Spannungsdyade Π und der Deformationsdyade def $\mathfrak{u}$, wo $\mathfrak{u}$ die elastische Verschiebung eines Punktes bedeutet; das Produkt

$$(36) \quad \begin{cases} \Pi . \operatorname{def} \mathfrak{u} = p_{xx} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + p_{yy} \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + p_{zz} \dfrac{\partial u_z}{\partial z} + p_{yz} \left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \qquad + p_{zx} \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \right) + p_{xy} \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{cases}$$

heißt das elastische Potential. Man erhält es übrigens auch, wenn man als zweiten Faktor in (36) die vollständige derivierte Dyade $\dfrac{d \mathfrak{u}}{d \mathfrak{r}}$ statt ihres symmetrischen Teiles def $\mathfrak{u}$ setzt.

Man erkennt, daß die hier definierte Produktbildung $A \times B$ (und daher auch AB selbst) dem distributiven Gesetz hinsichtlich der Tensoraddition genügt und die Vertauschung mit der Multiplikation mit einem Skalar zuläßt:

(37) $A \times (B + \Gamma) = (A \times B) + (A \times \Gamma), \quad \lambda (A \times B) = \lambda A \times B = A \times \lambda B.$

Es sei noch das folgende ternäre Produkt angeführt:

(37′) $[(A \times B) \times \Gamma] \bar{\nu} = \Gamma . (A \times B) \bar{\nu} = \Gamma . [B . (A \bar{\nu})].$

Daher gilt für das Schema der Dyade $(A \times B) \times \Gamma$ mit den Elementen $d_{\iota\varkappa}$ (statt x, y, z ist hier 1, 2, 3 geschrieben):

$$(37'') \qquad d_{\iota\varkappa} = \sum_{\mu, \nu}^{1 \dots 3} a_{\iota\mu} b_{\mu\nu} c_{\nu\varkappa}.$$

Analog findet man bei weiterer Produktbildung:

$$[A \times B \times \Gamma \times \Delta]_{\iota\varkappa} = \sum_{\lambda, \mu, \nu} a_{\iota\lambda} b_{\lambda\mu} c_{\mu\nu} d_{\nu\varkappa}.$$

Die Frage nach der Vertauschbarkeit der Faktoren in $A \times B$ (kommutatives Gesetz) führt auf die Betrachtung der sogenannten konjugierten Dyade. Zu diesem Begriff gelangt man am ein-

fachsten so: Eine Dyade Π kann man zerlegen in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteil. Diese Zerlegung ist eindeutig und vom Koordinatensystem unabhängig.

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_A.$$

Definiert man nun $\Pi' = \Pi_S - \Pi_A$, so findet man als zugehöriges Schema:

$$(38) \qquad \left\{ \begin{matrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz}. \end{matrix} \right.$$

Benutzt man das in 2 definierte Gibbssche Produkt $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ zweier Vektoren und die Darstellung (22) eines beliebigen Tensors als Summe dreier Gibbsscher Dyaden, so kann man nach (38) und (14′) auch schreiben:

$$(38') \qquad \Pi' = (\mathfrak{i};\mathfrak{p}_x) + (\mathfrak{j};\mathfrak{p}_y) + (\mathfrak{k};\mathfrak{p}_z);$$

diese Darstellung von Π' ist somit auch vom Koordinatensystem unabhängig. Man hat daher folgenden Satz:

Es gibt zu jeder Dyade Π eine ihr „konjugierte“ Π', deren Schema in einem beliebigen Koordinatensystem aus dem betreffenden Schema von Π durch Vertauschung von Zeilen und Spalten hervorgeht.

Man erkennt unmittelbar an (14′), daß $(\mathfrak{b};\mathfrak{a})$ konjugiert ist zu $(\mathfrak{a};\mathfrak{b})$; ebenso ist $\mathfrak{b} \overset{\times}{,} \mathfrak{a}$ konjugiert zu $\mathfrak{a} \overset{\times}{,} \mathfrak{b}$ nach (16′). Unsere Gl. (34″) zeigt ferner, daß $A \times B$ konjugiert ist zu $B' \times A'$.

Für das skalare Produkt zweier Dyaden gilt das kommutative Gesetz

$$(39) \qquad A \underset{\bullet}{B} = B A,$$

wie man aus (35) ablesen kann.

Manchmal verwendet man auch ein vektorielles Produkt aus einem Vektor $\mathfrak{v}$ und einer Dyade Π, bei dem Π als „Postfaktor“ (d. h. hinterer Faktor) erscheint, definiert durch

$$(40) \qquad \mathfrak{v}\Pi = \Pi'\mathfrak{v},$$

wo Π und Π' konjugiert sind. Man kann daraufhin

$$(\mathfrak{a};\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}), \quad \mathfrak{c}(\mathfrak{a};\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b};\mathfrak{a})\mathfrak{c} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c})$$

schreiben und mit Rücksicht auf den Entwicklungssatz der Vektorrechnung (12) in § 3:

$$(41) \qquad \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a};\mathfrak{b})\mathfrak{c} - \mathfrak{c}(\mathfrak{a};\mathfrak{b}).$$

Erwähnt sei noch die folgende Definition einer Dyade $\mathfrak{v} \times \Pi$. Für den der Richtung $\bar{\nu}$ zugeordneten Vektor soll analog wie bei der äußeren Vektormultiplikation gelten:

$$(40') \quad \begin{cases} (\mathfrak{v} \times \Pi)_\nu = (v_y \mathfrak{p}_z - v_z \mathfrak{p}_y) \cos(\nu x) + (v_z \mathfrak{p}_x - v_x \mathfrak{p}_z) \cos(\nu y) \\ \qquad + (v_x \mathfrak{p}_y - v_y \mathfrak{p}_x) \cos(\nu z). \end{cases}$$

Mannigfache weitere Ausgestaltungen dieses Symbolismus können hier unerwähnt bleiben.

Hat man eine räumliche Verteilung von Dyaden, so ist es nützlich, analog wie in der Vektorrechnung folgenden Begriff einzuführen:

$$(42) \qquad \operatorname{div} \Pi = \lim_{V \to 0} \int_{(F)} \frac{\mathfrak{p}_\nu \, dF}{V}.$$

Das ist also ein Vektor. Nun ist

$$\int_{(F)} \mathfrak{p}_\nu \, dF = \int_{(F)} \mathfrak{p}_x \cos(\nu x) \, dF + \cdots = \int_{(V)} \left(\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z} \right) dV,$$

mithin

$$(42') \qquad \operatorname{div} \Pi = \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z};$$

dieser Ausdruck ist gemäß der Definition (42) vom Koordinatensystem unabhängig. Formal kann man dafür schreiben:

$$(42'') \qquad \operatorname{div} \Pi = \Pi . \nabla.$$

(Die Bedeutung des Vektors ∇ siehe S. 76.)

Es seien noch einige Integralformeln für Tensoren erwähnt.

$$(43) \qquad \int_{(V)} \nabla \cdot \Pi \, dV = \int_{(F)} d\mathfrak{F} . \Pi.$$

Zum Beweise rechnet man mit Benutzung von (40), (42′) und (42″) nach:

$$\int_{(V)} \nabla . \Pi \, dV = \int_{(V)} \Pi' \nabla \, dV = \int_{(V)} \left(\frac{\partial \mathfrak{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}'_z}{\partial z} \right) dV = \int_{(F)} \mathfrak{p}'_\nu \, d\mathfrak{F}.$$

Das wird nach (1) gleich $\int_{(F)} dF \left(\mathfrak{p}'_x \cos(\nu x) + \mathfrak{p}'_y \cos(\nu y) + \mathfrak{p}'_z \cos(\nu z) \right)$

$= \int_{(F)} \Pi' d\mathfrak{F} = \int_{(F)} d\mathfrak{F} . \Pi.$ Damit ist (43) verifiziert.

Weiter gilt, wenn $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor zum Punkte $(x y z)$ darstellt:

$$(44) \quad \begin{cases} \int_{(V)} \mathfrak{r} \times \nabla \Pi \, dV = \int_{(F)} \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{F} . \Pi) - \int_{(V)} \{ (p_{zy} - p_{yz}) \mathfrak{i} \\ \qquad + (p_{xz} - p_{zx}) \mathfrak{j} + (p_{yx} - p_{xy}) \mathfrak{k} \} \, dV; \end{cases}$$

für einen symmetrischen Tensor Π_S gilt daher

$$(44') \qquad \int_{(V)} \mathfrak{r} \times \nabla \Pi_S \, dV = \int_{(F)} \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{F} \,.\, \Pi_S).$$

Zum Beweise betrachte man zunächst die x-Komponente:

$$\int_{(V)} \left\{ y \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) \right\} dV.$$

Indem man analog wie beim Gaußschen Satz (§ 3, **3**) das Volumen in Elementarröhren parallel zur x-, bzw. y- und z-Achse zerlegt und die Enden der Röhren durch die Indizes 1 und 2 bezeichnet, findet man wie dort durch partielle Integration:

$$\iint [y\, p_{zx} - z\, p_{yx}]_1^2 \, dy\, dz + \iint [y\, p_{zy} - z\, p_{yy}]_1^2 \, dx\, dz$$
$$+ \iint [y\, p_{zz} - z\, p_{yz}]_1^2 \, dx\, dy - \int_{(V)} (p_{zy} - p_{yz})\, dV.$$

Dieser Ausdruck schreibt sich wie in § 3, **3** so um:

$$\int_{(F)} \Big[y \left(p_{zx} \cos(\nu x) + p_{zy} \cos(\nu y) + p_{zz} \cos(\nu z) \right) - z \left(p_{yx} \cos(\nu x) \right.$$
$$\left. + p_{yy} \cos(\nu y) + p_{yz} \cos(\nu z) \right) \Big] dF - \int_{(V)} (p_{zy} - p_{yz})\, dV$$
$$= \int_{(F)} \Big[y \left(\mathfrak{p}_x' \cos(\nu x) + \mathfrak{p}_y' \cos(\nu y) + \mathfrak{p}_z' \cos(\nu z) \right)_z - z \left(\mathfrak{p}_x' \cos(\nu x) \right.$$
$$\left. + \mathfrak{p}_y' \cos(\nu y) + \mathfrak{p}_z' \cos(\nu z) \right)_y \Big] dF - \int_{(V)} (p_{zy} - p_{yz})\, dV$$
$$= \int_{(F)} (\mathfrak{r} \times d\mathfrak{F} \,.\, \Pi)_x - \int_{(V)} (p_{zy} - p_{yz})\, dV.$$

Führt man die gleiche Rechnung für die übrigen Komponenten durch, so ersieht man die Richtigkeit der Gleichung (44).

Um endlich die Formel

$$(45) \qquad \int_{(F)} d\mathfrak{F} \cdot (\nabla \times \Pi) = \int_{(L)} d\mathfrak{L} \cdot \Pi$$

zu beweisen, überlegt man sich leicht wie beim Stokesschen Satz der Vektorrechnung [§ 3, Gl. (32)], daß man den Beweis nur noch für ein ebenes Flächenstück F zu führen braucht, also z. B. wenn F in der xy-Ebene liegt. Dann wird aber die linke Seite von (45):

$$\int_{(F)} (\nabla \times \Pi)' \mathfrak{k}\, dF = \int_{(F)} (\nabla \times \Pi)_z'\, dF = \int_{(F)} \left(\frac{\partial \mathfrak{p}_y'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{p}_x'}{\partial y} \right) dF$$
$$= \int_{(L)} dL \left(\mathfrak{p}_y' \cos(\nu x) - \mathfrak{p}_x' \cos(\nu y) \right) = \int_{(L)} \Pi' d\mathfrak{L} = \int_{(L)} d\mathfrak{L} \,.\, \Pi.$$

Zum Schluß sei noch auf folgende Erweiterung der Begriffsbildung hingewiesen: Wie die erste Ableitung einer räumlich verteilten skalaren Größe ein Vektor (der grad), die Ableitung eines Vektors eine Dyade ist (die derivierte Dyade), so führt in gleicher Weise, wie dies in 1 ausgeführt ist, die Differentiation einer Dyade oder eines Tensors zu einer in den Richtungskosinus linear-homogenen Zuordnung von Tensoren an die Richtungen des Raumes. Ein solches Gebilde, also z. B. die zweite Ableitung der Geschwindigkeit nach dem Orte, heißt zweckmäßig eine Triade usf. Die allgemeine Triade ist durch 3 Dyaden, durch 9 Vektoren oder 27 Skalare bestimmt. Die linearen Operationen, Addition und Multiplikation mit einem Skalar, sind ohne weiteres ausführbar, die weiteren Multiplikationsarten bedürfen einer genaueren Untersuchung, ebenso wie die Frage nach den Invarianten und der geometrischen Deutung. Spezielle Triaden lassen sich auch als „Produkte“ besonderer Art von drei Vektoren deuten.

Es bleibt nur noch ein Wort zu sagen über die leider noch sehr schwankende und unklare Terminologie in der Dyadenrechnung. Das Wort „Tensor“ (eigentl. Spannung) bezeichnete ursprünglich nur die symmetrische Dyade, also das sechswertige Gebilde, das den Spannungszustand in einem Punkte darstellt (Voigt). Für den allgemeinen Fall verwendete man die Bezeichnung „asymmetrischer Tensor“, auch „Diatensor“ (Budde), doch gebraucht man jetzt meist „Tensor“ im allgemeinen Sinn und fügt gegebenenfalls die nähere Bestimmung „symmetrisch“ hinzu. Auch das Wort „Dyade“ galt ursprünglich nur einem Spezialfall, dem sechswertigen Gibbsschen Produkt $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ zweier Vektoren, später auch dem Jaumannschen $\mathfrak{a}\overset{\times}{,}\mathfrak{b}$. Gibbs nennt die allgemeine Dyade, die sich als Summe von drei dyadischen Produkten darstellen läßt, „Dyadentripel“, Jaumann „komplette Dyade“. Es scheint aber am zweckmäßigsten zu sein, das Wort „Dyade“ ebenso allgemein zu verwenden, wie dies eben vom „Tensor“ gesagt wurde, hauptsächlich mit Rücksicht auf die Weiterbildung der Triaden, Tetraden usf. In neuerer Zeit hat sich auch die Verwendung der Bezeichnung „Tensor“ in der Richtung ausgedehnt, daß man den Vektor einen „Tensor erster Stufe“, die Dyade oder den Tensor in unserem Sinne „Tensor zweiter Stufe“, analog die Triaden usf. „Tensoren dritter und höherer Stufe“ nennt (Weyl); dabei wird zumeist nur an die symmetrischen Gebilde gedacht.

§ 5. Lineare Transformationen

1. Die Gruppe aller linearen Transformationen. Durch das Gleichungssystem

$$(1)\qquad y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wird jedem Vektor $\mathfrak{x}$ (mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$) des n-dimensionalen Vektorraumes R_n ein Vektor $\mathfrak{y}$ (mit den Komponenten $y_1, \ldots, y_n$) desselben Raumes zugeordnet. Wir schreiben die durch (1) ausgedrückte Operation, die $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ überführt, auch kurz

$$(2)\qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$$

und nennen $\mathfrak{A}$ einen „Operator". Der durch (1), (2) definierte Operator ist ein „linearer Operator", weil er offenbar, wenn $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ zwei beliebige Vektoren sind, die Bedingung

$$(3)\qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'') = \mathfrak{A}\mathfrak{x}' + \mathfrak{A}\mathfrak{x}''$$

erfüllt.

Wendet man auf $\mathfrak{y}$ eine Operation $\mathfrak{B}$ der gleichen Gestalt wie $\mathfrak{A}$ an, vermöge deren $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{z}$ übergeht, also

$$(4)\qquad z_l = \sum_{k=1}^{n} b_{lk}\, y_k \quad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

so folgt durch Einsetzen von (1) in (4)

$$(5)\qquad z_l = \sum_{j=1}^{n} c_{lj}\, x_j \quad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(6)\qquad c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} b_{lk}\, a_{kj}.$$

Die Operation, die $\mathfrak{x}$ unmittelbar in $\mathfrak{z}$ überführt, ist nach (5) und (6) von derselben Gestalt, wie die Operationen (1) und (4), durch deren „Zusammensetzung" sie entsteht. Führen wir den ihr entsprechenden Operator $\mathfrak{C}$ ein, so folgt durch Einsetzen von (4) in (2)

$$(7)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

Wir fassen den Operator $\mathfrak{C}$ als symbolisches Produkt der Operatoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf, durch deren Zusammensetzung er entsteht. Da die Operation $\mathfrak{C}$ nach (6) offenbar von der Reihenfolge abhängt, in der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ausgeführt werden, ist zu beachten, daß die Produktdarstellung der Reihenfolge nach von rechts nach links zu verstehen ist, d. h. daß $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ die Operation darstellt, die entsteht, wenn zuerst $\mathfrak{A}$ und dann $\mathfrak{B}$ ausgeübt wird.

Jeder Operator $\mathfrak{A}$ ist durch die Koeffizienten a_{jk} in (1) definiert; natürlich ist das eine Definition relativ zu einem bestimmten Koordinatensystem, nämlich demjenigen, in dem der Vektor $\mathfrak{x}$ die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ hat. Wollen wir uns vom Koordinatensystem unabhängig machen, so können wir leicht sehen, daß sich ein Operator mathematisch durch einen Tensor (im Sinne von § 4, 4, nur auf den n-dimensionalen Raum verallgemeinert) darstellen läßt, oder, wie man sich auch ausdrückt, wenn man den Tensor als die Gesamtheit der a_{jk} ansieht, durch eine Matrix (nach § 1, 4). Es sei also A der Tensor mit den Komponenten a_{jk}; dann ist unter dem Produkt aus seinem konjugierten A' und $\mathfrak{x}$, wenn wir die Definition von § 4, (8) auf den n-dimensionalen Raum verallgemeinern, ein Vektor mit den Komponenten $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$ zu verstehen. Dann kann man (1) oder (2) in der Symbolik der Tensorrechnung als

$$\mathfrak{y} = A'\mathfrak{x} \tag{8}$$

und analog (4) als

$$\mathfrak{z} = B'\mathfrak{y} \tag{9}$$

schreiben. Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt, wenn wir die Multiplikationsregel $B'(A'\mathfrak{x}) = (A' \times B')\mathfrak{x}$ aus § 4, 4 benutzen,

$$\mathfrak{z} = \Gamma'\mathfrak{x}, \quad \Gamma' = A' \times B', \tag{10}$$

also

$$\Gamma = B \times A.$$

Γ ist dann im Sinne der Tensorrechnung [§ 4, (34)] das Tensorprodukt der Tensoren B und A. Nach (6) und (10) erhält man also das Produkt zweier Tensoren oder Matrizen auf folgende Art: das Matrixelement des Produktes c_{lj} (d. h. das j-te Glied der l-ten Zeile) entsteht durch Kombination der l-ten Zeile von B mit der j-ten Spalte von A, in der Art, daß die n Glieder jeder dieser Zeilen bzw. Spalten zu einem Vektor zusammengefaßt werden und die Kombination in der Bildung des skalaren Produktes besteht.

Nachdem wir so den Zusammenhang mit der Tensorrechnung gewonnen haben, sollen mit großen griechischen Buchstaben im folgenden Matrizen bezeichnet werden, ohne auf ihre Bedeutung als Tensoren Wert zu legen. Das Matrizenprodukt zweier Matrizen A und B soll von nun an, wie es allgemein in der Algebra üblich ist, in Anlehnung an die Schreibweise (7) für Operatoren mit AB bezeichnet werden. An die Stelle der dritten Gl. (10) tritt dann

$$\Gamma = BA. \tag{10'}$$

Jeder Matrix ist nach § 1, 2 eine Zahl zugeordnet, ihre Determinante. Wir schreiben $a = \det A$, $b = \det B$, $c = \det \Gamma$. Nach der Regel für die Multiplikation zweier Determinanten (§ 1, 2) und (6) ist offenbar

(11) $$\det(AB) = \det A \,.\, \det B.$$

Nun gilt aber wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt von Zahlen $\det(AB) = \det(BA)$. Die Matrizen AB und BA sind im allgemeinen voneinander verschieden. Gilt $AB = BA$, so nennt man die beiden Matrizen vertauschbar. Die Operationen mit Determinanten, d. h. Zahlen, sind von denen mit Matrizen wohl zu unterscheiden. Während $\det A = \det B$ nur eine einzige Gleichung zwischen den Größen a_{jk} und b_{jk} ist, haben wir in $A = B$ ein System von n^2 Gleichungen vor uns. So bedeutet im besonderen $\det A = 0$ nur eine einzige Relation zwischen den a_{jk}, hingegen $A = 0$ das Verschwinden aller a_{jk}. Es gibt also sehr wohl nicht verschwindende Matrizen mit verschwindender Determinante (z. B. Matrizen, in denen ganze Zeilen oder Spalten mit Nullen ausgefüllt sind).

Die Summe $A + B$ ist durch $(A + B)\mathfrak{x} = A\mathfrak{x} + B\mathfrak{x}$ für beliebiges $\mathfrak{x}$ definiert, d. h. die Elemente von $A + B$ sind $a_{jk} + b_{jk}$. Diese Summationsregel ist wesentlich von der für Determinanten verschieden. Da dieselbe Regel für die Differenzen gilt, folgt daraus durch Grenzübergang die Regel für die Bildung des Differentialquotienten einer Matrix A, deren Elemente Funktionen eines Parameters τ sind. Es ist nämlich $\frac{dA}{d\tau}$ die Matrix mit den Elementen $\frac{da_{jk}}{d\tau}$, hingegen ist $\frac{d(\det A)}{d\tau}$ die Summe aus den Determinanten, die durch Differentiation je einer Spalte von A entstehen.

Dem Operator, der jeden Vektor $\mathfrak{x}$ in sich selbst überführt, entspricht als Matrix die „Einheitsmatrix" E_0, für die $E_0\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ ist bei beliebigem $\mathfrak{x}$. E_0 hat offenbar in der Diagonale lauter Einser, sonst lauter Nullen. Man sieht leicht, daß E_0 mit jeder Matrix A vertauschbar ist, es gilt

(12) $$AE_0 = E_0 A, \qquad \det E_0 = 1.$$

Wenn $AB = E_0$ ist, nennen wir B die zu A „reziproke" Matrix und schreiben $B = A^{-1}$. Dann ist auch $A = B^{-1}$, weil aus $A \,.\, B = E_0$ auch $B \,.\, A = E_0$ folgt. Wäre nämlich $B \,.\, A = E_0'$, so würde durch linksseitige Multiplikation dieser Definitionsgleichung mit A folgen: $A \,.\, E_0' = A \,.\, B \,.\, A = E_0 A = A E_0$ mit Benutzung von

(12). Aus $A . E_0' = A . E_0$ folgt nun aber leicht $E_0' = E_0$, wenn $\det A \neq 0$ ist. Nach (11) ist

$$\det A . \det A^{-1} = 1. \tag{13}$$

Zu A existiert also nur dann eine reziproke Matrix, wenn ihre Determinante nicht verschwindet. Eine Matrix Δ, in der alle Glieder mit Ausnahme der Diagonalglieder verschwinden, heißt Diagonalmatrix. An einer solchen kann man am einfachsten die Nichtvertauschbarkeit der Faktoren im Matrizenprodukt in Evidenz setzen. Bilden wir nämlich $A\Delta - \Delta A$, so lautet das allgemeine Glied bei beliebigem A

$$(A\Delta - \Delta A)_{lj} = a_{lj}(d_{jj} - d_{ll}). \tag{14}$$

Man sieht, daß diese Matrix nur verschwindet, wenn alle Glieder von Δ gleich sind, wie es z. B. bei der Einheitsmatrix E_0 der Fall ist.

Ein Raum R_m ist ein Unterraum von R_n, wenn $m < n$ und alle Vektoren von R_m in R_n enthalten sind. R_n „zerfällt" in zwei Unterräume R_m und R_{n-m}, wenn sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in einer und nur einer Weise als Summe eines Vektors $\mathfrak{x}'$ in R_m und eines $\mathfrak{x}''$ in R_{n-m} darstellen läßt. Ist z. B. $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_n$ ein „Koordinatensytem" in R_n, so zerfällt R_n in die von $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_m$ bzw. $\mathfrak{e}_{m+1} \ldots \mathfrak{e}_n$ aufgespannten Unterräume.

Wenn ein linearer Operator $\mathfrak{A}$ alle Vektoren eines Unterraumes R_m von R_n wieder in Vektoren von R_m überführt, heißt R_m ein gegenüber $\mathfrak{A}$ invarianter Unterraum. Wenn $\mathfrak{A}$ zugleich mit R_m auch den „ergänzenden" Unterraum R_{n-m} invariant läßt, so sagt man, die Operation $\mathfrak{A}$ „zerfällt". Sie läßt sich aus einem Operator $\mathfrak{A}'$ in R_m und einem Operator $\mathfrak{A}''$ in R_{n-m} zusammensetzen. Da sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in R_n in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}''$ eindeutig darstellen läßt, wo $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ in R_m bzw. in R_{n-m} liegen, ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}' + \mathfrak{A}\mathfrak{x}'' = \mathfrak{A}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{x}'',$$

weil wegen der Invarianz der Teilräume $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{x}'$ genau so wirkt wie $\mathfrak{A}$. Gibt es gegenüber $\mathfrak{A}$ keinen invarianten Unterraum, so heißt $\mathfrak{A}$ „irreduzibel", im entgegengesetzten Falle aber „reduzibel", und wenn $\mathfrak{A}$ zerfällt, „voll reduzibel".

Wenn eine Matrix E der Beziehung

$$EE = E \tag{15}$$

genügt, heißt sie Einzelmatrix. Nach (12) ist die Einheitsmatrix E_0 auch eine Einzelmatrix. Doch sieht man leicht, daß, wenn man aus E_0 dadurch eine andere Matrix macht, daß man in der Diagonale einige Einser durch Nullen ersetzt, die Eigenschaft (15) erhalten bleibt. Die geometrische Bedeutung der den Einzelmatrizen ent-

sprechenden Operatoren, der „Einzeloperatoren", erkennt man folgendermaßen: Wenn $\mathfrak{y} = E\mathfrak{x}$, folgt aus (15) $E\mathfrak{y} = EE\mathfrak{x} = E\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Wenn also E nicht der identischen Transformation entspricht (d. h. wenn $E \neq E_0$), so wirkt es doch auf die durch E und einen beliebigen Vektor $\mathfrak{x}$ entstehenden $\mathfrak{y}$ wie die Identität. Dann müssen aber die $\mathfrak{y}$ bei beliebigem $\mathfrak{x}$ in einem weniger als n-dimensionalen Unterraum des R_n liegen. E bedeutet also die Projektion der Vektoren des R_n auf einen Unterraum.

Die Matrizen E nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir die Projektionen auf eine Koordinatenachse, oder allgemeiner auf einen von einigen Koordinatenachsen aufgespannten Raum betrachten. Für die Projektionen des Vektors $\mathfrak{x}$ (Komponenten $x_1 \ldots x_n$) auf die von der y_1- und y_2-Achse aufgespannte Ebene lauten z. B. die Transformationsgleichungen (1): $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \cdots y_n = 0$. Da Gl. (8) in diesem Falle $\mathfrak{y} = E\mathfrak{x}$ lautet, hat die Einzelmatrix E, die dieser Projektion entspricht, die Gestalt

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Die Einzelmatrizen haben im allgemeinen eine verschwindende Determinante. (Eine Ausnahme bildet nur die Einheitsmatrix E_0 selbst.) Es gibt daher zu ihnen keine reziproken Matrizen E^{-1}, wie ja auch z. B. die Projektion auf eine Ebene keine eindeutig umkehrbare Operation ist.

Das System aller Transformationen der Gestalt (1) bzw. (2) oder (8), bei denen $\det A \neq 0$ ist, haben folgende Eigenschaften:

1. Durch Zusammensetzung von zwei Transformationen entsteht eine Transformation desselben Systems. [Gl. (10).]
2. Die identische Transformation gehört dem System an. ($A = E_0$.)
3. Mit jeder Transformation gehört auch die reziproke zum System. (Zu jedem A gehört ein A^{-1}.)

Ein System von Transformationen, das diesen drei Bedingungen genügt, nennt man eine „Transformationsgruppe". Die Gesamtheit aller Transformationen (8) bildet eine Gruppe, und zwar eine irreduzible, weil offenbar kein Unterraum von R_n bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.

Für jedes Wertsystem der a_{jk} erhalten wir eine bestimmte Transformation; man nennt jede solche ein Element der Gruppe. Die Größen a_{jk}, welche das einzelne Element festlegen, heißen die Para-

ruppe. Wenn wie hier diese Parameter kontinuierlich sind, spricht man von einer kontinuierlichen Gruppe. nur bestimmte, diskrete Werte annehmen, hätten wir nuierliche Gruppe vor uns. Eine solche liegt z. B. vor, on allen Transformationen nur die Verschiebungen in der g um eine Strecke der Länge l betrachten. Die Trans- en lauten dann: $y_1 = x_1 + l$, $y_2 = x_2 \ldots y_n = x_n$; durch olung erhalten wir $z_1 = y_1 + l$, $z_2 = y_2 \ldots z_n = y_n$ und usammensetzung der beiden $z_1 = x_1 + 2l$, $z_2 = x_2 \ldots z_n = x_n$. sultat einer beliebig oftmaligen Wiederholung ist, wenn wir uen Vektor, in den $\mathfrak{x}$ zum Schlusse übergeht, mit $\mathfrak{y}$ bezeichnen: $y_1 = x_1 + Nl$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 \ldots y_n = x_n$, wo N eine beliebige ganze Zahl ist. Dadurch ist ein System linearer Transformationen gegeben, die von einem Parameter N abhängen, der aber nur diskreter Werte 1, 2, 3, ... fähig ist. Das System hat offenbar die Eigenschaften, die eine Gruppe kennzeichnen. Derartige diskontinuierliche Gruppen spielen in der Theorie der Kristallgitter eine Rolle. Die eben besprochene Gruppe aller Translationen um die Strecke l in der x-Richtung gibt uns z. B. die Gruppe derjenigen Verschiebungen in der x-Richtung, durch die ein kubisches Kristallgitter der Kantenlänge l, dessen Würfelkanten den Koordinatenachsen parallel sind, mit sich selbst zur Deckung kommt.

2. Äquivalente Matrizen. Kogrediente und kontragrediente Transformationen. Es mögen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ bzw. $\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ zwei Systeme von je n linear unabhängigen Einheitsvektoren im R_n sein, also zwei Koordinatensysteme. Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ läßt sich dann in jedem der beiden Systeme in Komponenten x_j bzw. x'_j zerlegen. Es ist

$$\mathfrak{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathfrak{e}_j = \sum_{k=1}^{n} x'_k \mathfrak{e}'_k. \tag{17}$$

Dadurch ist jedem $\mathfrak{x}$ ein $\mathfrak{y}' = \sum_{j=1}^{n} x'_j \mathfrak{e}_j$ zugeordnet, und wir können jede Koordinatentransformation auch durch eine Transformation jedes Vektors $\mathfrak{x}$ des R_n in einen anderen $\mathfrak{x}'$ analog der Transformation (1) oder (8) darstellen. Der Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen ist durch n Vektorgleichungen der Form

$$\mathfrak{e}'_k = \sum_{j=1}^{n} r_{jk} \mathfrak{e}_j \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

gegeben. Dann ergibt sich durch Einsetzen von (18) in (17)

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} r_{jk} x'_k \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Das sind Gleichungen der Gestalt (1), die wir nach Einführung der Matrix P (mit den Elementen r_{jk}) einfach

$$\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}' \tag{20}$$

schreiben können. Schreiben wir auch $\mathfrak{y}$ in neuen Koordinaten, so ist genau so die Transformation $\mathfrak{y} = P\mathfrak{y}'$ bestimmt. Dann wird also durch jede Vektortransformation (8), die $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ überführt, auch eine Transformation von $\mathfrak{x}'$ in $\mathfrak{y}'$ bestimmt, und diese ist nichts anderes als die Darstellung der Transformation (8) im neuen Koordinatensystem. Ihre Gestalt erhalten wir leicht so: aus (8) folgt $P\mathfrak{y}' = AP\mathfrak{x}'$ und daraus durch Multiplikation mit P^{-1} [wobei $\det(P) \neq 0$ vorausgesetzt ist]

$$\mathfrak{y}' = A'\mathfrak{x}' \quad \text{mit} \quad A' = P^{-1}AP. \tag{21}$$

Die Transformation (8) hat also im neuen Koordinatensytem die Gestalt (21). Man nennt deshalb A' die im neuen System (also in bezug auf die Matrix P) zu A „äquivalente“ Matrix. Wir bezeichnen die zu A (im Sinne von § 4, 4) konjugierte Matrix mit A^* (wobei $\det A = 0$ sein kann), also

$$a_{jk}^* = a_{kj}; \tag{22}$$

dann ist insbesondere

$$(AB)^* = B^*A^*. \tag{23}$$

Wir berechnen nun das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und unterwerfen die beiden Vektoren linearen Transformationen

$$\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} = \Sigma\mathfrak{y}', \tag{24}$$

die wir auch als Koordinatentransformationen deuten können. Dann folgt mit Hilfe der leicht beweisbaren Identität $(A\mathfrak{x})(B\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}[(A^*B)\mathfrak{y}]$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = (P\mathfrak{x}')(\Sigma\mathfrak{y}') = \mathfrak{x}'[(P^*\Sigma)\mathfrak{y}']. \tag{25}$$

Soll das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ übergehen oder, anders ausgedrückt, sich im neuen Koordinatensystem auch darstellen lassen wie im alten, so muß

$$P^*\Sigma = E_0, \quad \text{also} \quad \Sigma = P^{*-1} \tag{26}$$

sein. Das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ geht also dann und nur dann in $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ über, wenn die Transformationsmatrizen P und Σ, mittels deren die beiden Faktoren transformiert werden, in der Beziehung $P^*\Sigma = E_0$ stehen. Man nennt dann $\Sigma = P^{*-1}$ die zu P kontragrediente Transformation. Zeichnet man die Transformation von $\mathfrak{x}$ als Koordinatenformation aus, so nennt man die Transformation aller Vektoren, die sich wie $\mathfrak{x}$, also mit Hilfe von P, transformieren, kogredient. Erst durch diese Auszeichnung bekommen die Ausdrücke kogredient und

meter der Gruppe. Wenn wie hier diese Parameter kontinuierlich veränderlich sind, spricht man von einer kontinuierlichen Gruppe. Könnten sie nur bestimmte, diskrete Werte annehmen, hätten wir eine diskontinuierliche Gruppe vor uns. Eine solche liegt z. B. vor, wenn wir von allen Transformationen nur die Verschiebungen in der x-Richtung um eine Strecke der Länge l betrachten. Die Transformationen lauten dann: $y_1 = x_1 + l$, $y_2 = x_2 \dots y_n = x_n$; durch Wiederholung erhalten wir $z_1 = y_1 + l$, $z_2 = y_2 \dots z_n = y_n$ und durch Zusammensetzung der beiden $z_1 = x_1 + 2l$, $z_2 = x_2 \dots z_n = x_n$. Das Resultat einer beliebig oftmaligen Wiederholung ist, wenn wir den Vektor, in den $\mathfrak{x}$ zum Schlusse übergeht, mit $\mathfrak{y}$ bezeichnen: $y_1 = x_1 + Nl$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 \dots y_n = x_n$, wo N eine beliebige ganze Zahl ist. Dadurch ist ein System linearer Transformationen gegeben, die von einem Parameter N abhängen, der aber nur diskreter Werte 1, 2, 3, ... fähig ist. Das System hat offenbar die Eigenschaften, die eine Gruppe kennzeichnen. Derartige diskontinuierliche Gruppen spielen in der Theorie der Kristallgitter eine Rolle. Die eben besprochene Gruppe aller Translationen um die Strecke l in der x-Richtung gibt uns z. B. die Gruppe derjenigen Verschiebungen in der x-Richtung, durch die ein kubisches Kristallgitter der Kantenlänge l, dessen Würfelkanten den Koordinatenachsen parallel sind, mit sich selbst zur Deckung kommt.

2. Äquivalente Matrizen. Kogrediente und kontragrediente Transformationen. Es mögen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$ bzw. $\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \dots, \mathfrak{e}'_n$ zwei Systeme von je n linear unabhängigen Einheitsvektoren im R_n sein, also zwei Koordinatensysteme. Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ läßt sich dann in jedem der beiden Systeme in Komponenten x_j bzw. x'_j zerlegen. Es ist

$$\mathfrak{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathfrak{e}_j = \sum_{k=1}^{n} x'_k \mathfrak{e}'_k. \tag{17}$$

Dadurch ist jedem $\mathfrak{x}$ ein $\mathfrak{y}' = \sum_{j=1}^{n} x'_j \mathfrak{e}_j$ zugeordnet, und wir können jede Koordinatentransformation auch durch eine Transformation jedes Vektors $\mathfrak{x}$ des R_n in einen anderen $\mathfrak{x}'$ analog der Transformation (1) oder (8) darstellen. Der Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen ist durch n Vektorgleichungen der Form

$$\mathfrak{e}'_k = \sum_{j=1}^{n} r_{jk} \mathfrak{e}_j \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{18}$$

gegeben. Dann ergibt sich durch Einsetzen von (18) in (17)

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} r_{jk} x'_k \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{19}$$

Das sind Gleichungen der Gestalt (1), die wir nach Einführung der Matrix P (mit den Elementen r_{jk}) einfach

$$\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}' \tag{20}$$

schreiben können. Schreiben wir auch $\mathfrak{y}$ in neuen Koordinaten, so ist genau so die Transformation $\mathfrak{y} = P\mathfrak{y}'$ bestimmt. Dann wird also durch jede Vektortransformation (8), die $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ überführt, auch eine Transformation von $\mathfrak{x}'$ in $\mathfrak{y}'$ bestimmt, und diese ist nichts anderes als die Darstellung der Transformation (8) im neuen Koordinatensystem. Ihre Gestalt erhalten wir leicht so: aus (8) folgt $P\mathfrak{y}' = AP\mathfrak{x}'$ und daraus durch Multiplikation mit P^{-1} [wobei $\det(P) \neq 0$ vorausgesetzt ist]

$$\mathfrak{y}' = A'\mathfrak{x}' \quad \text{mit} \quad A' = P^{-1}AP. \tag{21}$$

Die Transformation (8) hat also im neuen Koordinatensytem die Gestalt (21). Man nennt deshalb A' die im neuen System (also in bezug auf die Matrix P) zu A „äquivalente“ Matrix. Wir bezeichnen die zu A (im Sinne von § 4, 4) konjugierte Matrix mit A^* (wobei $\det A = 0$ sein kann), also

$$a^*_{jk} = a_{kj}; \tag{22}$$

dann ist insbesondere

$$(AB)^* = B^*A^*. \tag{23}$$

Wir berechnen nun das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und unterwerfen die beiden Vektoren linearen Transformationen

$$\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} = \Sigma\mathfrak{y}', \tag{24}$$

die wir auch als Koordinatentransformationen deuten können. Dann folgt mit Hilfe der leicht beweisbaren Identität $(A\mathfrak{x})(B\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}[(A^*B)\mathfrak{y}]$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = (P\mathfrak{x}')(\Sigma\mathfrak{y}') = \mathfrak{x}'[(P^*\Sigma)\mathfrak{y}']. \tag{25}$$

Soll das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ übergehen oder, anders ausgedrückt, sich im neuen Koordinatensystem auch darstellen lassen wie im alten, so muß

$$P^*\Sigma = E_0, \quad \text{also} \quad \Sigma = P^{*-1} \tag{26}$$

sein. Das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ geht also dann und nur dann in $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ über, wenn die Transformationsmatrizen P und Σ, mittels deren die beiden Faktoren transformiert werden, in der Beziehung $P^*\Sigma = E_0$ stehen. Man nennt dann $\Sigma = P^{*-1}$ die zu P kontragrediente Transformation. Zeichnet man die Transformation von $\mathfrak{x}$ als Koordinatenformation aus, so nennt man die Transformation aller Vektoren, die sich wie $\mathfrak{x}$, also mit Hilfe von P, transformieren, kogredient. Erst durch diese Auszeichnung bekommen die Ausdrücke kogredient und

dient eine bestimmte Bedeutung. Ohne diese hat nur die
`aß zwei Transformationen kontragredient zueinander sind
26)], einen Sinn.

3. Unitäre Transformationen und Hermitesche Operatoren. Bei
n in 1 und 2 angestellten Betrachtungen war es gleichgültig, ob die Elemente der verwendeten Matrizen reell oder komplex waren. Unter den Transformationen mit reellen Koeffizienten hatten wir in § 2 insbesondere die orthogonalen betrachtet. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß $\sum x_j y_j$ in allen Koordinatensystemen dieselbe Gestalt hat, wenn die x und y derselben Transformation unterworfen werden. Dann muß aber jede Transformation mit ihrer kontragredienten zusammenfallen, d. h. es muß nach (26)

$$P^{*-1} = P, \quad PP^* = E_0 \tag{27}$$

sein. Das ergibt aber in Komponentenform geschrieben gerade die Orthogonalitätsbedingungen von § 2, 1 für die r_{jk}. Da also die orthogonalen Transformationen dadurch gekennzeichnet sind, den Ausdruck $\sum x_j y_j$ in sich überzuführen, invariant zu lassen, so entsteht durch Zusammensetzung von zwei orthogonalen Transformationen wieder eine orthogonale. Diese bilden also eine Gruppe. Da sie in der Gruppe aller linearen Transformationen enthalten sind, nennt man sie eine Untergruppe derselben.

Will man nun einen analogen Begriff für Transformationen mit komplexen Koeffizienten bilden, die auf Vektoren mit komplexen Komponenten ausgeübt werden, so sucht man nach denjenigen Transformationen $\mathfrak{x} = P\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y} = P\mathfrak{y}'$, vermöge deren

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \sum_j x_j \overline{y}_j = \sum_k x'_k \overline{y}'_k = \mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \tag{28}$$

wird, wobei der Querstrich den Übergang zur konjugiert komplexen Größe bedeutet. Man nennt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ das skalare Produkt[1]) von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in der hier behandelten Geometrie des komplexen Vektorraumes. Es ist offenbar nicht kommutativ (wie im reellen), sondern genügt nach (28) der Bedingung

$$\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}. \tag{29}$$

---

[1]) In diesem Paragraphen ist im folgenden unter dem „skalaren Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$" immer der durch (28) definierte Ausdruck zu verstehen, während in der Geometrie des orthogonalen (reellen) Vektorraumes nach § 2, 1 unter $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ der Ausdruck $\sum_j x_j y_j$ verstanden wird.

Nur die Bedingung des Senkrechtstehens ($\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$) ist kommutativ. Für P folgt ganz analog, wie aus (20) und (21) früher (23) folgte, die Bedingung

$$PP̃ = E_0, \quad \text{wobei} \quad \tilde{P} = \bar{P}^* \tag{30}$$

ist. Man nennt $\tilde{P}$ die zu P **hermitisch** konjugierte Matrix. Schreibt man (30) in Komponenten, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} r_{kj}\bar{r}_{lj} = \begin{cases} 1 \text{ für } k = l, \\ 0 \text{ für } k \neq l; \end{cases} \tag{31}$$

diese Bedingungen, die an die Stelle der Orthogonalitätsbedingungen (§ 2, 1) treten, kennzeichnen die „unitären" Matrizen P. Die entsprechenden Transformationen bilden die „Untergruppe der unitären Transformationen". Man spricht von einer „unitären" Geometrie des komplexen Vektorraumes, in der durch (28) das skalare Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und durch $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \sum x_j \overline{x_j}$ das Quadrat der Länge definiert ist.

Wenn $\mathfrak{A}$ irgendein linearer Operator im Sinne von (2) ist, so können wir ihm eine „Bilinearform" der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ zuordnen, nämlich

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{x})\,\mathfrak{z} = \sum_{j,k} a_{kj}\, x_j\, \bar{z}_k = (A\mathfrak{x})\,\mathfrak{z}, \tag{32}$$

wobei A die zum Operator $\mathfrak{A}$ gehörende Matrix der a_{kj} ist.

Führen wir nach (30) und (22) die zu A **hermitisch** konjugierte Matrix ein, so erhält man aus (32) wegen (29)

$$(A\mathfrak{x})\,\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\,(\tilde{A}\,\mathfrak{z}). \tag{33}$$

Ist insbesondere

$$\tilde{A} = A, \quad \text{d. h.} \quad a_{jk} = \bar{a}_{kj}, \tag{34}$$

so heißt A eine „sich selbst **hermitisch** konjugierte" oder einfach „**Hermitesche**" Matrix und die Bilinearform (32), wenn man in ihr $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}$ setzt,

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (A\mathfrak{x})\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(A\mathfrak{x}) \tag{35}$$

eine „**Hermitesche** Form". Wegen (35) und (29) nimmt eine **Hermitesche** Form für beliebige komplexe $\mathfrak{x}$ immer reelle Werte an.

Nach (30) und (23) ist allgemein

$$\widetilde{(AB)} = \tilde{B}\,\tilde{A}. \tag{36}$$

Sind also A und B **Hermitesche** Matrizen ($\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = B$), so ist die durch Zusammensetzung entstehende Matrix AB im allgemeinen **keine Hermitesche**. Es bilden also die **Hermiteschen** Transformationen in ihrer Gesamtheit **keine** Gruppe. Betrachten

wir aber ein System von Hermiteschen Transformationen, die miteinander vertauschbar sind, so daß für jedes Paar $AB = BA$ gilt, so folgt aus (36) $(\widetilde{AB}) = BA = AB$. Es entstehen somit wieder Hermitesche Matrizen. Betrachten wir diejenigen, welche mit einem gegebenen A vertauschbar sind, so bilden sie offenbar eine Gruppe.

4. Eigenwertdarstellung der Hermiteschen und unitären Operatoren. Führt man in eine Hermitesche Form durch eine unitäre Transformation $\mathfrak{x} = Y\mathfrak{x}'$ neue Koordinaten ein, so geht sie in eine Hermitesche Form in den neuen Koordinaten mit der zur Matrix A „äquivalenten Matrix“ $A' = Y^{-1}AY$ über. Es ist nämlich wegen $\widetilde{Y}Y = E_0$, demnach $\widetilde{Y} = Y^{-1}$ [Gl. (27)]' $A(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (A\mathfrak{x})\mathfrak{x} = (AY\mathfrak{x}')(Y\mathfrak{x}')$, ferner nach der zur Ableitung von (25) verwendeten Identität, die im unitären Raume, wo $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ durch (28) definiert ist, $(A\mathfrak{x})(B\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}(\widetilde{A}B)\mathfrak{y}$ lautet, $(A\mathfrak{x})\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'[(\widetilde{AY})Y]\bar{\mathfrak{x}}'$ und mit Anwendung von (36) gleich $\mathfrak{x}'(\widetilde{Y}\widetilde{A}Y)\mathfrak{x}' = (A'\mathfrak{x}')\mathfrak{x}'$ mit

$$A' = \widetilde{Y}AY = Y^{-1}AY. \tag{37}$$

Also erscheint schließlich

$$(A\mathfrak{x})\mathfrak{x} = (A'\mathfrak{x}')\mathfrak{x}'. \tag{38}$$

Wir können dann die Frage aufwerfen, ob es zu jedem A eine unitäre Transformation gibt, so daß die äquivalente Matrix $A' = Y^{-1}AY$ eine Diagonalmatrix ist. Dieses Problem ist offenbar analog zu der in § 2 behandelten orthogonalen Transformation einer quadratischen Form auf die Hauptachsengestalt. Da der Beweis im wesentlichen derselbe bleibt, sei er hier nur skizziert. Man sucht zunächst im R_n einen gegenüber dem Operator $\mathfrak{A}$ (Matrix A) invarianten eindimensionalen Unterraum, d. h. einen Vektor $\mathfrak{x}$, der sich durch Anwendung von A nur mit einem Skalar λ multipliziert, also die Gleichungen

$$A\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = \lambda x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

erfüllt. Dabei kann wegen der Homogenität immer $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$ angenommen werden. Ebenso wie in § 2, **3** folgt, daß nur für gewisse Werte von λ, die „Eigenwerte“ solcher Vektoren, „Eigenvektoren“ existieren. Aus (35) und (39) folgt, daß der Wert der Hermiteschen Form beim Einsetzen des Eigenvektors der entsprechende Eigenwert wird. Die Eigenwerte müssen also alle reell sein. Es sei λ_1 der kleinste Eigenwert; den entsprechenden Eigenvektor, den Einheitsvektor $\mathfrak{e}_1$, wählen wir als erste Achse eines Systems aufeinander senkrecht stehender Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$, also

$\mathfrak{e}_j \mathfrak{e}_k = 0$ im Sinne von (28). Der Übergang vom ursprünglichen System, in dem $\mathfrak{x}$ die Komponenten x_j hatte, zum neuen, in dem sie x'_j sind, geht durch eine unitäre Transformation vor sich. Die Komponenten von $\mathfrak{e}_1$ im neuen System sind also 1, 0, 0 ... 0, und aus Gl. (39), die jetzt $\sum_{k=1}^{n} a'_{jk} x'_k = \lambda_1 x'_j$ lautet, folgt, weil $\mathfrak{e}_1$ ihr genügen soll,

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{21} = a'_{31} = \cdots = a'_{n1} = 0.$$

Wegen (34) gilt auch $a'_{12} = \cdots = a'_{1n} = 0$, und $A(\mathfrak{x}\mathfrak{x})$ lautet in den neuen Koordinaten

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \lambda_1 x'_1 \overline{x}'_1 + A_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}),$$

wo A_1 eine Hermitesche Form im R_{n-1} ist, der von $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \ldots, \mathfrak{e}_n$ aufgespannt wird. Da der Operator $\mathfrak{A}$ den eindimensionalen Vektorraum, der durch $\mathfrak{e}_1$ bestimmt ist, invariant läßt, können wir auf A_1 dasselbe Verfahren anwenden wie früher auf A, ohne die schon bewirkte Zerlegung von A in $\lambda_1 x'_1 \overline{x}'_1$ und A_1 zu zerstören. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir schließlich ein System von n aufeinander senkrechten Eigenvektoren, die wir jetzt $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ nennen wollen, mit folgender Eigenschaft:

Bezeichnen wir die Komponenten von $\mathfrak{x}$ in diesem System mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$, so wird

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \overline{y}_k. \tag{40}$$

Sind unter den Eigenwerten λ_k einige gleich (z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$), so beginnt die Gl. (40) mit $\lambda_1(y_1 \overline{y}_1 + y_2 \overline{y}_2)$ und man kann noch eine unitäre Transformation in dem durch die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ aufgespannten Raume ausüben, ohne die Formel (40) zu ändern. Die zu mehrfachen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind also nicht eindeutig bestimmt. Wir können vielmehr beliebige zwei aufeinander senkrechte Vektoren in dem durch $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ aufgespannten Raume als Eigenvektoren wählen; nur dieser Raum, der „Eigenraum", ist durch die Matrix A selbst bestimmt. Wenn unter den $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \leqq n)$ untereinander verschieden sind, so können wir in (40) die Glieder mit gleichem λ_k zusammenfassen und erhalten die Formel

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k E_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}), \quad \sum_{k=1}^{m} E_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 1. \tag{41}$$

Jedes E_k ist von der Gestalt $\sum_j y_j \overline{y}_j$. In ihm sind alle Glieder von (40) zusammengefaßt, die zum Eigenwert α_k gehören, also so

viele, wie die Vielfachheit von α_k beträgt. Die Formen $E_k(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ sind offenbar „Einzelformen“ in dem Sinne, daß ihre Matrizen „Einzelmatrizen“ sind. So bedeutet z. B. die Matrix von $y_1 \overline{y}_1 + y_2 \overline{y}_2$ als Operator die Projektion auf die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$-Ebene; allgemein der zu E_k gehörige Operator $\mathfrak{E}_k$ (mit der Matrix E_k) die Projektion auf den k-ten Eigenraum. Zusammenfassend können wir sagen: wir können die Gl. (41) als Eigendarstellung des Operators $\mathfrak{A}$ auffassen. Sie setzt in Evidenz, daß $\mathfrak{A}$ voll reduzibel ist, da es die m Eigenräume, in die R_n zerfällt, invariant läßt. Zerlegen wir irgendeinen Vektor $\mathfrak{x}$ in seine Komponenten nach den Eigenräumen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_m$, so läßt sich $\mathfrak{A}$ aus den Operatoren $\mathfrak{A}_k$ in den m Eigenräumen zusammensetzen, und zwar ist $\mathfrak{A}_k = \alpha_k \mathfrak{E}_k$, und wegen $\mathfrak{x}_k = \mathfrak{E}_k \mathfrak{x}$ und (3) ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathfrak{E}_k \right) \mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathfrak{E}_k \mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathfrak{x}_k. \tag{42}$$

Wenn insbesondere alle Eigenvektoren gleich sind, ist der ganze R_n Eigenraum und jeder Vektor $\mathfrak{x}$ wird durch $\mathfrak{A}$ mit dem einzigen Eigenwert α multipliziert.

Ganz analog wie für die Hermiteschen Operatoren $\mathfrak{A}$ läßt sich auch für die zu den Matrizen Y gehörigen „unitären Operatoren“ $\mathfrak{Y}$ beweisen, daß sie voll reduzibel sind. Der Beweis erfolgt ganz analog durch Aufsuchen der invarianten Unterräume mit Hilfe der Gleichung $Y\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{x}$. Man findet genau wie oben, daß man durch unitäre Transformationen ein Koordinatensystem einführen kann, in dem $u'_{11} = \lambda_1$, $u'_{21} = u'_{31} = \cdots = u'_{n1} = 0$ ist. Da die Matrix Y aber nicht hermitisch, sondern unitär ist, so muß man weiter anstatt der Symmetriebedingungen $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$ die Orthogonalitätsbedingungen (31) zu Hilfe nehmen, in denen man den Summationsbuchstaben j auch beide Male an die erste Stelle setzen kann, da neben (30) auch $\widetilde{P}P = E_0$ gilt. Dann ist z. B.

$$u'_{11}\overline{u}'_{11} + u'_{21}\overline{u}'_{21} + \cdots + u'_{n1}\overline{u}'_{n1} = 1;$$

nun ist aber wegen $u'_{21} = \cdots = u'_{n1} = 0$ der absolute Betrag von $u'_{11} = 1$. Es ist also λ_1 wie auch alle übrigen Eigenwerte vom absoluten Betrag 1.

Aus $u'_{11}\overline{u}'_{11} + u_{12}\overline{u}'_{12} + \cdots + u_{1n}\overline{u}'_{1n} = 1$ und $|u'_{11}| = 1$ folgt dann wie früher aus den Symmetriebedingungen das Verschwinden der Größen $u'_{12}, u'_{13}, \ldots, u'_{1n}$. Daher schließt man durch Fortsetzung des Verfahrens: Jede unitäre Transformation $\mathfrak{y} = Y\mathfrak{x}$ läßt sich durch

Einführung geeigneter Koordinaten mit Hilfe einer gleichfalls unitären Tranformation auf die Gestalt

$$y'_j = \lambda_j x'_j \tag{43}$$

bringen, wo die λ_j Zahlen vom absoluten Betrag 1 sind.

Wir haben gesehen, daß jeder Hermitesche oder unitäre Operator zerfällt. Wir fragen nun, wann zwei Hermitesche Operatoren A und B dieselben Unterräume des R_n invariant lassen. Das kommt auf die Frage hinaus, wann zwei Hermitesche Formen dieselben Hauptachsen haben. Wenn das der Fall ist, so gibt es eine unitäre Matrix Y, so daß $A' = Y^{-1}AY$ und $B' = Y^{-1}BY$ beide Diagonalmatrizen sind. Da Diagonalmatrizen immer vertauschbar sind, also $A'B' = B'A'$, folgt daraus $Y^{-1}AYY^{-1}BY = Y^{-1}BYY^{-1}AY$ und daraus $AB = BA$. Damit A und B als Operatoren dieselben Unterräume invariant lassen, ist also notwendig, daß sie vertauschbar sind. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Wir können jedenfalls ein solches Koordinatensystem eingeführt denken, daß B eine Diagonalmatrix ist. Nach (40) ist dann $b_{kk} = \lambda_k$. Das Element der Matrix $AB - BA$ mit den Indizes k, l ist dann nach (14)

$$(AB - BA)_{kl} = a_{kl}(\lambda_l - \lambda_k). \tag{44}$$

Wir führen den Beweis nur für den Fall durch, daß alle Eigenwerte verschieden sind, daß also aus $k \neq l$ auch $\lambda_l \neq \lambda_k$ folgt. Aus $AB - BA = 0$ folgt dann nach (44), daß für $k \neq l$ immer $a_{kl} = 0$ ist, daß also A Diagonalmatrix ist. Sind demnach A und B vertauschbar, so wird mit B immer auch A Diagonalmatrix. Den Beweis für den Fall mehrfacher Eigenwerte findet man bei H. Weyl[1]). Die Matrizen A und B sind also dann und nur dann durch dieselbe unitäre Transformation auf eine Diagonalmatrix transformierbar, wenn A und B vertauschbar sind, also $AB = BA$ gilt. Wegen $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$ existieren auch A^{-1} und B^{-1} Bilden wir alle Matrizen, die durch beliebig wiederholte Multiplikation von A, B, A^{-1}, B^{-1} entstehen, so erhalten wir ein System von Matrizen und haben in den ihnen entsprechenden Operatoren ein System von linearen Transformationen vor uns, die eine Gruppe bilden. Denn mit A und A^{-1} ist auch $AA^{-1} = E_0$ enthalten. Wenn A und B vertauschbar sind, sind auch je zwei Elemente der Gruppe vertauschbar; man nennt sie dann eine „kommutative oder Abelsche Gruppe". Da alle Elemente der Gruppe gewisse Unterräume invariant lassen, ist die Gruppe voll reduzibel, sie zerfällt. Diese Unterräume sind offenbar diejenigen, die zugleich Eigenräume von A und B sind, also die Schnitträume von A mit

[1]) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig 1928.

denen von B. Sind alle Eigenwerte verschieden, also alle Eigenräume eindimensional, so fallen die Eigenräume von A mit denen von B zusammen. Die Gruppe läßt n eindimensionale Unterräume des R_n invariant, sie zerfällt in n lineare Transformationen des R_1.

5. Infinitesimale Transformationen einer Gruppe. Wenn wir zunächst wieder die Gruppe der orthogonalen Transformationen betrachten, die geometrisch gesprochen Drehungen des R_n mit Festhaltung des Ursprungs darstellen, können wir von solchen Transformationen ausgehen, die nur wenig von der Identität verschieden sind, also den Raum nur wenig drehen. Man spricht dann von infinitesimalen Drehungen und allgemein von infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Die Matrix einer solchen infinitesimalen Transformation darf sich dann von der Einheitsmatrix nur um eine Matrix mit infinitesimalen Gliedern unterscheiden. Eine orthogonale Matrix O muß also, wenn sie infinitesimal sein soll, von der Gestalt

$$O = E_0 + A\Delta\tau \tag{45}$$

sein, wo A eine endliche Matrix und $\Delta\tau$ eine infinitesimale Zahl ist.

Da O wegen der Orthogonalität nach (27) der Bedingung $OO^* = E_0$ genügen muß, folgt aus (45), wenn wir nur die in $\Delta\tau$ linearen Glieder beibehalten, daß

$$E_0 + (A + A^*)\Delta\tau = E_0,$$

also

$$A + A^* = 0, \quad A = -A^*, \quad a_{jk} = -a_{kj} \tag{46}$$

sein muß. Die Matrix A einer infinitesimalen Transformation muß eine schiefsymmetrische sein. Die infinitesimale Transformation selbst lautet dann

$$\mathfrak{x}' = O\mathfrak{x} = (E_0 + A\Delta\tau)\mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad \Delta\mathfrak{x} = A\Delta\tau \,.\, \mathfrak{x}, \tag{47}$$

wenn wir $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x} = \Delta\mathfrak{x}$ setzen. Denken wir uns die infinitesimale Transformation so entstanden, daß ein Parameter τ von 0 bis $\Delta\tau$ wächst, so läßt sie sich ohne Verwendung infinitesimaler Größen nach (47) in der Gestalt

$$\lim_{\Delta\tau = 0} \frac{\Delta\mathfrak{x}}{\Delta\tau} = \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = A\mathfrak{x} \tag{48}$$

darstellen. Wir können dann τ als eine fingierte Zeit deuten, in der die Drehung stattfindet. Im Falle des dreidimensionalen Raumes können wir Gl. (48) sehr einfach in Vektorform schreiben. Die antisymmetrische Matrix hat dann nur drei unabhängige Komponenten, die wir zu einem Vektor $\overline{\omega}$ (nach § 4, 3) zusammenfassen können.

Das Produkt $\Delta\mathfrak{x}$ ist dann einfach das äußere Produkt aus $\bar{\omega}$ in $\mathfrak{x}$ und Gl. (48) lautet

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \bar{\omega} \times \mathfrak{x}, \tag{49}$$

was genau der Gl. (23) in § 4 entspricht.

Haben wir es mit einer unitären Transformation mit der Matrix Y zu tun, so haben wir, wenn sie infinitesimal sein soll, analog zu (45) die Formel $Y = E_0 + B\Delta\tau$. Da hier nach (30) $Y\widetilde{Y} = E_0$ sein muß, so folgt analog zu (46)

$$B + \widetilde{B} = 0, \quad B = -\widetilde{B}, \quad b_{jk} = -\bar{b}_{kj}. \tag{50}$$

Setzen wir $B = i\Gamma$, wo i die imaginäre Einheit und Γ wieder eine Matrix ist, so folgt aus (50)

$$i\Gamma = i\widetilde{\Gamma}, \quad \Gamma = \widetilde{\Gamma}, \tag{51}$$

d. h. Γ ist eine Hermitesche Matrix. Jede infinitesimale unitäre Transformation schreibt sich analog zu (48) in der Gestalt

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = i\Gamma\mathfrak{x}, \tag{52}$$

wo Γ eine Hermitesche Matrix ist.

Wenn man nun eine infinitesimale Transformation immer wieder ausführt, so entstehen Transformationen, die immer mehr von der Identität abweichen. So entstehen durch Zusammensetzung infinitesimaler Drehungen die endlichen Drehungen. Es ist klar, daß alle endlichen Transformationen, die durch Wiederholung einer und derselben infinitesimalen Transformation entstehen, eine Gruppe bilden, denn man kann ja die Zusammensetzung von zwei solchen endlichen Transformationen auf die der ihnen zugrunde liegenden einzigen infinitesimalen zurückführen. Man sagt dann: eine infinitesimale Transformation „erzeugt“ eine Gruppe von endlichen Transformationen, nämlich alle die, die durch Wiederholung aus ihr entstehen. Wir können diese Erzeugung so auffassen, daß ein stetig veränderlicher positiver und negativer Werte fähiger Parameter τ von 0 auf $\Delta\tau$ und bei jedem Schritte wieder um $\Delta\tau$ wächst. Dem Werte $n\Delta\tau = \tau$ ist dann die durch n-fache Wiederholung der infinitesimalen Transformation entstehende Transformation zugeordnet, die bei sehr großem n eine endliche sein wird. Nennen wird das Erzeugnis der n-fachen Anwendung von

$$\mathfrak{x}' = (E_0 + B\Delta\tau)\mathfrak{x}$$

jetzt $\mathfrak{x}^{(n)}$, so ist

$$\mathfrak{x}^{(n)} = (E_0 + B\Delta\tau)^n\mathfrak{x} = \left(E_0 + B\frac{\tau}{n}\right)^n\mathfrak{x}. \tag{53}$$

ins Unendliche wachsen, ohne τ zu ändern, so
immer kleiner und kleiner und das Ergebnis
ransformationsmatrix, die dem Parameterwert τ
$Y(\tau)$ bezeichnen und den transformierten Vektor

$$\mathfrak{x}(\tau) = Y(\tau)\mathfrak{x}, \quad Y(\tau) = \lim_{n=\infty}\left(E_0 + B\frac{\tau}{n}\right)^n.$$

Wir können jetzt $\mathfrak{x}(\tau)$ in (54) als Lösung der Differentialgleichung (52) ($B = i\Gamma$) auffassen. Y und $\mathfrak{x}$ ändern sich stetig mit der fingierten Zeit τ, in der wir uns die Transformation vor sich gehend denken. Wir schreiben nun den Grenzwert in (54) genau so, als wenn B eine Zahl wäre, symbolisch als $e^{B\tau}$. Die Exponentialfunktion für Matrizen ist mithin durch den Grenzwert (54) definiert. Da aus dieser Definition das Multiplikationsgesetz für Exponentialfunktionen abgeleitet werden kann, folgt aus

(55) $$Y(\tau_1) = e^{B\tau_1} \quad \text{und} \quad Y(\tau_2) = e^{B\tau_2}$$

durch Multiplikation

(56) $$Y(\tau_1) . Y(\tau_2) = e^{B(\tau_1+\tau_2)} = Y(\tau_1 + \tau_2).$$

Da nun das System von Matrizen $Y(\tau)$ mit veränderlichem τ aus allen durch die infinitesimale Transformation $E_0 + B\Delta\tau$ erzeugten endlichen Transformationen besteht, enthält (56) die Aussage, daß dieses System eine Gruppe bildet. Und zwar haben wir es mit einer eingliedrigen Gruppe zu tun, weil das System nur von einem Parameter τ abhängt. Da dieser stetig alle reellen Werte durchlaufen kann, sprechen wir von einer kontinuierlichen Gruppe. Die durch eine Hermitesche Form Γ als infinitesimale Transformation erzeugte Gruppe unitärer Transformationen lautet dann wegen $B = i\Gamma$

(57) $$Y(\tau) = e^{i\Gamma\tau}.$$

Betrachten wir eine Hermitesche Form nach (35) und lassen wir den Vektor $\mathfrak{x}$ sich gemäß einer solchen eingliedrigen Gruppe von unitären Transformationen ändern, so geht nach (37) und (38) die Form in eine solche mit der transformierten Matrix

(58) $$A'(\tau) = Y^{-1}(\tau) A Y(\tau)$$

über. Ist die Transformation $Y(\tau)$ eine infinitesimal unitäre, also von der Gestalt $Y = E_0 + i\Gamma\Delta\tau$, so ist wegen $YY^{-1} = E_0$ bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $\Delta\tau$ die Matrix $Y^{-1} = E_0 - i\Gamma\Delta\tau$ und mit derselben Genauigkeit nach (58)

(59) $$A'(\Delta\tau) = A + i(A\Gamma - \Gamma A)\Delta\tau.$$

Setzen wir $A' - A = \Delta A$, so erhalten wir bei Grenzübergang zu verschwindendem $\Delta\tau$, also zu stetig vor sich gehender Transformation:

$$\frac{dA}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau = 0} \frac{\Delta A}{\Delta\tau} = i(A\Gamma - \Gamma A), \tag{60}$$

wobei der Differentialquotient der Matrix nach **1.**, S. 105 zu verstehen ist.

Lehrbücher

Zu § 1 und 2 (Lineare Algebra):

1. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra. Deutsch von H. Beck. Leipzig (Teubner), 2. Aufl. 1925. (Insbesondere die Kap. I bis XIII.)
2. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. Berlin (de Gruyter), 2. Aufl. 1925.
3. H. Weber, Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande. Braunschweig (Vieweg), 1912.

Zu § 3 und 4 (Vektor- und Tensorrechnung):

1. C. Runge, Vektoranalysis, Bd. I (Dreidimensionaler Raum). Leipzig (Hirzel), 2. Aufl. 1926.
2. M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig (Akademische Verlagsges.), 1928.
3. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig (Teubner), 4. Aufl. 1921.
4. E. Budde, Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. Braunschweig (Vieweg), 1914.

Zu § 5 (Lineare Transformationen):

1. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig (Hirzel) 1928.
2. A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Leipzig (Hirzel) 1929.

Drittes Kapitel

Komplexe Veränderliche

§ 1. Grundbegriffe

1. Rechenregeln. Zur Einführung von komplexen Zahlen gelangt man bekanntlich von der Auflösung algebraischer Gleichungen zweiten Grades aus. Verlangt man, daß jede solche Gleichung Lösungen besitzt, so ist man gezwungen, Aggregate von der Form $x + iy$ einzuführen, wo x und y beliebige reelle Zahlen bedeuten und i die „imaginäre Einheit“ $\sqrt{-1}$. Man nennt x den Realteil, y den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + iy$ und schreibt $x = \mathfrak{R}(z)$, $y = \mathfrak{I}(z)$. Rechnet man mit den komplexen Zahlen wie mit ge-

wöhnlichen reellen und ersetzt überall i^2 durch -1, so behalten alle algebraischen Rechenregeln für reelle Zahlen Gültigkeit. Im Bereich der komplexen Zahlen erweist sich, wie in § 4, 1 gezeigt werden soll, eine algebraische Gleichung beliebig hohen Grades als auflösbar.

Es ist bekannt, in welcher Weise man die komplexen Zahlen geometrisch deuten kann, indem man x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$ der Zahlenebene oder auch als Komponenten des Vektors $\overrightarrow{OP}$ auffaßt (Fig. 9). Jede algebraische Verknüpfung von komplexen Zahlen kann jetzt geometrisch veranschaulicht werden. So bedeutet eine Addition bzw. Subtraktion zweier

Fig. 9

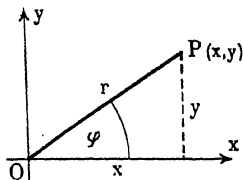
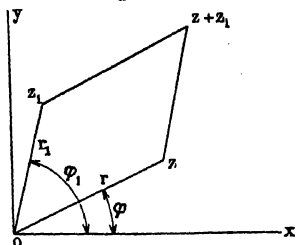



Fig. 10

komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + i y_1$, $z = x + i y$ die Addition bzw. Subtraktion der Bildvektoren nach dem Kräfteparallelogramm (s. Fig. 10). Multipliziert man $z = x + i y$ mit der reellen Zahl λ, so entsteht aus dem Vektor z ein Vektor von der $|\lambda|$-fachen Länge und von derselben oder entgegengesetzten Richtung, je nachdem λ positiv oder negativ ist.

Führt man Polarkoordinaten ein: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (s. Fig. 9), so ist $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Man bezeichnet den positiv genommenen Radiusvektor $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ als **Absolutbetrag** von z [1]), den nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmten Winkel φ als **Arkus** oder **Argument** von z und schreibt: $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{arc} z$ [2]). Setzt man zur Abkürzung $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ [3]), also $z = re^{i\varphi}$, so erhält man aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen die Rechenregel $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} . e^{i\varphi_2}$, also $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ oder

$$(1)\qquad |z_1 z_2| = |z_1| . |z_2| \text{ and } z_1 z_2 = \operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2, \quad (z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0)$$

[1]) Im Falle eines reellen z ($y = 0$) stimmt r mit dem gewöhnlich so genannten Betrag von z überein.

[2]) Nur im Falle eines verschwindenden z wird $\operatorname{arc} z$ unbestimmt.

[3]) Die Berechtigung dieser Schreibweise werden wir bald kennenlernen.

und da $e^{-i\varphi} \cdot e^{i\varphi} = 1$ ist, also $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$,

$$(1') \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \operatorname{arc}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{arc} z_1 - \operatorname{arc} z_2 \; (z_1 \neq 0,\; z_2 \neq 0).$$

Geometrisch bedeutet dies im Falle der Multiplikation, daß die Dreiecke $0, 1, z_1$; $0, z_2, z_1 z_2$ oder auch die Dreiecke $0, 1, z_2$; $0, z_1, z_1 z_2$ einander im eigentlichen Sinne, d. h. ohne Umlegung der Winkel, ähnlich sind. Dies ermöglicht die Konstruktion des Punktes $z_1 z_2$, falls die Punkte z_1 und z_2 gegeben sind (s. Fig. 11).

Fig. 11

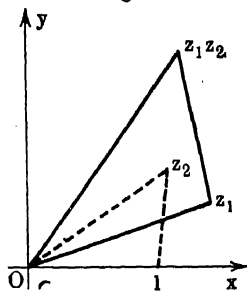
Oft ist es jedoch zweckmäßig, in einem Produkt az nur den einen Faktor z als Vektor zu deuten und a als dimensionslose Zahl zu betrachten: Man erhält den Vektor az aus dem Vektor z, indem man letzteren um den arc a dreht und im Verhältnis $|a| : 1$ vergrößert bzw. verkleinert.

Neben den algebraischen Grundoperationen soll noch eine weitere Operation besonders hervorgehoben werden: Übergang von einer komplexen Zahl $z = x + iy = re^{i\varphi}$ zur **konjugiert komplexen** $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$. Die Zahlen z und $\bar{z}$ geben zwei an der reellen Achse gespiegelte Punkte. Ist z reell, so ist $z = \bar{z}$, ist z rein imaginär, $z = -\bar{z}$. Man überzeugt sich weiter leicht von der Gültigkeit folgender Rechenregeln:

$$(2) \qquad \begin{cases} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Es seien schließlich noch zwei **Ungleichungen** angeführt, die später häufig gebraucht werden:

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|.$$

Sie haben folgende einfache geometrische Bedeutung: In einem Dreieck (das auch in eine Strecke ausarten darf) ist eine Seite nicht größer als die Summe und nicht kleiner als die Differenz der beiden anderen Seiten. Das Gleichheitszeichen kann nur eintreten, wenn $\operatorname{arc} z_1 = \operatorname{arc} z_2$, im Falle der Differenz muß außerdem $|z_1| \geqq |z_2|$ sein.

2. Folgen und Reihen von komplexen Zahlen. Die elementaren Transzendenten e^z, $\cos z$, $\sin z$ und ihre Umkehrfunktionen. Die elementaren Operationen gestatten bereits die Bildung von **rationalen**

Funktionen eines komplexen Arguments z, also von Ausdrücken der Gestalt

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m},$$

wo Zähler und Nenner ganze rationale Funktionen (Polynome) in z mit beliebigen komplexen Koeffizienten sind. Um über diese einfachsten Funktionen hinauszugelangen, wenden wir uns jetzt den Grenzprozessen im komplexen Gebiet zu.

Wir sagen, daß eine Folge komplexer Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ den Grenzwert a hat, und schreiben $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, wenn die Beträge $|a - a_n|$ (Entfernungen der Punkte a_n vom Grenzpunkt a) mit wachsendem n gegen 0 konvergieren.

Da $|a - a_n| = \sqrt{\{\Re(a - a_n)\}^2 + \{\Im(a - a_n)\}^2}$ ist, so muß im Falle der Konvergenz auch $\lim\limits_{n=\infty} \Re(a - a_n) = 0$ sein, ebenso $\lim\limits_{n=\infty} \Im(a - a_n) = 0$, d. h. es ist $\lim\limits_{n=\infty} \Re(a_n) = \Re(a)$, $\lim\limits_{n=\infty} \Im(a_n) = \Im(a)$. Umgekehrt folgt offenbar aus der Konvergenz der Real- und Imaginärteile der a_n die Konvergenz der a_n-Folge selbst.

Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums: Damit die a_n-Folge konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem positiven ε eine ganze Zahl n_ε angegeben werden kann, so daß für $n > n_\varepsilon$ und beliebiges positives ganzzahliges m die Ungleichheit $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ gilt.

Wie im Reellen schließt man aus $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n = b$ auf $\lim\limits_{n=\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n=\infty} a_n b_n = ab$. Ist $b \neq 0$, so ist außerdem $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Eine Reihe $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ von komplexen Zahlen u_n konvergiert definitionsgemäß und hat die Summe u, wenn die Partialsummen $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ gegen u konvergieren. Sie heißt absolut konvergent, wenn sogar die Reihe der Beträge $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$ konvergiert. In einer solchen Reihe darf man die Reihenglieder beliebig umordnen, ohne die Konvergenz zu zerstören oder die Reihensumme zu ändern. Auch darf man absolut konvergente Reihen miteinander gliedweise ausmultiplizieren wie gewöhnliche Summen und die entstehenden Produkte dann beliebig zusammenfassen. Die Produktreihe ist dann wieder absolut konvergent. Das alles kann man formal genau so beweisen wie im Reellen[1]).

---

[1]) Über Reihenkonvergenz und anschließende Fragen siehe auch IV, § 1 ff.

Diese Bemerkungen gestatten uns, die elementaren Transzendenten e^z, $\cos z$ und $\sin z$ sowie ihre Umkehrfunktionen $\log z$, $\operatorname{arc}\cos z$, $\operatorname{arc}\sin z$, die dem Leser für reelle z bekannt sind, auf komplexe Argumentwerte auszudehnen. Wir definieren sie durch die bekannten Potenzreihen

$$(3)\qquad \begin{cases} e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots, \\ \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots, \quad \sin z = \dfrac{z}{1!} - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots, \end{cases}$$

die offenbar für alle reellen und komplexen z absolut konvergieren.

Die wesentlichste Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, daß sie die Funktionalgleichung erfüllt: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} . e^{z_2}$. Man überzeugt sich von ihrer allgemeinen Gültigkeit, indem man die Reihen für e^{z_1} und e^{z_2} anschreibt, gliedweise miteinander multipliziert und die so entstehenden Glieder n-ter Ordnung nach der Binomialformel zusammenfaßt.

Zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht ein sehr enger Zusammenhang, der erst im Komplexen deutlich zutage tritt. Wie man aus den Reihenentwicklungen sofort erkennt, ist

$$(4)\qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Löst man diese Gleichungen nach $\cos z$ und $\sin z$ auf, so erhält man nach Einführung der Hyperbelfunktionen

$$\mathfrak{Cof}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

umgekehrt

$$(4')\qquad \cos z = \mathfrak{Cof}\, iz, \quad \sin z = -i\, \mathfrak{Sin}\, iz.$$

Insbesondere ist für reelle $z = x$ auf Grund von (4)

$$(4'')\qquad \cos x = \Re(e^{ix}), \quad \sin x = \Im(e^{ix})$$

Mit Hilfe der Formeln (4′) und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erkennt man leicht, daß die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

auch im Komplexen zu Recht bestehen und damit auch die Formeln, die aus jenen hervorgehen, wenn man die z-Werte speziell wählt. Setzt man $z_2 = \frac{\pi}{2}$, π oder 2π, so erhält man die aus dem Reellen bekannten Periodizitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Nach dem vorliegenden Muster ist es oft zweckmäßig, bei Ableitung trigonometrischer Formeln von entsprechenden Formeln für die Exponentialfunktion auszugehen. So fließen aus $(e^{iz})^n = e^{niz}$ und $(e^{-iz})^n = e^{-niz}$ (n positiv und ganz) die wichtigen Identitäten

$$(5) \qquad (\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz \quad \text{(Moivresche Formel!)}$$

und daraus durch Addition und Subtraktion der beiden Formeln (5) unter Anwendung der Binomialformel:

$$(5') \quad \begin{cases} \cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4} \cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots \\ \sin nz = \binom{n}{1} \cos^{n-1} z \sin z - \binom{n}{3} \cos^{n-3} z \sin^3 z \\ \qquad\qquad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots . \end{cases}$$

Hat man es nur mit reellen Argumentwerten zu tun, so kann man auch von (4'') ausgehen. Als Beispiel soll die Summe

$$S_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x$$

berechnet werden. Es ist

$$S_n = \Re\{1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{(n-1)ix}\}$$

$$= \Re\{1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^{n-1}\} = \Re \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1} = \Re \frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1} .$$

Multipliziert man hier Zähler und Nenner mit dem konjugierten Werte des Nenners, also mit $e^{-ix} - 1$, so erhält man endlich

$$S_n = \Re \frac{1 - e^{-ix} + e^{(n-1)ix} - e^{nix}}{2(1 - \cos x)},$$

somit

$$S_n = \frac{1 - \cos x + \cos(n-1)x - \cos nx}{2(1 - \cos x)} .$$

Wir wollen jetzt genauer den Werteverlauf von e^z untersuchen. Setzt man wieder $z = x + iy$, so ist $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, also

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{arc} e^z = y.$$

Nun durchläuft bekanntlich e^x monoton wachsend alle positiven Werte, falls x wachsend die Zahlenlinie beschreibt, also: Die Funktion e^z kann auch im Komplexen nicht verschwinden, jeden von 0 verschiedenen Wert nimmt sie jedoch (wegen der Periodizität von $\cos y$ und $\sin y$) unendlich oft an; man erhält alle z-Werte, für die sie denselben Wert annimmt, indem man zu einem von ihnen alle ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ hinzufügt. e^z ist also eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$.

Wir sind jetzt imstande, uns rasch über die Natur der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: $w = \log z$ (natürlicher Logarithmus von z) zu orientieren. Unter $w = u + iv$ ist natürlich jeder Wert zu verstehen, der der Gleichung $e^{u+iv} = z$ genügt. Es müssen also die reellen Gleichungen erfüllt sein:

$$e^u = |z| \; (= r), \quad v = \operatorname{arc} z \; (= \varphi).$$

Damit die erste Gleichung auflösbar ist, muß also $z \neq 0$ sein, und man hat dann

$$\log z = \log r + i\varphi, \tag{6}$$

wobei unter $\log r$ der reelle Logarithmus des positiven r zu verstehen ist. Formel (6) bringt entsprechend der Unbestimmtheit von φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π die aus der Periodizität von e^z entspringende unendliche Vieldeutigkeit von $\log z$ zum Ausdruck.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergibt für die Umkehrfunktion die bekannte Funktionalgleichung:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2.$$

Sie ist so zu verstehen, daß durch Addition von beliebigen Logarithmen von z_1 und z_2 ein Logarithmus von $z_1 z_2$ entsteht.

Die Einführung des Logarithmus gestattet auch, die allgemeine Potenz a^μ für beliebige komplexe Zahlen a und μ $(a \neq 0)$ zu definieren. Wir setzen (in Übereinstimmung mit der im Reellen gültigen Rechenregel $\log a^\mu = \mu \log a$):

$$a^\mu = e^{\mu \log a} = 1 + \frac{\mu \log a}{1!} + \frac{(\mu \log a)^2}{2!} + \cdots,$$

wobei unter $\log a$ jeder beliebige Logarithmus der als von 0 verschieden vorausgesetzten Basis a verstanden werden kann.

Ist insbesondere μ reell, so ist, falls $a = |a| e^{i\alpha}$ gesetzt wird,

$$a^\mu = e^{\mu[\log|a| + i(\alpha + 2k\pi)]} = e^{\mu \log|a|} e^{\mu(\alpha + 2k\pi)i} = |a|^\mu e^{\mu(\alpha + 2k\pi)i}\,[1]$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

also

$$|a^\mu| = |a|^\mu, \quad \operatorname{arc} a^\mu = \mu(\alpha + 2k\pi) = \mu \operatorname{arc} a. \tag{7}$$

Die zweite der Gl. (7) lehrt, daß a^μ im allgemeinen unendlich vieldeutig ist. Nur im Falle eines rationalen $\mu = \frac{p}{q}$ (p, q ganzzahlig und teilerfremd, $q > 0$) geben offenbar die Werte $k = 0, 1, \ldots q-1$ bereits alle Bestimmungen von a^μ. Die zugehörigen Punkte bilden

---

[1]) Die e-Potenzen sind hier natürlich entsprechend (3) zu verstehen und $|a|^\mu$ im gewöhnlichen Sinne als positive Größe.

ein regelmäßiges q-Eck, das dem Kreis um den Nullpunkt der Zahlenebene mit dem Radius $|a|^{\mu}$ eingeschrieben ist. Ist a positiv ($a > 0$, $\alpha = 0$), so gibt $k = 0$ den üblichen Wert von a^{μ}.

Wie man sich leicht überzeugt, bleiben die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln für Potenzen

$$(8) \qquad a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}, \quad (a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}, \quad a^{\mu} b^{\mu} = (ab)^{\mu}$$

auch im Komplexen in Gültigkeit, falls man nur passende Bestimmungen der Potenzen einsetzt. So muß man in der ersten Formel stets denselben Wert $\log a$ wählen, in der letzteren als Logarithmus von ab die Summe der links benutzten Logarithmen von a und b. In der mittleren muß man links und rechts denselben Logarithmus von a verwenden und links für den Logarithmus von a^{μ} den μ-fachen Wert des benutzten Logarithmus von a setzen.

Setzt man in der mittleren Gleichung μ gleich einem Stammbruch $\frac{1}{p}$ und ν gleich p, so ergibt sich $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{p} = a$. Die p verschiedenen Werte von $a^{\frac{1}{p}}$ sind also alle $p$te-Wurzeln aus a, d. h. Lösungen der Gleichung $z^{p} = a$. Da aus dieser $p \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} a$ folgt, ferner $|z|^{p} = |a|$, so hat man, wie (7) lehrt, sämtliche $p$te-Wurzeln gewonnen.

Ebenso wie die Exponentialfunktion gibt auch $\cos z$ und $\sin z$ zur Bildung von unendlich vieldeutigen Umkehrungen $\operatorname{arc}\cos z$, $\operatorname{arc}\sin z$ Veranlassung, die sich aber auf Grund von (4') leicht durch den Logarithmus ausdrücken lassen:

$$(9) \quad \operatorname{arc}\cos z = \frac{1}{i} \log\left(z \pm \sqrt{z^{2}-1}\right), \quad \operatorname{arc}\sin z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} \log\left(z \pm \sqrt{z^{2}-1}\right).$$

Über den genaueren Verlauf aller dieser Funktionen werden wir uns im nächsten Paragraphen von mehr geometrischem Gesichtspunkt aus orientieren.

3. Differenzierbarkeit und konforme Abbildung. Allgemein nennt man w eine Funktion von z und schreibt $w = f(z)$, wenn jedem Punkte z eines Bereichs $\mathfrak{B}$ der z-Ebene, des Definitionsbereichs der Funktion, nach einer Rechnungsvorschrift ein Wert w eindeutig zugeordnet ist[1]). Setzt man $z = x + iy$, $w = u + iv = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, so stellen $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ bestimmte reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x und y in $\mathfrak{B}$ dar und $w = f(z)$ erscheint zuerst nur als eine besondere Zusammenfassung derselben

[1]) Wir sehen hier von mehrdeutigen Funktionen ab.

zu einer komplexen Funktion. Den Bereich $\mathfrak{B}$ denken wir uns als ein zusammenhängendes Stück der Ebene, das von einer oder mehreren einfach geschlossenen Kurven begrenzt ist. Rechnen wir die Randpunkte hinzu, so deuten wir dies durch Überstreichen von $\mathfrak{B}$ an $(\overline{\mathfrak{B}})$.

Die Begriffe Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen werden im Komplexen formal genau so definiert wie im Reellen. Es ist $\lim\limits_{z=a} f(z) = A$ für einen Punkt a von $\overline{\mathfrak{B}}$, falls zu jedem positiven ε eine positive Zahl δ_ε angegeben werden kann, so daß für alle von a verschiedenen Punkte des Definitionsbereichs der Funktion, die der Ungleichung $|z-a| < \delta_\varepsilon$ genügen, $|f(z)-A| < \varepsilon$ ausfällt. Deutet man auch $w = f(z)$ als einen Punkt einer w-Ebene (die man auch mit der z-Ebene zusammenfallen lassen kann), denkt man sich also durch $w = f(z)$ eine Abbildung dargestellt, die aus jedem Punkt unseres Bereichs einen Punkt eines Bildbereichs hervorgehen läßt, so kann man unsere Definition anschaulicher auch so fassen: Durch Beschränkung von z auf von a verschiedene Punkte des Bereichs, die in einem genügend kleinen Kreis um a liegen, kann man erreichen, daß ihre Bildpunkte alle in einen vorgeschriebenen, beliebig klein wählbaren Kreis der w-Ebene um A hineinfallen.

Es gilt auch hier, wie man sich leicht überzeugt, das Cauchysche Konvergenzkriterium: Ein Grenzwert ist dann und nur dann vorhanden, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche Zahl δ_ε angegeben werden kann, so daß für jedes Paar von Punkten z_1, z_2 des Bereichs, die in den Kreis $|z-a| < \delta_\varepsilon$ hineinfallen, aber von a verschieden sind, $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ ausfällt.

Ist $\lim\limits_{z=a} f(z) = A$, $\lim\limits_{z=a} g(z) = B$, so ist $\lim\limits_{z=a} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$, $\lim\limits_{z=a} f(z)\, g(z) = AB$ und im Fall $B \neq 0$ auch $\lim\limits_{z=a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$.

$f(z)$ heißt an der Stelle $z = a$ stetig, wenn $\lim\limits_{z=a} f(z) = f(a)$ ist.

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z=a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} = f'(a)$ für einen Punkt von $\mathfrak{B}$, so heißt die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = a$ differenzierbar und $f'(a) = \left(\dfrac{d\,f(z)}{d\,z}\right)_{z=a}$ ihre Ableitung (Differentialquotient) daselbst.

Setzt man

$$\frac{f(z) - f(a)}{z-a} - f'(a) = \varepsilon(z),$$

so ist

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \varepsilon(z)(z-a).$$

Da $\lim_{z=a} \varepsilon(z) = 0$ ist, so haben wir $f(z)$ als Summe einer linearen Funktion $L(z) = f(a) + f'(a)(z-a)$ und eines Restes $R(z) = \varepsilon(z)(z-a)$ dargestellt, der der Limesrelation $\lim_{z=a} \frac{R(z)}{z-a} = 0$ genügt, der also bei Annäherung von z an a von höherer Ordnung 0 wird als die Distanz $|z-a|$. Darin kommt die eigentliche Bedeutung der Differenzierbarkeit zum Ausdruck.

Die Regeln für die Differentiation einer Summe, Differenz, eines Produkts und Quotienten zweier Funktionen sowie einer aus anderen zusammengesetzten Funktion und auch die Differentiation der Umkehrung einer Funktion kann man infolge der formalen Analogie unmittelbar aus dem Reellen übertragen.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einem ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ überall differenzierbar, so nennt man sie daselbst analytisch (oder auch regulär analytisch oder kurz regulär) und $\mathfrak{B}$ einen Regularitätsbereich von $f(z)$.

Während Grenzwertexistenz und Stetigkeit einer komplexen Funktion $f(z)$ weiter nichts bedeuten, als daß dasselbe für den Realteil $u = \varphi(x, y)$ für sich und den Imaginärteil $v = \psi(x, y)$ für sich zutrifft, ist die Forderung der Differenzierbarkeit von $f(z)$ eine viel weitergehende, da sie eine enge Verknüpfung von u und v zur Folge hat. Das lehrt die folgende Betrachtung: Setzt man $h = h_x + i\, h_y$, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für reelles $h (h_y = 0)$ gegeben durch $\frac{\varphi(x+h_x, y) - \varphi(x, y) + i\{\psi(x+h_x, y) - \psi(x, y)\}}{h_x}$, für rein imaginäres h $(h_x = 0)$ durch $\frac{\varphi(x, y+h_y) - \varphi(x, y) + i\{\psi(x, y+h_y) - \psi(x, y)\}}{i\, h_y}$. Der Grenzübergang $h_x = 0$ (Differentiation parallel zur x-Achse) im ersten Fall liefert somit $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, der Grenzübergang $h_y = 0$ im zweiten Fall (Differentiation parallel zur y-Achse) $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. Es ist also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10}$$

Man nennt diese fundamentalen Gleichungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir haben sie als notwendige Bedingungen für die Differenzierbarkeit erkannt. Man kann aber darüber hinaus zeigen, daß sie, wenigstens im Falle der Stetig-

keit der Ableitungen von u und v, mit dem analytischen Verhalten von $f(z)$ gleichbedeutend sind[1]).

Es ist nun die Frage von Interesse, welchen Bedingungen eine reelle Funktion genügen muß, damit sie als Real- bzw. Imaginärteil einer analytischen Funktion aufgefaßt werden kann. Daß man sie nicht willkürlich vorschreiben kann, erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ als Ableitungen einer Funktion der „Integrabilitätsbedingung" genügen müssen: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$[2]), daß also wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (10)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{11}$$

ist. $u(x, y)$ genügt also der sogenannten Laplaceschen Differentialgleichung. Dasselbe ist, wie man ebenso erkennt, auch bei $v(x, y)$ der Fall. Nun lehrt aber die Integralrechnung, daß die Integrabilitätsbedingung wenigstens bei einfach zusammenhängenden Bereichen bei gegebenem u die Existenz eines eindeutigen v gewährleistet. Es ist durch u bis auf eine additive Konstante bestimmt und durch das Linienintegral $\int(-u_y\,dx + u_x\,dy)$ gegeben. Eine analytische Funktion ist also durch ihren Realteil, der eine willkürliche Lösung der Laplaceschen Gleichung sein kann, bis auf eine additive rein imaginäre Konstante bestimmt.

Man nennt Lösungen der Laplaceschen Gleichung auch harmonische oder Potentialfunktionen und v eine zu u konjugierte harmonische Funktion. Umgekehrt ist offenbar $-u$ zu v konjugiert.

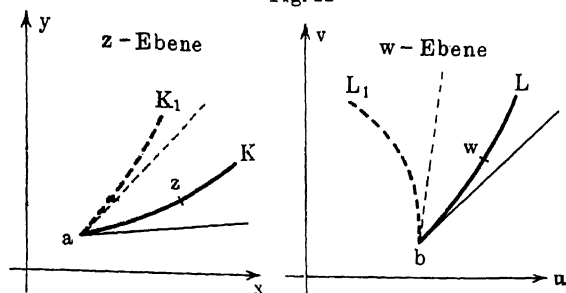
4. Winkeltreue der Abbildung. Welches ist die geometrische Bedeutung des analytischen Verhaltens von $f(z)$ für die durch $w = f(z)$ vermittelte Abbildung von $\mathfrak{B}$? Um dies zu erkennen, betrachten wir eine vom Punkte $z = a$ ausgehende Kurve K, die hier eine wohlbestimmte Tangente hat. Ihr entspricht eine vom Punkte $b = f(a)$ ausgehende Bildkurve L der w-Ebene (s. Fig. 12). Es sei nun z ein zu a benachbarter Punkt auf K, $w = f(z)$ sein Bildpunkt. Nach **3** ist dann $w - b = [f'(a) + \varepsilon(z)](z - a)$. Wir machen nun die wesentliche Voraussetzung, daß $f'(a)$ von Null verschieden sei. Dann ist bei genügender Nachbarschaft von z und a auch $f'(a) + \varepsilon(z)$ ungleich Null und also

$$\operatorname{arc}(w-b) = \operatorname{arc}[f'(a)+\varepsilon] + \operatorname{arc}(z-a), \quad |w-b| = |f'(a)+\varepsilon|\,|z-a| \tag{12}$$

[1]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I (1921), S. 39.

[2]) Eine analytische Funktion sowie ihr Real- und Imaginärteil haben, wie später gezeigt wird, Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Vgl. hierzu § 3, **3**.

Der Ausdruck links in der ersten Gleichung stellt den Winkel der Sehne bw mit der reellen Achse dar. Läßt man z auf K gegen a konvergieren, so ergibt (wegen $\lim\limits_{z=a} \varepsilon(z) = 0$) die erste der Gleichungen in der Grenze, daß auch L in b in bestimmter Richtung einläuft und daß der Winkel, den daselbst die Tangente mit der reellen Achse der w-Ebene einschließt, sich um den $\operatorname{arc} f'(a)$ [der wegen $f'(a) \neq 0$ nicht unbestimmt wird] von dem entsprechenden Tangentenwinkel von K in a unterscheidet. Der $\operatorname{arc} f'(a)$ hängt aber nur vom Punkt a, nicht von der Einmündung von K daselbst ab. Betrachtet man also eine zweite in a in bestimmter Richtung einmündende Kurve K_1 mit der Bildkurve L_1, so schließt L mit L_1 denselben Winkel (der Größe und dem Sinn nach) ein wie K und K_1. Man nennt Abbildungen, die den Winkel

Fig. 12

erhalten, winkeltreu, und zwar eigentlich oder uneigentlich winkeltreu, je nachdem ob auch der Sinn der Winkel erhalten bleibt oder in den entgegengesetzten verwandelt wird. Wir haben also das Resultat gewonnen: Eine analytische Funktion vermittelt in jedem Punkt, in dem ihre Ableitung nicht verschwindet, eine eigentlich winkeltreue Abbildung.

Die in der zweiten Gl. (12) auftretenden Sehnenlängen $|z-a|$ und $|w-b|$ stimmen bis auf Größen höherer Ordnung mit den entsprechenden Bogenlängen s und σ auf K bzw. L überein [1]), und man kann also die aus dieser Gleichung entspringende Limesgleichung $\lim\limits_{z=a} \dfrac{|w-b|}{|z-a|} = |f'(a)|$ ersetzen durch $\lim \dfrac{\sigma}{s} = |f'(a)|$. Auch hier ist der Grenzwert von σ/s nur vom Einmündungspunkt a allein, nicht aber von der Richtung der Einmündung abhängig. Roh ausgedrückt können wir also sagen, daß die von a ausgehenden Bogen-

[1]) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß $f'(z)$ stetig und die Kurve K und damit auch L stetig differenzierbar ist.

elemente alle die gleiche Vergrößerung (oder Verkleinerung, das Verhältnis ist $|f'(a)|:1$) erfahren. Man nennt Abbildungen dieser Art streckentreue Abbildungen, das im allgemeinen vom Orte abhängige Vergrößerungsverhältnis den Abbildungsmodul. Analytische Funktionen vermitteln also streckentreue Abbildungen. Der Abbildungsmodul wird durch den Betrag der Ableitung gegeben.

Man kann zeigen[1]), daß [Stetigkeit der Ableitungen der die Abbildung vermittelnden Funktionen $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ vorausgesetzt] Winkeltreue und Streckentreue vollständig äquivalente Eigenschaften einer Abbildung darstellen und daß jede eigentlich winkeltreue Abbildung durch eine analytische Funktion vermittelt wird. Man spricht kurz von einer konformen Abbildung. Da nun zwei uneigentlich winkeltreue Abbildungen, hintereinander ausgeführt, offenbar eine eigentlich winkeltreue Abbildung ergeben und die Spiegelung an der reellen Achse der z-Ebene (Übergang von z zu $\bar{z}$) eine uneigentliche Abbildung ist, so wird also jede uneigentlich konforme Abbildung durch eine Gleichung von der Form $w = f(\bar{z})$ gegeben, wo $f(z)$ analytisch ist.

Wir machten hier stets die Voraussetzung, daß $f' \neq 0$ ist, und tatsächlich sind, wie wir später sehen werden (vgl. § 2, 3), die Nullstellen der Ableitung Ausnahmepunkte der Winkeltreue.

Will man die durch eine Funktion $w = f(z)$ vermittelte Abbildung genauer studieren, so ist es oft nützlich, sich in der z-Ebene ein Netz anzulegen, indem man aus zwei Kurvenscharen $\xi(x, y) =$ konst., $\eta(x, y) =$ konst. je ein System von Kurven heraushebt, etwa dadurch, daß man den Konstanten eine arithmetische Folge von Werten erteilt. Ist die Differenz genügend klein gewählt, so entsteht eine annähernd parallelogrammatische Teilung der Ebene, die sich vermöge der Abbildung auf die Bildebene überträgt, und man kann die Abbildung dadurch anschaulich machen, daß man entsprechende Parallelogramme mit gleichen Nummern versieht. Für eine konforme Abbildung ist es am zweckmäßigsten, von einem Rechtecksnetz auszugehen (das natürlich durch zwei orthogonale Kurvenscharen definiert ist), da wegen der Winkeltreue aus ihm wieder ein Rechtecksnetz hervorgeht.

Unter den Rechtecksnetzen spielen wieder die weitaus wichtigste Rolle die isothermen Netze, das sind solche, die aus (im Limes) ähnlichen Rechtecken bestehen. Wegen der Winkel- und Streckentreue entsteht bei einer konformen Abbildung aus einem Isothermennetz wieder ein Isothermennetz, insbesondere aus

[1]) Vgl. H. Rademacher, Math. Zeitschr. 4, 131—138.

Zur Charakterisierung der zweiten Abbildung beachte man, daß w_1 und w dasselbe Argument haben, also auf demselben Halbstrahl vom 0-Punkte liegen, und daß ihre Beträge (Entfernungen vom 0-Punkte) zum Produkt ϱ^2 ergeben. Es bleiben also alle Punkte auf dem Kreis vom Radius ϱ um den 0-Punkt in Ruhe, jeder innere Punkt des Kreises wird mit einem äußeren vertauscht. Man spricht von einem Paar von Spiegelpunkten am Kreise $|w| = \varrho$ und nennt die Transformation eine Spiegelung an diesem Kreise und im Falle $\varrho = 1$ (durch passende Wahl der Längeneinheit kann man ihn immer herbeiführen) auch eine Transformation durch reziproke Radien (siehe die in Fig. 13 angegebene Konstruktion). Da bei Annäherung an den 0-Punkt der Spiegelpunkt sich unendlich weit von ihm entfernt, so ist es zweckmäßig, einen Punkt ∞ einzuführen und 0, ∞ als ein Spiegelpunktepaar zu betrachten.

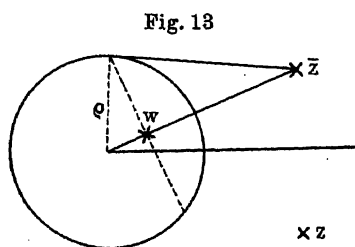



Fig. 13

Die durch den Punkt ∞ ergänzte Ebene bezeichnet man als Vollebene.

Bei Konvergenzbetrachtungen, die sich aufs Unendliche der Ebene beziehen, wird man naturgemäß folgende Definition zugrunde legen: Eine Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$ konvergiert gegen $z = \infty$, wenn $\lim |z_n| = \infty$ ist.

Da unsere Kreisspiegelung mit der Spiegelung an der reellen Achse zusammengesetzt die eigentlich konforme Abbildung b) liefert, so stellt sie selbst eine uneigentlich konforme Abbildung dar.

Indem wir jetzt zeigen, daß man die allgemeine lineare Transformation aus Transformationen vom Typus a) und b) zusammensetzen kann, gewinnen wir bereits eine weitgehende Einsicht in die Natur einer solchen Abbildung. Dividiert man nämlich in $\frac{az+b}{cz+d}$ $(c \neq 0)$ Zähler und Nenner, so erhält man $w = -\frac{\Delta}{c(cz+d)} + \frac{a}{c}$. Man gelangt also von z zu w über

$$z_1 = cz + d, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad w = Az_2 + B \left(A = -\frac{\Delta}{c}, \quad B = \frac{a}{c}\right).$$

Man sieht aus dieser Darstellung deutlich, daß eine lineare Funktion eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung der vollen z-Ebene auf die volle w-Ebene vermittelt; denn bei einer ganzen linearen Funktion entsprechen einander die Punkte $z = \infty$, $w = \infty$, bei $z_2 = 1/z_1$

werden die Punkte 0, ∞ miteinander vertauscht. (Die Stetigkeit einer Abbildung im Unendlichen ist in leicht ersichtlicher Weise auf Grund des oben eingeführten Konvergenzbegriffs zu definieren.) Definiert man endlich als Winkel zweier im Punkte ∞ einlaufenden Kurven den Winkel ihrer Bildkurven bei irgendeiner linearen Transformation, die den Punkt ∞ ins Endliche bringt (wegen der Gruppeneigenschaft der linearen Transformationen ist es gleichgültig, welche dieser Transformationen man benutzt), so werden die linearen Abbildungen auch in der vollen Ebene winkeltreu.

2. Kreisverwandtschaft. Wir wollen nun zeigen, daß bei einer linearen Transformation Kreise stets in Kreise übergehen. Die Geraden werden hier ebenfalls als Kreise aufgefaßt, und zwar als Kreise, die den Punkt ∞ enthalten. Es ist bemerkenswert, daß sich die linearen Transformationen sogar durch diese Eigenschaft vollständig charakterisieren lassen: Die linearen Transformationen sind die einzigen eigentlichen Transformationen, die Kreise in Kreise überführen. Man nennt die linearen Transformationen deshalb auch Kreisverwandtschaften, und zwar eigentliche Kreisverwandtschaften. Die uneigentlichen Kreisverwandtschaften sind, da die Spiegelung an der reellen Achse eine solche Transformation darstellt, durch Gleichungen von der Form $w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ gegeben.

Wir beweisen nur, daß die linearen Transformationen wirklich die angegebene Eigenschaft besitzen. Die Gleichung eines Kreises der $w = u + iv$-Ebene hat die Gestalt $a_0(u^2 + v^2) + 2a_1 u + 2a_2 v + a_3 = 0$. Die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_3$ werden natürlich als reell vorausgesetzt und nicht sämtlich Null. Ist $a_0 = 0$, so liegt die Gleichung einer Geraden vor. Statt u und v führen wir die „Minimalkoordinaten" ein: $w = u + iv$, $\bar{w} = u - iv$. Die Gleichung nimmt dann die Gestalt an: $Aw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + C = 0$, wo $A = a_0$, $C = a_3$ reell sind, $B = a_1 + i a_2$ dagegen eine beliebige komplexe Zahl sein darf. Setzt man nun $w = \frac{az + b}{cz + d}$, also $\bar{w} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$, so geht die Gleichung des Kreises, wie eine leichte Rechnung lehrt, in eine ebenso gebaute Gleichung in z über, womit der Beweis erbracht ist.

Durch Kombination der fundamentalen Eigenschaften der linearen Transformationen: Winkeltreue und Kreisverwandtschaft, kann man zu neuen Sätzen gelangen. Wir betrachten jetzt das Büschel der Kreise der z-Ebene, die durch die beiden Punkte α, β, die Grundpunkte des Büschels, hindurchgehen, und suchen ihre orthogonalen Trajektorien. Wenden wir auf die z-Ebene die lineare Transformation

so geht α in den 0-Punkt, β in den unendlich fernen ω-Ebene über, unser Büschel also in das Büschel von die durch den 0-Punkt gehen. Die orthogonale Trajek- der letzteren besteht offenbar aus den Kreisen, die den Mittelpunkt haben. Da nun bei linearen Transforma-

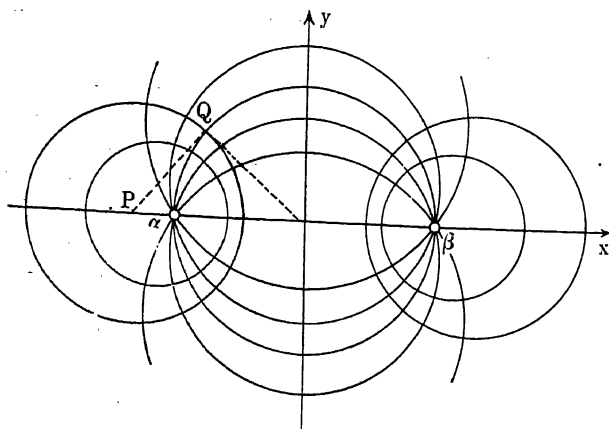
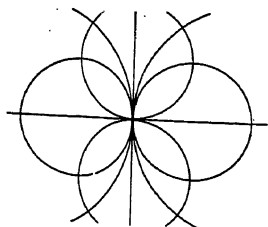
Fig. 14

tionen Kreise in Kreise und orthogonale Kurvenscharen in orthogonale Kurvenscharen übergehen, so erkennen wir, daß die orthogonalen Trajektorien unseres ursprünglichen Kreisbüschels selbst eine Schar von Kreisen sind. Da sie sich gegenseitig nicht schneiden, so bilden sie ein sogenanntes uneigentliches Büschel, das man das zum gegebenen konjugierte Büschel nennt. Die Punkte α, β gehören ihm als Nullkreise, d. h. Kreise mit dem Radius 0, an (s. Fig. 14).

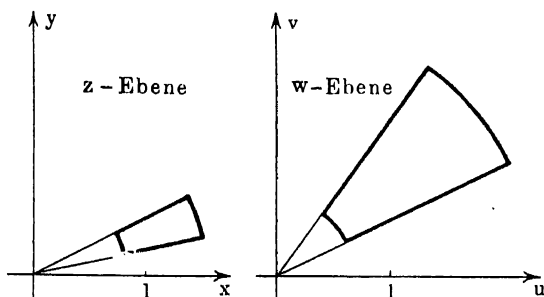
Fig. 15

Es ist nun von Bedeutung, daß man die Kreise des konjugierten Büschels auch durch die Eigenschaft charakterisieren kann, daß in bezug auf sie α und β Spiegelpunkte sind [1]). Ist nämlich (s. Fig. 14) P der Mittelpunkt und PQ der Radius eines solchen Kreises, so berührt die Gerade PQ in Q (zufolge der Orthogonalität) einen durch α, β gehenden Kreis, und die Potenz von P in bezug auf diesen Kreis ist $\overline{P\alpha}\,.\,\overline{P\beta} = \overline{PQ}^2$.

[1]) Im Falle einer Geraden hat man es mit Spiegelpunkten in gewöhnlichem Sinne zu tun.

Im Verein mit der früheren Charakterisierung ergibt sich hieraus die wichtige Tatsache, daß bei einer linearen Transformation Spiegelpunkte an einem Kreis in Spiegelpunkte am Bildkreis übergehen.

Schließlich sei noch auf den Grenzfall hingewiesen, wo α und β „unendlich benachbart" sind. Hier bestehen unsere Orthogonalbüschel aus den Kreisen, die zwei senkrechte Richtungen durch α berühren (vgl. Fig. 15). Ist $\alpha = \infty$, so hat man es mit zwei senkrechten Scharen von parallelen Geraden zu tun.

3. Die Abbildung $w = z^m$ (m positiv). Setzt man $z = r e^{i\varphi}$, $w = R e^{i\Phi}$, so wird $R = r^m$, $\Phi = m\varphi$. Da φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, so ist auch Φ nur modulo $m . 2\pi$ gegeben.

Fig. 16

Die Abbildung ist also nur dann eindeutig, wenn m ganzzahlig ist. Ist dies nicht der Fall, so muß man φ auf ein Intervall von einer Länge kleiner als 2π beschränken und genau $\Phi = m\varphi$ setzen, wenn man zu einer eindeutigen Abbildung gelangen will. — Die Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten zeigen sofort, daß jeder vom 0-Punkt ausgehende Halbstrahl $\varphi =$ konst. in einen ebensolchen Halbstrahl übergeht, jedoch mit dem m-fachen Winkel φ. Der positive Halbstrahl $\varphi = 0$ bleibt also in Ruhe. Läßt man einen Halbstrahl von dieser Ausgangslage sich mit konstanter Geschwindigkeit um den 0-Punkt drehen, so dreht sich auch der Bildstrahl von derselben Anfangslage aus und im selben Sinne, jedoch mit der m-fachen Geschwindigkeit. Jeder Winkelraum mit dem Scheitel im 0-Punkt wird auf einen ebensolchen Winkelraum, jedoch mit der m-fachen Öffnung abgebildet, insbesondere ein Winkelraum von der Öffnung π/m auf eine Halbebene. Ist die Öffnung gleich $2\pi/m$, so entsteht als Bild die ganze Ebene, wobei der gemeinsame Bildstrahl der beiden Randstrahlen des Ausgangswinkelraums doppelt zu zählen ist.

Da bei der Abbildung aus $r =$ konst. auch $R =$ konst. folgt, so wird also jeder Sektor mit dem Scheitel im Nullpunkt in einen ebensolchen Sektor, jedoch mit der m-fachen Winkelöffnung übergeführt (s. Fig. 16, in der $m = 2$ ist). Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Abbildung im 0-Punkt aufhört winkeltreu zu sein. Dies ist aber auch der einzige Ausnahmepunkt im Endlichen, da sonst überall die Ableitung $\frac{dw}{dz} = m z^{m-1} \neq 0$ ist [1]).

In den Anwendungen kommt besonders häufig die Abbildung durch $w = z^2$ vor. Setzt man wieder $w = u + iv$, so wird

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Wir fragen, aus welchen Kurven die Geraden der w-Ebene hervorgehen. Das Original der Geraden $au + bv + c = 0$ ist die Kurve $a(x^2 - y^2) + 2bxy + c = 0$. Dies ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Insbesondere liefern die Hyperbeln, die die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben, als Bilder die Parallelen zur u-Achse, die Hyperbeln, deren Asymptoten die Koordinatenachsen halbieren, die Parallelen zur v-Achse. Aus der Konformität der Abbildung kann man schließen, daß die beiden Hyperbelscharen orthogonal sind.

4. Die Abbildung $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Es ist $w = \frac{1}{2} r e^{i\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$, also $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$. Den Kreisen $r =$ konst. entsprechen also die konfokalen Ellipsen $\frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = \frac{1}{4}$ mit den Brennpunkten $-1, +1$, und zwar zwei Kreisen mit reziproken Radien dieselbe Ellipse. Im Falle des Einheitskreises $r = 1$ artet sie in die doppelt zu zählende Strecke $\overline{-1,1}$ aus. Aus den orthogonalen Trajektorien der Kreise, den Halbstrahlen $\varphi =$ konst., werden Äste der konfokalen Hyperbeln

$$\frac{u^2}{(\cos\varphi)^2} - \frac{v^2}{(\sin\varphi)^2} = 1$$

mit denselben Brennpunkten $-1, +1$, die also auf den konfokalen Ellipsen senkrecht stehen; denn die Ableitung $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ ist

[1]) Die Existenz der Ableitung und Formel im Falle eines nicht ganzzahligen m für $z \neq 0$ folgt aus der später bewiesenen Differenzierbarkeit von e^z bzw. $\log z$.

außer für $z = \pm 1$, den Originalpunkten der Brennpunkte, von 0 verschieden, die Abbildung also konform (s. Fig. 17).

Von besonderem Interesse für die Anwendungen in der Hydrodynamik sind die Originalkurven der Parallelen zur u-Achse: $v =$ konst. Sie treten dort als Stromlinien einer quellen- und wirbelfreien Strömung um den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ auf. Ihre gestaltliche Struktur kann man aus der Beziehung $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi$ entnehmen. Man sieht, daß sich jede von ihnen der Geraden $y = v$ nach beiden Seiten hin asymptotisch nähert. Die x-Achse selbst tritt als Gabelungslinie der Strömung auf (s. Fig. 18).

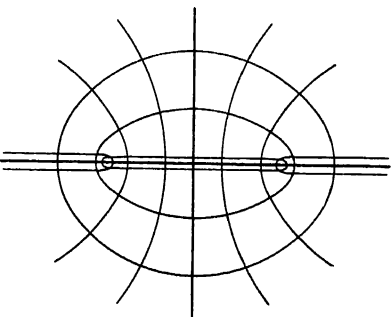
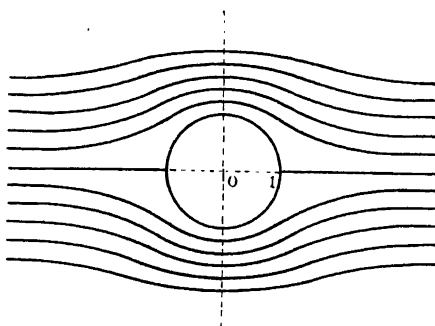



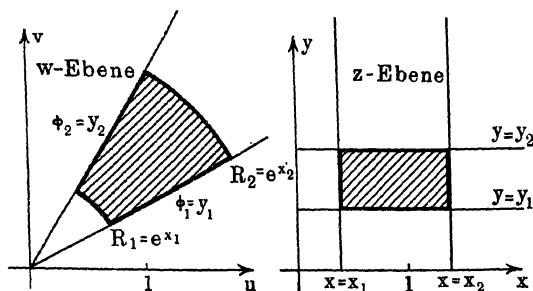
Fig. 17 Fig. 18

5. Die Abbildung $w = e^z$. Die Differentiation der Potenzreihe für e^z liefert $\frac{dw}{dz} = e^z$ [1]). Die Ableitung ist also überall von 0 verschieden, die Abbildung überall winkeltreu. Um sie vollständig zu überblicken, legen wir in der z-Ebene das Isothermennetz $x =$ konst., $y =$ konst. an. Setzt man wieder wie früher $w = R e^{i\Phi}$, so ist $R = e^x$, $\Phi = y$. Aus dem Isothermennetz der z-Ebene geht also das in den zwei letzten Beispielen benutzte logarithmische Netz $R =$ konst., $\Phi =$ konst. hervor, das also ebenfalls ein Isothermennetz ist; $x = \log R$ und $y = \Phi$ sind zugehörige isotherme Parameter. (Vgl. Fig. 19.)

Läßt man einen Punkt z eine Gerade $y =$ konst. von links nach rechts bescheiben, so durchläuft sein Bildpunkt den Halbstrahl $\varphi =$ konst. in der Richtung vom 0-Punkt gegen den Punkt ∞ zu. Verschiebt man andererseits die Gerade $y =$ konst. als Ganzes in

[1]) Daß die gliedweise Differentiation erlaubt ist, werden wir später beweisen.

Richtung wachsender y mit konstanter Geschwindigkeit, so dreht sich der aus ihm hervorgegangene Halbstrahl $\varphi\,(= y) =$ konst. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im positiven Sinn, und zwar so, daß er einen vollen Umlauf macht, wenn y um 2π wächst.

Ein von zwei Geraden $y =$ konst. begrenzter Streifen der z-Ebene wird also durch unsere Funktion auf einen Winkelraum abgebildet, insbesondere ein Streifen von der Breite π auf eine Halbebene, ein Streifen von der Breite 2π auf die volle Ebene. Den Begrenzungsgeraden entspricht dann derselbe doppelt zu zählende Halbstrahl.

Fig. 19

6. Die Abbildung $z = \mathfrak{Cof}\, w$ ($w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, z$). Es ist $z = \dfrac{e^w + e^{-w}}{2}$.

Man gelangt von w zu z über $w_1 = e^w$, $z = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$. Das sind aber gerade die in den zwei letzten Nummern behandelten Abbildungen. Aus den Geraden $u =$ konst., $v =$ konst. geht das Isothermennetz der Ellipsen und Hyperbeln der z-Ebene mit den Brennpunkten $-1, 1$ hervor. Die zugehörigen isothermen Parameter u und v, die mit x und y durch die Gleichungen $x = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2} \cos v = \mathfrak{Cof}\, u \cos v$, $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2} \sin v = \mathfrak{Sin}\, u \sin v$ zusammenhängen, nennt man elliptische Koordinaten.

§ 3. Der Cauchysche Fundamentalsatz und seine Konsequenzen

1. Integrale im komplexen Gebiet. Es sei $f(z)$ eine in einem Bereich $\mathfrak{B}$ der z-Ebene definierte stetige (nicht notwendig analytische) Funktion von z und $\mathfrak{K}$ eine daselbst verlaufende, die Punkte a und b verbindende orientierte Kurve, die in Parameterdarstellung gegeben sein möge: $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ (s. Fig. 20). Man

definiert das Integral $\int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz$, erstreckt über $\mathfrak{K}$, analog wie im Reellen als Grenzwert J der durch Unterteilung gebildeten „Näherungssumme“:

$$S = f(\zeta_1)(z_1 - z_0) + f(\zeta_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\zeta_n)(z_n - z_{n-1})$$

bei unendlich fein werdender Teilung. Es läßt sich zeigen, daß J unter sehr allgemeinen Voraussetzungen existiert; z. B. genügen bereits die im folgenden stets als erfüllt angesehenen Voraussetzungen, daß $\mathfrak{K}$ eine rektifizierbare Kurve ist, d. h. eine endliche Länge l besitzt (definiert als Grenzwert der Längen eingeschriebener Polygonzüge bei unendlicher Verfeinerung der Teilung). Ist $\mathfrak{K}$ ein Intervall der x-Achse $\alpha \leqq x \leqq \beta$, so ist

Fig. 20

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} f\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u\,dx + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} v\,dx.$$

Allgemein kann man, wenn die Kurve stetig differenzierbar ist, also $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ existiert und stetig ist, J als gewöhnliches Integral schreiben:

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,dt. \tag{1}$$

Eine Reihe von Rechenregeln, die für das Arbeiten mit komplexen Integralen nützlich sind, seien hier ohne Beweise zusammengestellt.

a) Geht $\mathfrak{K}'$ aus $\mathfrak{K}$ durch Umkehrung der Orientierung hervor, so ist

$$\int\limits_{\mathfrak{K}'} f(z)\,dz = -\int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz. \tag{2}$$

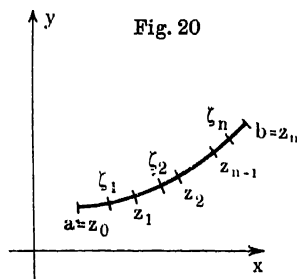
b) Ist $\mathfrak{K}$ durch einen Teilpunkt in zwei Teilkurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zerlegt, so ist

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathfrak{K}_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathfrak{K}_2} f(z)\,dz. \tag{3}$$

Gl. (1) gilt also auch für abteilungsweise stetig differenzierbare Kurven.

c) Es ist weiter für $c =$ konst.

$$\int\limits_{\mathfrak{K}} \{f_1(z) + f_2(z)\}\,dz = \int\limits_{\mathfrak{K}} f_1(z)dz + \int\limits_{\mathfrak{K}} f_2(z)dz, \quad \int\limits_{\mathfrak{K}} c f(z)dz = c\int\limits_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz. \tag{4}$$

Die erste dieser Formeln kann natürlich auf mehr als zwei Summanden ausgedehnt werden. Sie gilt aber auch, wie sich leicht zeigen

läßt, für eine gleichmäßig konvergierende[1]) unendliche Reihe von Funktionen $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots$; es ist also

$$(5) \qquad \int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{K}} f_1(z)\,dz + \int_{\mathfrak{K}} f_2(z)\,dz + \cdots$$

Bezeichnet man die n-te Partialsumme der f_n-Reihe mit $s_n(z)$, so kann man Formel (5) auch so schreiben:

$$(5') \qquad \int_{\mathfrak{K}} \lim_{n=\infty} s_n(z)\,dz = \lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{K}} s_n(z)\,dz.$$

Sie besagt, daß zwei Grenzübergänge vertauschbar sind.

Sehr nützlich ist eine Erweiterung der Formel (5′), die sich auf Funktionen $s(z, \alpha)$ bezieht, die nicht wie die $s_n(z)$ von einem Index n, sondern von einem kontinuierlichen (reellen oder komplexen) Parameter α abhängen: Findet auf $\mathfrak{K}$ die Konvergenz $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} s(z, \alpha) = f(z)$[2]) gleichmäßig statt, d. h. ist $|f(z) - s(z, \alpha)|$ für genügend kleine, aber von 0 verschiedene Differenzen $|\alpha - \alpha_0|$ überall auf $\mathfrak{K}$ kleiner als eine vorgeschriebene Zahl $\varepsilon > 0$, so ist

$$(6) \qquad \lim_{\alpha=\alpha_0} \int_{\mathfrak{K}} s(z, \alpha)\,dz = \int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz \left(= \int_{\mathfrak{K}} \lim_{\alpha=\alpha_0} s(z, \alpha)\,dz\right).$$

Aus (6) folgt: Konvergiert der Differenzenquotient $\dfrac{s(z,\alpha) - s(z,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$ beim Grenzübergang $\alpha \longrightarrow \alpha_0$ gleichmäßig gegen die Ableitung $\left(\dfrac{\partial s(z, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0}$, so ist für $\alpha = \alpha_0$

$$(6') \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\int_{\mathfrak{K}} s(z, \alpha)\,dz\right) = \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial s(z, a)}{\partial \alpha}\,dz.$$

Man darf also unter dem Integralzeichen differenzieren. Dabei ist es wieder gleichgültig, ob α eine reelle oder komplexe Variable ist.

In der reellen Integralrechnung bedient man sich oft zur Auswertung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer Stammfunktion

---

[1]) Eine Reihe von Funktionen konvergiert gleichmäßig in einem Bereich, wenn zu jedem positiven ε eine natürliche Zahl n_ε angegeben werden kann, so daß bei beliebigem positiven ganzen m für $n > n_\varepsilon$ stets $|f_{n+m} - f_m| < \varepsilon$ gilt, und zwar für alle Punkte des Bereichs. Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen ist wieder stetig. (Vgl. auch IV, § 1, 2.)

[2]) $s(z, \alpha)$ braucht für $\alpha = \alpha_0$ nicht erklärt zu sein.

$F(x)$ des Integranden [d. h. einer Funktion, die $f(x)$ zur Ableitung hat] auf Grund der fundamentalen Beziehung $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Diese Formel bleibt aber auch im Komplexen gültig, falls $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ überhaupt eine Stammfunktion $F(z)$ besitzt. Denn es ist für eine Kurve $\mathfrak{K}$ mit abteilungsweise stetiger Tangente (wir beschränken uns der Einfachheit halber auf diesen Fall)

$$\int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta F'(z)\frac{dz}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{dF}{dt}\,dt = F(b) - F(a).$$

Das Integral $\int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz$ hängt hier also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab oder, was dasselbe ist, es verschwindet für jeden geschlossenen Weg in $\mathfrak{B}$. Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß das Integral, falls es vom Wege unabhängig ist, als Funktion der oberen Grenze aufgefaßt, eine Stammfunktion seines Integranden darstellt; denn es ist, falls $\int_a^z f(z)\,dz = F(z)$ gesetzt wird, $\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} = \dfrac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dz$, also, wie leicht ersichtlich, $\lim\limits_{h=0} \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$.

Die Frage nach der Existenz einer Stammfunktion ist also gleichbedeutend mit der Frage, wie $f(z)$ beschaffen sein muß, damit das Integral $\int f(z)\,dz$ für jeden geschlossenen Weg verschwinde. Die folgenden Überlegungen werden zu dem Resultat führen, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn $f(z)$ analytisch ist, also selbst eine Stammfunktion ist. Die Bedingung der Integrierbarkeit ist also äquivalent der Bedingung der Differenzierbarkeit.

2. Der Fundamentalsatz. Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, d. h. ein Bereich, der nur von einer einzigen Kurve begrenzt ist, $f(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ definierte analytische Funktion. Dann behauptet der Fundamentalsatz, daß für jede geschlossene rektifizierbare Kurve $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{B}$

$$\int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz = 0 \tag{7}$$

ist. Wir deuten den Beweis nur für die orientierte Berandung eines Dreiecks an, da er dann durch einfache Schlüsse auf Grund der

Rechenregeln (2) und (3) auf beliebige Polygone übertragen werden kann und Integrale über allgemein rektifizierbare Kurven sich, wie wir nicht weiter ausführen wollen, durch Polygonintegrale beliebig genau approximieren lassen.

Ein wesentliches Beweismittel ist hierbei die Integralungleichung

$$\left|\int_{\mathfrak{K}} f(z)\,dz\right| \leqq \int |f(z)|\,ds$$

(s = Bogenlänge), die sich aus der entsprechenden Abschätzung für Näherungssummen fast unmittelbar ergibt.

Es sei $\mathfrak{D}$ die Berandung des Dreiecks, über die wir das Integral erstrecken wollen. Indem wir die Halbierungspunkte der Dreieckseiten miteinander verbinden, erhalten wir vier Teildreiecke, auf die wir denselben Teilungsprozeß anwenden. Nach n Schritten ist das Dreieck in 4^n Teildreiecke geteilt, deren Ränder (ebenso orientiert wie das Ausgangsdreieck) die Größe $l_n = l \cdot 2^{-n}$ besitzen, und das Integral über $\mathfrak{D}$ ist gleich der Summe der Integrale über die Teildreiecke; denn wie Fig. 21 erkennen läßt, werden bei der Integration über die Teildreiecke alle inneren Strecken zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, so daß die von ihnen herrührenden Beiträge zum Integral sich aufheben. Ist z_ν der Schwerpunkt des ν-ten Dreiecks, so können wir setzen:

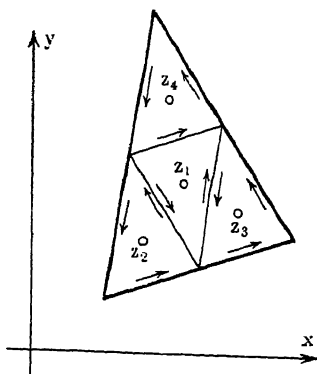



Fig. 21

$$f(z) = f(z_\nu) + f'(z_\nu)(z - z_\nu) + \varepsilon_\nu(z)(z - z_\nu) = \mathfrak{L}_\nu + \varepsilon_\nu(z)(z - z_\nu),$$

und es ist, da $\mathfrak{L}_\nu(z)$ eine Stammfunktion $f(z_\nu)(z - z_\nu) + \frac{f'(z_\nu)}{2}(z - z_\nu)^2$ besitzt, $\int_{\mathfrak{D}_\nu} \mathfrak{L}_\nu(z)\,dz = 0$. Es bleiben somit nur die über die Dreiecksberandungen erstreckten Integrale von $\varepsilon_\nu(z)(z - z_\nu)$ übrig.

Machen wir die nicht unbedingt notwendige, über die Differenzierbarkeit hinausgehende Voraussetzung, daß die Größen $|\varepsilon_\nu(z)|$ bei Beschränkung von z auf das ν-te Dreieck für genügend hohes n alle gleichzeitig unter eine vorgeschriebene Zahl ε fallen (gleichmäßige Approximation des Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten), so wird jeder Integrand kleiner als $\varepsilon\, l_n/2$ (weil der Ab-

stand eines Umfangspunktes vom Schwerpunkt kleiner als der halbe Umfang sein muß), das Integral selbst nach der Integralungleichung kleiner als $\frac{\varepsilon l_n^2}{2}$, somit

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{D}} f(z)\,dz\right| < 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2}\, l_n^2 = \frac{\varepsilon}{2}\, l^2,$$

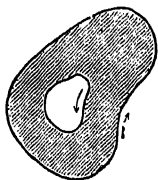
und daher ist, da ε beliebig klein gewählt werden kann, $\int\limits_{\mathfrak{D}} f(z)\,dz = 0$.

Ist $\mathfrak{B}$ ein mehrfach zusammenhängender Bereich, begrenzt von einer endlichen Anzahl einfach geschlossener rektifizierbarer Kurven, und $f(z)$ analytisch in einem Bereich $\mathfrak{B}'$, der $\mathfrak{B}$ und dessen Rand ganz im Innern enthält, so ist das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} f(z)\,dz = 0, \tag{7'}$$

falls man es über den gesamten Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ im positiven Sinn erstreckt. Das soll heißen, daß man die Randkurven von $\mathfrak{B}$ so orientiert, daß man bei ihrer Umlaufung das Innere von $\mathfrak{B}$ zur Linken hat (s. Fig. 22). Der Beweis läßt sich, wenn alle Teile der Begrenzung Polygone sind, in derselben Weise führen wie im früheren Falle.

Fig. 22

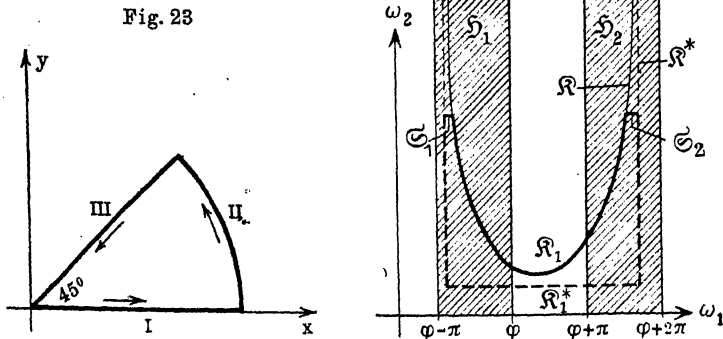
Der Fundamentalsatz gestattet oft, reelle Integrale durch Integration im komplexen Gebiet auszuwerten, oder verschiedene solche Integrale aufeinander zurückzuführen. Das möge an dem Beispiel der Fresnelschen Integrale

$$C = \int\limits_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}\, x^2\,dx, \quad S = \int\limits_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}\, x^2\,dx, \quad C + iS = \int\limits_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}x^2}\,dx$$

erläutert werden. Wir wenden den Fundamentalsatz an, indem wir das letzte der drei Integrale über die Berandung des in Fig. 23 angegebenen Kreissektors erstrecken, und erhalten, indem wir x durch z ersetzen und dafür nach Bedarf $re^{i\varphi}$ schreiben:

$$\int\limits_0^R e^{i\frac{\pi}{2}x^2}\,dx + \int\limits_0^{\pi/4} e^{i\frac{\pi}{2}R^2 e^{2i\varphi}} \cdot Rie^{i\varphi}\,d\varphi - \int\limits_0^R e^{-\frac{\pi}{4}r^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr = 0.$$

Beim Grenzübergang $R \longrightarrow \infty$ verschwindet das mittlere Integral, weil im ersten Quadranten $\sin\vartheta \geqq \frac{2}{\pi}\vartheta$, also der Betrag des Integranden $Re^{-\frac{\pi}{2}R^2\sin 2\varphi} \leqq Re^{-2R^2\varphi}$, das Integral somit $< \frac{1}{2R}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}R^2}\right)$.

Diese Schranke wird aber für $R \longrightarrow \infty$ tatsächlich 0. Es wird also das erste der drei Integrale gleich dem dritten, und damit sind die Fresnelschen Integrale auf das bekannte Laplacesche Integral $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}r^2}\,dr$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ zurückgeführt [I, § 4, 2 (21)]. Wegen $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ergibt sich $C + iS = \frac{1+i}{2}$, also $C = S = \frac{1}{2}$.

Viele in der mathematischen Physik auftretenden Funktionen lassen sich durch Integrale darstellen, die das Argument der Funktion als

Parameter enthalten. Sommerfeld[1]) hat eine solche Darstellung der Besselschen Funktionen $J_\nu(z)$ von beliebigem reellen Index ν angegeben, die eine Integration im Komplexen erfordert. Es ist

$$2\pi e^{i\frac{\nu\pi}{2}} J_\nu(z) = \int\limits_{\mathfrak{K}} e^{iz\cos\omega}\, e^{i\nu\omega}\, d\omega,$$

wo als Integrationsweg jede Kurve $\mathfrak{K}$ der ω-Ebene genommen werden darf, die folgendermaßen beschaffen ist: Es sei $z = r e^{i\varphi}$ und $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ seien die in Fig. 24 schraffierten Halbstreifen. Dann möge $\mathfrak{K}$ aus dem Unendlichen von $\mathfrak{H}_1$ kommend im Unendlichen von $\mathfrak{H}_2$ einmünden, und zwar so, daß die Kurve sich zwei im Innern von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ verlaufenden Halbstrahlen asymptotisch nähert. Das Integral ist also als ein uneigentliches Integral aufzufassen. Wir wollen uns nur von seiner Konvergenz überzeugen und von seiner Unabhängigkeit von der

---

[1]) Vgl. Sommerfeld, Math. Annalen **47** (1896), S. 317.

besonderen Wahl des Integrationsweges. Setzen wir $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, so wird der Exponent im Integranden

$$i z \cos\omega + i\nu\omega =$$

$$\frac{ir}{2}\{e^{i(\omega+\varphi)}+e^{i(-\omega+\varphi)}\}+i\nu\omega=\frac{ir}{2}\{e^{-\omega_2}e^{i(\omega_1+\varphi)}+e^{\omega_2}e^{i(-\omega_1+\varphi)}\}+i\nu(\omega_1+i\omega_2)$$

und somit (wegen der Realität von ν) der für den Absolutwert maßgebende Realteil hiervon $\frac{r}{2}\{e^{\omega_2}\sin(\omega_1-\varphi)-e^{-\omega_2}\sin(\omega_1+\varphi)\}-\nu\omega_2$.

Wegen der Beschränkungen für den Integrationsweg bleibt schließlich $\sin(\omega_1-\varphi)$ in beiden Streifen unterhalb einer festen negativen Zahl, und der Exponent wird bei Annäherung ans Unendliche negativ unendlich wie $-e^{\omega_2}$. Andererseits können wir, wie wir mit Hilfe des Cauchyschen Satzes zeigen wollen, ohne das Integral zu ändern, $\mathfrak{K}$ durch einen neuen Weg $\mathfrak{K}^*$ ersetzen, der (in Fig. 24 gestrichelt) aus den beiden Asymptoten und einem wagerechten Verbindungsstück besteht. Auf diesem Wege existiert jedenfalls das Integral zufolge der eben gegebenen Abschätzung. Nun betrachten wir den stärker ausgezogenen Teil $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$ und ersetzen ihn durch $\mathfrak{K}_1^*$ und die beiden horizontalen Stücke $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Da die Integrale über die horizontalen Verbindungswege $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nach der eben durchgeführten Abschätzung des Integranden 0 werden, wenn sie in $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ ins Unendliche rücken, so existiert das über $\mathfrak{K}$ erstreckte Integral und ist gleich dem über $\mathfrak{K}^*$ genommenen.

3. Cauchysche Formel. Von Gl. (7′) ausgehend, leiten wir jetzt eine für das Folgende fundamentale Integraldarstellung analytischer Funktionen ab, die man nach ihrem Entdecker als Cauchysche Formel bezeichnet. Die Voraussetzungen über Bereich und Funktion seien dieselben wie bisher. Wir bilden das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, wobei wir unter z einen inneren Punkt von $\mathfrak{B}$, ζ einen variablen Punkt auf dem positiv orientierten Rand $\mathfrak{R}$ verstehen. Von diesem Integral können wir nun nicht mehr behaupten, daß es verschwindet, da der Integrand, als Funktion von ζ betrachtet, in dem inneren Punkt z von $\mathfrak{B}$ nicht mehr regulär ist. Wir schneiden deshalb aus $\mathfrak{B}$ einen kleinen Kreis $\mathfrak{K}$ mit z als Mittelpunkt aus und erhalten einen neuen Bereich $\mathfrak{B}_1$ mit einem Rand $\mathfrak{R}_1$, der neben $\mathfrak{R}$ noch den eben definierten Kreis enthält. Die Anwendung der Gl. (7′) liefert hier

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

für einen beliebigen Kreisradius ϱ, wobei das Kreisintegral natürlich entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu nehmen ist. Wählen wir ϱ als kleine Zahl und setzen wir, um die Differenzierbarkeit von $f(\zeta)$ auszunutzen, $f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + \varepsilon(\zeta)(\zeta - z)$, so liefert das zweite Glied keinen Beitrag zum Kreisintegral, das dritte Glied einen verschwindend kleinen und das erste, indem man $\zeta - z = \varrho e^{i\vartheta}$, $d\zeta = i\varrho e^{i\vartheta} d\vartheta$ einführt, den Beitrag $f(z) . 2\pi i$. Also folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{8}$$

Das ist die Cauchysche Formel, die gestattet, die Werte der Funktion im Innern von $\mathfrak{B}$ aus ihren Randwerten zu berechnen. Man muß sich aber vor dem Irrtum hüten, daß man die Randwerte willkürlich vorschreiben kann. Setzt man nämlich mit irgendeiner Randfunktion das Integral an, so entsteht wohl eine analytische Funktion, die aber im allgemeinen keineswegs die gegebenen Randwerte annimmt.

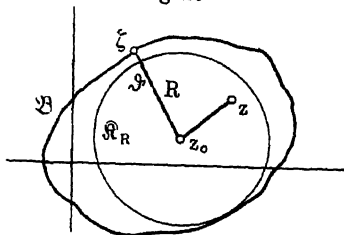



Fig. 25

Differenzieren wir (8) unter dem Integralzeichen, so erhalten wir eine Integralformel auch für die Ableitung. Da man diese weiter differenzieren kann, ergibt sich der Satz, daß eine analytische Funktion Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, und zwar ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Es ist nun die Frage naheliegend, ob $f(z)$ in der Umgebung eines inneren Punktes z_0 von $\mathfrak{B}$ durch die Taylorsche Reihe

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \tag{10}$$

dargestellt wird. Dies ist, wie wir jetzt zeigen wollen, tatsächlich der Fall, und zwar konvergiert (10) jedenfalls im Innern des größten Kreises $\mathfrak{K}_R$ mit dem Radius R um z_0, der noch ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Zum Beweis gehen wir wieder von der Cauchyschen Formel aus. Für Punkte z innerhalb $\mathfrak{K}_R$ ist $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ (s. Fig. 25), also $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$. Nun konvergiert die geometrische Reihe $1 + u + u^2 + \cdots$ auch im Komplexen, und zwar absolut, wenn $|u| < 1$ ist, und die

Konvergenz ist eine gleichmäßige bei Beschränkung von u auf einen Teilkreis $|u| \leqq \varrho$ $(0 < \varrho < 1)$. Es ist also für Punkte z, für die $\frac{|z-z_0|}{R} \leqq \varrho$ ist, d. h. für Punkte in dem Teilkreis um z_0 mit dem kleineren Radius ϱR:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \cdots,$$

und zwar ist die Konvergenz bei der eben angegebenen Beschränkung von z in der Variablen ζ auf $\Re$ eine gleichmäßige. Die Reihe behält diese Eigenschaft, wenn wir sie mit $f(\zeta)$ multiplizieren. Führen wir dann die durch (8) vorgeschriebene Integration gliedweise aus, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz gestattet ist, so ergibt sich

$$(10') \qquad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

mit

$$(9') \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Der Vergleich mit der Formel (9) lehrt die Identität der Reihen (10) und (10'), und da ϱ beliebig nahe an 1 angenommen werden kann, so ist die Gültigkeit der Reihenentwicklung im ganzen Innern von $\mathfrak{K}_R$ bewiesen. Die Formeln (9') heißen die Cauchyschen Koeffizientenformeln.

Aus ihnen ergeben sich die Abschätzungen:

$$(11) \qquad |a_k| \leqq \operatorname*{Max}_{\Re}(|f(z)|) : R_k.$$

Den Spezialfall $k = 0$ heben wir noch besonders hervor. Hier ist, wenn jetzt $\Re$ durch $\mathfrak{K}_R$ ersetzt wird, auf Grund von (8) und (11) und wegen $a_0 = f(z_0)$

$$(8') \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi})\, d\varphi. \quad |f(z_0)| \leqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{K}_R}(|f(z)|).$$

Formel (8') kann sehr einfach anschaulich gedeutet werden. Wir betrachten die bei der Abbildung $w = f(z)$ aus dem Kreise $\mathfrak{K}_R$ hervorgehende Bildkurve: $w_\varphi = f(z_0 + R e^{i\varphi})$ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ und denken uns diese mit Masse belegt derart, daß auf dem Bilde des Teilbogens $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ $(0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_2 < 2\pi)$ die Masse $\varphi_2 - \varphi_1$, also die Größe des abgebildeten Bogens, zu liegen kommt. Zerlegung von (8') in Reelles und Imaginäres zeigt dann, daß $f(z_0)$ den Schwerpunkt dieser Massenbelegung darstellt, und die Ungleichung bedeutet weiter

nichts, als daß dieser nicht außerhalb des größten Kreises um den 0-Punkt liegen kann, der die Kurve enthält. Man sieht hieraus noch mehr: Das Gleichheitszeichen kann nur eintreten, wenn die Bildkurve sich auf einen Punkt reduziert, wenn also $f(z)$ auf $\mathfrak{K}_R$ konstant ist, und die Integralformel (8), angewendet auf $\mathfrak{K}_R$, läßt erkennen, daß dann $f(z)$ auch innerhalb $\mathfrak{K}_R$ denselben konstanten Wert besitzt. (Vgl. 7.)

4. Laurententwicklung. Die Darstellung einer in einem Kreise analytischen Funktion durch eine Potenzreihe ist von Laurent verallgemeinert worden auf Funktionen, die in einem Kreisring $R_1 < |z - z_0| < R_2$ regulär sind. Für R_1 wird der Wert 0, für R_2 der Wert ∞ zugelassen. Um zu ihr zu gelangen, nehmen wir zunächst an, daß R_1 und R_2 beide endliche und positive Zahlen sind und daß die Funktion über die Kreise hinaus regulär ist, und wenden die Cauchysche Integralformel an. Sie liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}_{R_2}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}_{R_1}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

$\mathfrak{K}_{R_1}$, $\mathfrak{K}_{R_2}$ sind die beiden Begrenzungskreise, beide entgegen dem Sinne des Uhrzeigers durchlaufen. Da $|z - z_0| < R_2$ ist, so kann das erste Integral, wie wir gesehen haben, in eine nach positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Um zu einer Reihendarstellung des zweiten Integrals zu gelangen, setzen wir $\zeta - z = \zeta - z_0 - (z - z_0) = -(z - z_0)\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)$. Da jetzt $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ ist, so ist

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{\zeta - z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{(\zeta - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \cdots$$

und die Integration liefert wie oben:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}_{R_1}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

mit

$$a_{-p} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}_{R_1}} (\zeta - z_0)^{p-1} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Im ganzen erscheint also $f(z)$ dargestellt durch eine Reihe

$$(10'') \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die sowohl nach positiven wie negativen Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitet und gewiß im Innern des Kreisringes absolut konvergiert. Die Formeln für die Koeffizienten, die wir gewonnen haben, können in die eine zusammengefaßt werden:

$$(9'') \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}_R} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

wo $\mathfrak{K}_R$ irgendeinen der zu den Begrenzungskreisen konzentrischen Kreise mit $R_1 \leqq R \leqq R_2$ bedeuten kann. Es sind nämlich diese Integralwerte, wie man wieder dem Fundamentalsatz entnimmt, von der Wahl von R unabhängig.

Läßt man die Stetigkeitsvoraussetzung auf den Randkreisen fallen, so bleibt die Reihenentwicklung und auch die Koeffizientendarstellung in Gültigkeit. Nur muß man dann $R_1 < R < R_2$ nehmen. Man erkennt dies, indem man zunächst einen engeren Kreisring $R_1^* < |z - z_0| < R_2^*$ mit $R_1 < R_1^* < R_2^* < R_2$ betrachtet, in dem die früheren Voraussetzungen erfüllt sind, und beachtet, daß R_1^* und R_2^* beliebig nahe an R_1 bzw. R_2 angenommen werden können.

5. Reihen analytischer Funktionen. Potenzreihen. Die Möglichkeit der Potenzreihenentwicklung einer in einem Kreise analytischen Funktion führt uns auf folgende Fragen: Welche Gestalt hat überhaupt der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$(12) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\ [1]),$$

und wie verhält sich dort die durch sie dargestellte Funktion?

Die erste Frage ist im wesentlichen durch folgenden Satz beantwortet: Konvergiert die Potenzreihe überhaupt für einen von 0 verschiedenen Wert z_1, so konvergiert sie auch für jeden Wert z, für den $|z| < |z_1|$, also im Innern des Kreises um den 0-Punkt, der durch z_1 hindurchgeht.

Darin ist bereits enthalten, daß der Konvergenzbereich das Innere eines Kreises sein muß, eventuell nebst einem Teile der Peripherie. Man nennt ihn den Konvergenzkreis der Potenzreihe, seinen Radius ihren Konvergenzradius.

Beweis: Wenn die Reihe für z_1 konvergiert, so ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n z_1^n = 0$; also gibt es eine positive Zahl M, so daß $|a_n z_1^n| \leqq M$. Dann ist aber

$$(13) \qquad \left|a_n z^n\right| = \left|a_n z_1^n\right| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqq M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n,$$

und aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum\limits_0^\infty M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ folgt

[1]) Der Einfachheit halber ist $z_0 = 0$ gesetzt.

also auch die absolute Konvergenz der Reihe für den Wert z. Aus der Abschätzung (13) erkennt man, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert in jedem inneren Teilbereich des Konvergenzkreises, der nicht bis an die Peripherie desselben heranreicht.

Aus der letzten Bemerkung können wir weiter den analytischen Charakter der Reihensumme erschließen auf Grund des wichtigen Reihensatzes: Konvergiert eine Reihe von im Bereiche $\mathfrak{B}$ analytischen Funktionen

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots \tag{14}$$

in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\overline{\mathfrak{B}}'$ gleichmäßig, dann ist auch ihre Summe in $\mathfrak{B}$ analytisch.

Zum Beweis setzen wir für die n-te Partialsumme s_n in $\mathfrak{B}'$ die Cauchysche Formel an, gehen unter Beachtung der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Rande von $\mathfrak{B}'$ zur Grenze über und erhalten so die Tatsache, daß auch $s(z)$ durch seine Randwerte vermöge der Cauchyschen Formel dargestellt wird. In ihr darf man unter dem Integralzeichen differenzieren und bekommt

$$s^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{s(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \tag{15}$$

womit der analytische Charakter der Reihensumme in $\mathfrak{B}$ und insbesondere einer Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises bewiesen ist.

Daß die Potenzentwicklung einer Funktion stets mit ihrer Taylorschen Entwicklung für $z = 0$ zusammenfällt, folgt aus dem weiteren allgemeinen Reihensatz: Die Reihe (14) darf in $\mathfrak{B}$ beliebig oft gliedweise differenziert werden und die Reihe der Ableitungen ist selbst in jedem Teilbereich $\overline{\mathfrak{B}}'$ von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergent.

Zum Beweis bedienen wir uns wieder der Cauchyschen Formeln für die k-ten Ableitungen der f_n. Die Summation über k ergibt wieder auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von $s_n(z)$:

$$f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \cdots = \frac{k!}{2\pi i} \int \frac{s(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Auf der rechten Seite steht aber gerade die k-te Ableitung der Reihensumme, wie der Vergleich mit Gl. (15) lehrt.

Daß auch die Ableitungsreihen bei Beschränkung auf $\overline{\mathfrak{B}}'$ gleichmäßig konvergieren, ergibt sich unmittelbar aus der Integraldarstellung der k-ten Ableitungen, wenn man beachtet, daß der im Integranden auftretende Faktor von $f_n(\zeta)$ dem Betrage nach unterhalb δ^{-k-1}

bleibt, wo δ die Minimaldistanz der Bereichsränder von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ bedeutet.

Die k-malige gliedweise Differentiation von (12) ergibt nun speziell für $z = 0$ $k!\,a_k = f^{(k)}(0)$, womit die Identität der Potenzreihe mit der Taylorschen Entwicklung ihrer Summe nachgewiesen ist. Eine Potenzreihe kann also nur dann identisch verschwinden, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß man wegen der gleichmäßigen Konvergenz einer Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Teilkreis im Innern des Konvergenzkreises diese auch gliedweise integrieren darf. Die durch Differentiation und Integration auseinander hervorgehenden Reihen haben also alle denselben Konvergenzradius [1]).

6. Singularitäten analytischer Funktionen. Der Residuensatz. Wir hatten in **3** gesehen, daß eine in einem Kreisring $R_1 < |z - z_0| < R_2$ reguläre Funktion $f(z)$ dort in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden kann. Wir wollen jetzt allein den Fall $R_1 = 0$ betrachten. Man nennt dann z_0 eine Laurentsche Stelle der Funktion. Es sind nun folgende Fälle möglich:

1. Es treten keine negativen Potenzen auf. $f(z)$ ist dann auch in z_0, falls wir dort den Wert durch die Reihe erklären, regulär. Beginnt die Entwicklung mit einer positiven Potenz, etwa $(z - z_0)^k$ $(k \geqq 1)$, so spricht man von einer Nullstelle k-ter Ordnung. Man kann dann $f(z)$ in der Form schreiben $f(z) = (z - z_0)^k f_1(z)$ mit einem auch in z_0 regulären $f_1(z)$ und es ist $f_1(z_0) \neq 0$.

2. Es treten negative Potenzen auf. Man spricht von einer singulären Stelle der Funktion. Hier ist eine weitere Fallunterscheidung wesentlich.

2a. Es treten nur endlich viele negative Potenzen auf. Man nennt dann z_0 eine unwesentlich singuläre Stelle oder einen Pol der Funktion. Ist $(z - z_0)^{-k}$ die niedrigste vorkommende Potenz, so heißt k die Ordnung des Pols. Man kann die Funktion in der Form schreiben $f(z) = (z - z_0)^{-k} f_1(z)$ mit einem auch in z_0 regulären $f_1(z)$ und es ist $f_1(z_0) \neq 0$. Die Summe der negativen Potenzen $K(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ wird der kritische Teil der Singularität genannt.

[1]) Dies kann natürlich leicht auch direkt nachgewiesen werden.

2b. Es treten unendlich viele negative Potenzen auf. z_0 heißt dann eine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$.

Die eingeführten Begriffsbildungen lassen sich auf den unendlich fernen Punkt $z = \infty$ übertragen. $z = \infty$ ist eine Laurentstelle von $f(z)$, wenn $z = 0$ eine Laurentstelle von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ ist. Das bedeutet, daß $f(z)$ im Äußern eines Kreises $|z| = R_1$ regulär ist und daselbst eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| > R_1)$$

hat und

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \left(|z| < \frac{1}{R_1}\right)$$

ist. $f(z)$ wird in ∞ regulär oder singulär genannt, je nachdem ob $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z = 0$ die entsprechenden Eigenschaften hat. Ebenso ist eine Nullstelle und deren Vielfachheit in $z = \infty$ zu erklären. An der Reihenentwicklung von $f(z)$ erkennt man die Regularität also daran, daß keine positiven Potenzen auftreten. Es liegt eine k-fache Nullstelle vor, wenn sich $f(z)$ in der Form schreiben läßt $f(z) = z^{-k} f_1(z)$ mit einem auch in ∞ regulären $f_1(z)$ und von 0 verschiedenen $f_1(\infty)$. Im Falle einer Singularität erkennt man einen Pol daran, daß nur endlich viele positive Potenzen auftreten. Ihre Summe ist der kritische Teil der Singularität im Unendlichen.

Wir können jetzt beweisen, daß eine Funktion $f(z)$, die in der ganzen Ebene mit Einschluß des unendlich fernen Punktes mit Ausnahme von endlich vielen Polen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ regulär ist, notwendig rational ist. Ist nämlich $K_\nu(z)$ der kritische Teil der Funktion an der Stelle z_ν, so ist $f(z) - \sum_{\nu=1}^{m} K_\nu(z) = R(z)$ eine in der ganzen Ebene ohne Ausnahme (in der Vollebene) reguläre Funktion und wir müssen uns nur noch davon überzeugen, daß eine solche Funktion eine Konstante sein muß (Satz von Liouville). Zu dem Zwecke bilden wir die Funktion $S(z) = R(z) - R(\infty)$, die wieder in der Vollebene überall regulär ist, außerdem aber im Unendlichen verschwindet. Das Maximum M_R von $|S(z)|$ auf dem Kreise $|z - z_0| = R$ konvergiert also gegen 0, wenn R unendlich wird. Nun ist aber nach (8′) $|S(z_0)| \leq M_R$. Der Grenzübergang $R \to \infty$ liefert hiermit $S(z_0) = 0$, also $R(z) \equiv R(\infty)$. Es ist also

$$f(z) = A + \sum_{\nu=1}^{m} K_\nu(z), \quad \text{mit kontantem } A.$$

Da umgekehrt jede rationale Funktion $P(z)/Q(z)$ (P und Q Polynome — nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat der Nenner so viel Nullstellen, wie der Grad angibt, vgl. § 4, 1 —) nur endlich viele Pole besitzen kann, so ist durch die obige Formel die Möglichkeit und Eindeutigkeit einer Partialbruchzerlegung einer solchen Funktion dargetan.

Wir brauchen im folgenden eine Ausdehnung des Cauchyschen Fundamentalsatzes auf Funktionen, die in einem Bereich $\mathfrak{B}$ regulär sind, bis auf endlich viele Pole $z_1, z_2, \ldots, z_m$ im Innern. (Einen Spezialfall haben wir bereits betrachtet, als wir die Cauchysche Formel ableiteten.) Zu dem Zwecke schneiden wir aus $\mathfrak{B}$ kleine Kreise $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ um die Punkte $z_1, \ldots, z_m$ aus, so daß ein Bereich $\mathfrak{B}_1$ entsteht, in dem f regulär ist. Der Fundamentalsatz liefert die Gleichung:

$$\int_{\mathfrak{R}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{K}_1} f(z)\,dz + \int_{\mathfrak{K}_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\mathfrak{K}_m} f(z)\,dz,$$

wo $\mathfrak{R}$ den Rand von $\mathfrak{B}$ bedeutet und alle Integrale im Sinne des Uhrzeigers zu erstrecken sind. Für das Integral über den μ-ten Kreis ergibt die Reihenentwicklung um z_μ

$$\int_{\mathfrak{K}_\mu} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{K}_\mu} K_\mu(z)\,dz = 2\pi i \varkappa_\mu,$$

wo K_μ den kritischen Teil von $f(z)$ an der Stelle z_μ und $\varkappa_\mu$ den Koeffizienten von $\frac{1}{z - z_\mu}$ in K_μ bedeuten. Denn alle Integrale

$$\int_{\mathfrak{K}_\mu} (z - z_\mu)^n\,dz \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

sind offenbar 0 bis auf das Integral $\int \frac{dz}{z - z_\mu} = 2\pi i$, da ihre Integranden eindeutige Stammfunktionen besitzen. Wir haben also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{m} \varkappa_\mu. \tag{16}$$

Man nennt $\varkappa_\mu$ das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_μ, und die Aussage der Gl. (16) wird als Residuensatz bezeichnet. Der Leser möge sich überzeugen, daß er richtig bleibt, wenn $\mathfrak{B}$ den Punkt ∞ im Innern enthält, d. h. sämtliche Punkte außerhalb eines Kreises $|z| = R$ mit Einschluß des unendlich fernen ihm angehören, und wenn man als Residuum von $f(z)$ in diesem Punkte den negativ

genommenen Koeffizienten von $1/z$ in der Reihenentwicklung von $f(z)$ definiert. Der Residuensatz bildet eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Auswertung von komplexen Integralen auf geschlossenen Wegen.

Wenden wir nun den Satz insbesondere auf die Funktion $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ [die logarithmische Ableitung von $f(z)$] an. Die Funktion $f(z)$ setzen wir am Rande $\mathfrak{R}$ von 0 verschieden voraus, weil sonst $F(z)$ dort nicht regulär wäre. Als singuläre Stellen im Innern kommen offenbar nur die Nullstellen und Pole von $f(z)$ in Betracht. Es sei a eine k-fache Nullstelle. Dann ist $f(z) = (z-a)^k f_1(z)\,[f_1(a) \neq 0]$, also in der Umgebung von a der Quotient $\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a}$ + regulärer Bestandteil, also k das Residuum von $\frac{f'}{f}$ an der Stelle a. Ist b ein l-facher Pol von $f(z)$, also $f(z) = \frac{f_2(z)}{(z-b)^l}\,[f_2(b) \neq 0]$, so ist in der Umgebung von b $\frac{f'}{f} = -\frac{l}{z-b}$ + regulärer Bestandteil, also $-l$ das Residuum an der Stelle b. Man spricht in beiden Fällen vom logarithmischen Residuum von $f(z)$ Bezeichnet man mit N die Anzahl der Nullstellen, mit P die Anzahl der Pole von $f(z)$ in $\mathfrak{B}$, so liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P. \tag{16'}$$

Diese Gleichung gestattet im Falle einer in $\mathfrak{B}$ durchweg regulären Funktion ($P = 0$), die Wurzelanzahl der Gleichung $f(z) = 0$ in $\mathfrak{B}$ zu berechnen, vorausgesetzt, daß die Funktion am Rande nicht verschwindet.

Als eine sehr nützliche Folgerung aus (16') erweist sich der Satz von Rouché:

Im Innern und auf dem Rande eines Bereiches $\mathfrak{B}$ seien zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ eindeutig und analytisch. Auf dem Rande sei $\varphi(z) \neq 0$ und $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$. Dann haben in $\mathfrak{B}$ $\varphi(z)$ und $\varphi(z) - \psi(z)$ gleich viele Nullstellen.

Man bilde nämlich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi' - \psi'}{\varphi - \psi}\,dz,$$

so daß das Innere von $\mathfrak{B}$ zur Linken bleibt. Es ist nach (16′) gleich der Anzahl der Nullstellen von $\varphi - \psi$ in $\mathfrak{B}$. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi' - \psi'}{\varphi - \psi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{d}{dz}\log(\varphi - \psi)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{d}{dz}\log\varphi\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{d}{dz}\log\left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right)dz.$$

Im letzten Integral setze man nun $\zeta = 1 - \frac{\psi}{\varphi}\cdot$ Dann geht es über in

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\zeta}{\zeta},$$

erstreckt über das durch $\zeta = 1 - \frac{\psi}{\varphi}$ vermittelte Bild von $\mathfrak{R}$. Wegen $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| < 1$ auf $\mathfrak{R}$ gehört die Bildkurve aber ganz dem Kreise vom Radius eins um $\zeta = 1$ an. Daher verschwindet nach (7) $\int \frac{d\zeta}{\zeta}\cdot$ Das gibt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi' - \psi'}{\varphi - \psi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi'}{\varphi}\,dz,$$

was den Rouchéschen Satz beweist.

Hieraus folgt sofort folgende Bemerkung: Sei $w = f(z)$ eine in einer kreisförmigen Umgebung von $z = a$ reguläre Funktion und

$$f(z) - f(a) = (z - a)^k f_1(z)\,(f_1(a) \neq 0).$$

Die Umgebung von a sei so klein gewählt, daß daselbst $|f_1(z)|$ oberhalb einer positiven Zahl μ bleibt. Ihr Radius sei ϱ. Jeder Wert ω, für den $|\omega - f(a)| < \varrho^k\mu$, wird dann in der Umgebung genau k-mal angenommen. Eine wichtige Folgerung hiervon ist: Die Funktion ist in der Umgebung dann und nur dann umkehrbar, wenn $k = 1$ ist, d. h. wenn $f'(a)$ von Null verschieden ist.

7. Analytische Fortsetzung. Spiegelungsprinzip. Die bisher entwickelten Hilfsmittel setzen uns instand, analytische Funktionen aus gegebenen Daten zu konstruieren. So z. B. bringt die Cauchysche Formel eine Funktion mit ihren Randwerten in Zusammenhang, gestattet also Randwertprobleme zu lösen. Mit diesen werden wir uns an anderer Stelle beschäftigen. Hier möge ein allgemeines Verfahren auseinandergesetzt werden, das gestattet, eine Funktion

aus Anfangsdaten, genauer aus der Kenntnis ihres Verhaltens in der Umgebung eines Punktes zu bestimmen.

Ein solches konstruktives Verfahren liefert uns die Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen, die ja nur die Kenntnis der Ableitungen an der Entwicklungsstelle z_0, also die Kenntnis der Funktion in einer noch so kleinen Umgebung von z_0 erfordert und doch die Funktion in dem größten Kreis um z_0 darstellt, in dem die Funktion noch regulär bleibt. Weiß man nun, daß $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ regulär ist, und kennt man die Funktion in der Umgebung von z_0 in $\mathfrak{B}$, so kann man den Wert von $f(z)$ an einer anderen Stelle z folgendermaßen finden: Man schaltet Zwischenpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so ein, daß man um z_ν einen Kreis $\mathfrak{K}_\nu$ schlagen kann, der ganz in $\mathfrak{B}$ liegt und $z_{\nu+1}$ im Innern enthält ($\nu = 0, \ldots, n$, $z_{n+1} = z$). Die Entwicklung der Funktion um z_0 liefert die Kenntnis der Funktion um z_1, die um z_1 die Kenntnis von $f(z)$ um z_2 usw., bis man schließlich zu $z_{n+1} = z$ gelangt. Man spricht von analytischer Fortsetzung der Funktion durch Potenzreihen. Man sieht also, daß eine Funktion durch ihren Verlauf in einem noch so kleinen Teilgebiet in ganz $\mathfrak{B}$ vollkommen bestimmt wird. Sie ist insbesondere konstant, wenn sie in einem noch so kleinen Teilgebiet konstant ist.

Wir wollen hiervon eine kleine Anwendung machen, indem wir den wichtigen Extremumsatz ableiten: Eine in $\mathfrak{B}$ analytische, bis in den Rand hinein stetige Funktion $f(z)$ nimmt ihren größten Betrag nur am Rande an, es sei denn, daß sie konstant ist. Ist nämlich z_0 eine Stelle, wo $f(z)$ den größten Betrag M annimmt, und z_0 im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen, so liefern die an Formel (8') sich anschließenden Überlegungen, angewandt auf einen kleinen Kreis um z_0, daß $f(z)$ dort konstant ist. Dann ist $f(z)$ aber, wie oben gezeigt wurde, in ganz $\mathfrak{B}$ konstant.

Ein anderes sehr nützliches Verfahren, eine Funktion fortzusetzen, enthält das Schwarzsche Spiegelungsprinzip. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der längs einer Strecke $\mathfrak{S}$ an die reelle Achse angrenzt. $f(z)$ sei in $\mathfrak{B}$ analytisch und gehe bei Annäherung an $\mathfrak{S}$ stetig in reelle Werte über, die wir als Werte der Funktion längs $\mathfrak{S}$ betrachten. Dann können wir die Funktion über $\mathfrak{S}$ hinaus in den aus $\mathfrak{B}$ durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgehenden Bereich $\mathfrak{B}'$ folgendermaßen fortsetzen: Wir setzen die Funktion in einem Punkt z von $\mathfrak{B}'$ gleich $\overline{f(\bar{z})}$, d. h. wir nehmen an der Stelle z den konjugierten Wert von $f(\bar{z})$ als Funktionswert. Es entsteht offenbar eine auch in $\mathfrak{B}'$ analytische Funktion, die auf der Strecke $\mathfrak{S}$ stetig ist. Daß sie hier aber auch analytisch ist, kann man folgendermaßen einsehen. Es sei z_0 ein (innerer) Punkt von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}$ ein kleiner Kreis um z_0, der ganz in

$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{S}$ gelegen ist. Die Funktion $f^* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ ist innerhalb $\mathfrak{K}$ jedenfalls analytisch. Wir zeigen, daß dort f mit f^* zusammenfällt. Ist z z. B. ein Punkt im Innern des oberen Halbkreises $\mathfrak{H}_1$, so ist

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Das Integral über $\mathfrak{H}_1$ stellt aber offenbar $f(z)$ dar, während das Integral über dem unteren Halbkreis $\mathfrak{H}_2$, da z außerhalb von $\mathfrak{H}_2$ liegt, nach dem Fundamentalsatz verschwindet. Damit ist die Identität von f und f^* in $\mathfrak{H}_1$ bewiesen, und ebenso ergibt sich die Identität der beiden Funktionen in $\mathfrak{H}_2$.

§ 4. Algebraische Gleichungen

1. Fundamentalsatz der Algebra. Unter einer algebraischen Gleichung n-ten Grades versteht man eine Gleichung von der Form

(1) $f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \; (a_0 \neq 0,\ n \geqq 1)$,

wo die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beliebige komplexe Konstanten sein dürfen, $a_0 \neq 0$. Wir wollen zeigen, daß jede solche Gleichung mindestens eine Wurzel hat. Die Hilfsmittel der Funktionentheorie gestatten, diesen „Fundamentalsatz der Algebra“ in sehr einfacher Art zu beweisen. Bevor wir jedoch darauf eingehen, zeigen wir, daß aus dem Fundamentalsatz dann sofort die Existenz von n Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades folgt. Ist nämlich z_1 eine Wurzel der Gl. (1), also $f(z_1) = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, so ist

$$f(z) \equiv f(z) - f(z_1) \equiv a_0(z^n - z_1^n) + a_1(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(z - z_1)$$
$$= (z - z_1)\,f_1(z),$$

wo $f_1(z)$ ein Polynom vom Grade $n - 1$ darstellt. Ist $n > 1$, so hat nach dem Fundamentalsatz auch die Gleichung $f_1(z) = 0$ eine Wurzel z_2 und es ist $f_1(z) \equiv (z - z_2)\,f_2(z)$, wo $f_2(z)$ ein Polynom vom Grade $n - 2$ ist. Es ist somit $f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)\,f_2(z)$. So fortfahrend, gelangen wir schließlich zu einem Polynom $f_n(z)$ vom Grade 0, also einer von 0 verschiedenen Konstanten C, und wir haben

$$f(z) \equiv C(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_n).$$

Multipliziert man die rechte Seite aus und vergleicht die Koeffizienten von z^n links und rechts, so ergibt sich $C = a_0$ und wir haben also

(2) $$f(z) \equiv a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Aus dieser Zerlegung von $f(z)$ in lineare Faktoren ersieht man, daß $f(z_\nu) = 0$ ist ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), daß also alle z_ν und offenbar nur

diese z_ν Wurzeln der Gleichung sind. Dabei können jedoch unter ihnen gleiche vorkommen. Zählen wir jede so oft, wie sie in der Reihe vorkommt, wie sie also zur Bildung eines Wurzelfaktors in Gl. (2) Anlaß gibt[1]), so können wir tatsächlich den Satz aussprechen: Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat genau n Wurzeln.

Wir gehen nun an den Beweis des Fundamentalsatzes. Man kann ihn unmittelbar aus dem Liouvilleschen Satz (§ 3, 6) ableiten. Wäre nämlich keine Wurzel vorhanden, so wäre $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ in der Vollebene regulär und im Unendlichen 0, nach dem Liouvilleschen Satz also identisch 0. Das ist aber ersichtlich unmöglich.

Der Zerlegung (2) von $f(z)$ in seine Wurzelfaktoren können wir jetzt den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Gleichung und den Wurzeln entnehmen, indem wir rechts vollständig ausmultiplizieren und die Koeffizienten links und rechts vergleichen. Wir erhalten offenbar $(-1)^\mu \frac{a_\mu}{a_0} = p_\mu = z_1 z_2 \cdots z_\mu + \cdots (\mu = 1, 2, \cdots, n)$, wo p_μ die μ-te elementarsymmetrische Funktion der Wurzeln, die Summe über alle möglichen Produkte von je μ verschiedenen Wurzeln bedeutet, also z. B. bei einer Gleichung dritten Grades:

$$p_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad p_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad p_3 = z_1 z_2 z_3.$$

2. Die wichtigsten Resultate über Trennung der Wurzeln. Im folgenden sollen einige Sätze zusammengestellt werden, die sich auf die wirkliche Berechnung der Gleichungswurzeln beziehen[2]). Die Koeffizienten der Gleichung setzen wir als reell voraus (man spricht von einer reellen Gleichung) und suchen ihre reellen Wurzeln. Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit darf man außerdem voraussetzen, daß alle Wurzeln einfach sind; denn man kann stets eine Gleichung herstellen, die dieselben Wurzeln hat wie die gegebene, jede jedoch nur einfach. Ist nämlich z_0 eine k-fache Wurzel, enthält also $f(z)$ die k-te Potenz des Wurzelfaktors $z - z_0$, so ist sie eine $(k-1)$-fache Wurzel von $f'(z) = 0$. Der größte gemeinsame Teiler $g(z)$ von $f(z)$ und $f'(z)$ enthält somit die Wurzelfaktoren von $f(z)$ in einer um 1 geringeren Vielfachheit und $\frac{f(z)}{g(z)} \equiv h(z) = 0$ stellt also die gesuchte Gleichung dar. $g(z)$ aber kann man stets nach dem bekannten Euklidischen Algorithmus auf rationalem Wege wirklich herstellen.

---

[1]) Wir bleiben damit in Übereinstimmung mit der Definition einer k-fachen Nullstelle in § 3, 6.

[2]) Die Beweise findet der Leser in allen Lehrbüchern der Algebra.

Um nun eine Gleichung mit einfachen Wurzeln aufzulösen, muß man zuerst versuchen, „die Wurzeln voneinander zu trennen", d. h. Intervalle anzugeben, die nur je eine einzige Wurzel enthalten. Hierauf kann man durch Anwendung von Näherungsverfahren, etwa des Newtonschen Näherungsverfahrens oder der Regula falsi oder eines anderen iterierenden Verfahrens, die Wurzelintervalle immer weiter zu verengern suchen.

Das erste allgemein zum Ziel führende Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln in einem Intervall $\alpha < z < \beta$ hat Sturm angegeben: Die Endpunkte des Intervalls selbst seien keine Wurzeln, also $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$. Das Sturmsche Verfahren lautet dann so: Man stelle sich eine Kette von Funktionen her: $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_m(z)$, d. h. eine Funktionenreihe mit folgenden Eigenschaften:

Erstens sei das Endglied der Kette $f_m(z)$ im ganzen Intervall $\alpha \leqq z \leqq \beta$ mit Einschluß der Intervallenden von 0 verschieden, also durchwegs positiv oder durchwegs negativ.

Zweitens: Wenn eine der mittleren Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ an einer Stelle des Intervalls $\alpha \leqq z \leqq \beta$ verschwindet, so sollen die benachbarten Funktionen für denselben Argumentwert von 0 verschieden sein und entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Drittens: Für jede 0-Stelle von $f(z)$ im Intervall soll $f_1(z)$ das Vorzeichen von $f'(z)$ besitzen (wegen der Einfachheit der Nullstellen von $f(z)$ kann für sie f' nicht verschwinden).

Dann gibt der Überschuß der Zahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe $f(\alpha)$, $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ über die der Reihe $f(\beta)$, $f_1(\beta), \ldots, f_m(\beta)$ die Zahl der gesuchten Wurzeln. Bei der Zählung der Vorzeichenwechsel sind Nullen wegzulassen.

Eine Sturmsche Kette kann man sich stets in folgender Weise verschaffen: Man setze $f_1(z) = f'(z)$ und wende auf $f(z)$ und $f_1(z)$ das Euklidsche Divisionsverfahren an, nehme jedoch die Reste mit entgegengesetztem Vorzeichen, es sei also

$$\begin{aligned} f &= f_1 q_1 - f_2 \\ f_1 &= f_2 q_2 - f_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2} &= f_{m-1} q_{m-1} - f_m. \end{aligned}$$

Wegen der Einfachheit der Wurzeln unserer Gleichung sind $f(z)$ und $f'(z)$ teilerfremd, also der letzte Rest f_m konstant und von 0 verschieden.

Andere Methoden zur Bestimmung der genauen Wurzelanzahl in einem Intervall sind von Hermite, Sylvester und anderen ausgebildet

worden. Sie bringen die Wurzelanzahl in Zusammenhang mit Rang und Signatur gewisser quadratischer Formen, deren Koeffizienten sich in rationaler Weise aus den Koeffizienten der vorgegebenen Gleichung, sowie den Endpunkten α, β des Intervalls berechnen lassen.

Es mögen noch einige Sätze angegeben werden, die zwar nur eine obere Schranke für die Wurzelanzahl geben, jedoch oft von Nutzen sind.

Satz von Fourier: Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung n-ten Grades $f(z) = 0$ im Intervall $\alpha < z < \beta$, dessen Endpunkte selbst keine Wurzeln der Gleichung sind, ist gleich oder um eine gerade Anzahl kleiner als der Überschuß der Vorzeichenwechsel in der Reihe $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\ldots$, $f^{(n)}(\alpha)$ über die der Reihe $f(\beta)$, $f'(\beta)$, $f''(\beta)$, $\ldots$, $f^{(n)}(\beta)$. Etwa vorkommende Nullen sind zu streichen. Im Falle einer Gleichung mit nur reellen Wurzeln bekommt man die genaue Wurzelanzahl im Intervall. (Beim Fourierschen Theorem braucht nicht einmal die Einfachheit der Wurzeln vorausgesetzt zu werden.)

Ein Grenzfall des Fourierschen Satzes ist die Descartessche Zeichenregel, die sich aus ihm ergibt, wenn man $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ setzt:

Die Zahl der positiven Wurzeln ist gleich oder um eine gerade Anzahl kleiner als die Zahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenreihe $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Eine ähnliche Regel ist von Laguerre aufgestellt worden: Die Zahl der Wurzeln, die größer sind als α, ist im Falle $f(\alpha) \neq 0$ gleich oder um eine gerade Anzahl kleiner als die Zahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n, \quad f_1(\alpha) = a_1 + a_2\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n-1}, \ldots, f_n(\alpha) = a_n.$$

Schließlich sei erwähnt, daß man die Aufgabe, die Wurzelanzahl in einem Intervall zu bestimmen, prinzipiell auf die Aufgabe zurückführen kann, die Zahl der reellen Wurzeln einer passenden neuen Gleichung zu finden ($\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$). Es ist ja die Wurzelanzahl von $f(z) = 0$ im Intervall $\alpha < z < \beta$ identisch mit der Zahl der positiven Wurzeln von $g(z) = (\beta - z)^n f\left(\frac{z-\alpha}{\beta - z}\right) = 0$ und die Zahl der positiven Wurzeln einer Gleichung $g(z) = 0$ $[g(0) \neq 0]$ gleich der Hälfte der reellen Wurzeln von $g(z^2) = 0$.

3. Die Hurwitzschen Kriterien für Gleichungen, deren Wurzeln alle negativen Realteil besitzen. Bei Stabilitätsaufgaben der Physik hat man oft die Frage zu entscheiden, ob eine vorliegende algebraische Gleichung $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ n-ten Grades nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt. Im Falle reeller Koeffizienten ist, wie man der Zerlegung in reelle lineare und quadratische Faktoren

entnimmt, notwendig, daß die Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben. Ein allgemeines Kriterium hat **Hurwitz** angegeben: Nimmt man $a_0 > 0$ (was gegebenenfalls durch Multiplikation mit -1 zu erreichen ist), so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die n Determinanten:

$$(3)\quad \begin{cases} D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix} \end{cases}$$

alle positiv sind. a_ν ist gleich 0 zu setzen, wenn $\nu > n$ ist.

Im folgenden sollen die **Hurwitzschen** Kriterien nach einer von J. **Schur**[1]) herrührenden Methode abgeleitet werden.

Zu dem Zwecke diene folgende Vorbetrachtung: Wir ordnen jedem Polynom

$$(4)\quad f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu)$$

das Polynom

$$(4')\quad f^*(z) = \overline{a_0} z^n - \overline{a_1} z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \overline{a_n} = \overline{a_0} \prod (z + \overline{z_\nu})$$

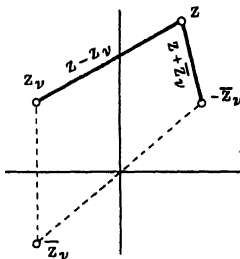
zu. Die Wurzeln der Gleichungen $f(z) = 0$, $f^*(z) = 0$ sind paarweise Spiegelbilder in bezug auf die imaginäre Achse der z-Ebene, denn der Übergang von z zu $-\bar{z}$ bedeutet ja Spiegelung an dieser Achse.

Ist nun insbesondere $f(z) = 0$ eine **Hurwitzsche** Gleichung (so nennen wir kurz eine Gleichung, deren Wurzeln alle negativen Realteil haben), so bestehen zwischen $f(z)$ und $f^*(z)$ die **Größenrelationen**:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha)\ |f(z)| < |f^*(z)| & \text{für } \Re(z) < 0 \\ \beta)\ |f(z)| > |f^*(z)| & \text{für } \Re(z) > 0 \\ \gamma)\ |f(z)| = |f^*(z)| \neq 0 & \text{für } \Re(z) = 0. \end{cases}$$

Fig. 26

Dies folgt unmittelbar aus den entsprechenden Ungleichungen für die einzelnen Faktoren von f und f^*, nämlich die $L_\nu(z) = z - z_\nu$, $L_\nu^*(z) = z + \overline{z_\nu}$. Sie drücken nichts anderes aus, als daß die imaginäre Achse **Symmetrale** ist für das Punktepaar z_ν, $-\bar{z}_\nu$ und daß z_ν in der **linken** Halbebene (links von der Achse) gelegen ist. [Siehe Fig. 26, in der ein z mit $\Re(z) > 0$ eingetragen ist.]

---

[1]) Zeitschr. f. angew. Mathematik **1** (1921), S. 307—311.

Die Relationen (5) setzen uns instand, aus einer Hurwitzschen Gleichung vom Grade n eine Hurwitzsche Gleichung: $g(z) = 0$ vom Grade $n-1$ zu bilden.

Wir zeigen zuerst, daß eine Gleichung von der Form

$$\alpha f - \beta f^* = 0, \tag{6}$$

wo $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ ist, nur rein imaginäre Wurzeln besitzt. In der Tat ist in der linken Halbebene wegen (5) α) $|\alpha f| < |\beta f^*|$, wegen (5) β) in der rechten $|\alpha f| > |\beta f^*|$, also in beiden Fällen $\alpha f - \beta f^* \neq 0$.

Nun zeigen wir, daß Gl. (6) keine mehrfachen Wurzeln besitzen kann. Wir müssen beweisen, daß auf der imaginären Achse die Ableitung der linken Seite von (6) $\alpha f' - \beta (f^*)' \neq 0$ sein muß, falls (6) erfüllt ist. Im Falle ihres gleichzeitigen Verschwindens müßte die Determinante $\begin{vmatrix} f & f^* \\ f' & (f^*)' \end{vmatrix} = 0$ sein, also wegen

$$f \neq 0, \quad f^* \neq 0, \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(f^*)'}{f^*} \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - z_\nu} = \sum \frac{1}{z + \overline{z_\nu}}.$$

Das ist aber unmöglich, da auf der imaginären Achse $\Re(z - z_\nu) > 0$, also $\Re \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - z_\nu} > 0$, während $\Re(z + \overline{z_\nu}) < 0$, also $\Re \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z + \overline{z_\nu}} < 0$.

Endlich zeigen wir noch, daß der Grad der linken Seite von (6) nicht unter $n-1$ sinken kann. Ist er nämlich kleiner als n, so ist bis auf einen gemeinsamen Faktor $\overline{\alpha_0} = a_0$, $\beta = a_0$ und der Koeffizient von z^{n-1} gleich $a_0 \overline{a_1} + a_1 \overline{a_0}$. Es ist aber

$$-\Re \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu = \Re \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 \overline{a_1} + a_1 \overline{a_0}}{2\, a_0 \overline{a_0}} > 0 \tag{7}$$

und $a_0 \overline{a_1} + a_1 \overline{a_0}$ also sicher ungleich 0.

Endlich brauchen wir noch die Tatsache, daß die lineare Funktion $L(u) = \frac{u+1}{u-1}$ die Peripherie des Einheitskreises $|u| = 1$ überführt in die imaginäre Achse, so daß dabei das Innere des Einheitskreises in die linke Halbebene, das Außere in die rechte Halbebene übergeht. Bildet man also die Funktionen

$$\varphi(z) = \frac{\overline{a_0} f}{a_0 f^*}, \quad \psi(z) = \frac{\varphi(z) + 1}{\varphi(z) - 1} = \frac{\overline{a_0} f + a_0 f^*}{\overline{a_0} f - a_0 f^*},$$

so entsprechen einander wegen (5) die Ungleichungen

$$\begin{cases} \Re(z) < 0, & |\varphi(z)| < 1, & \Re(\psi(z)) < 0 \\ \Re(z) = 0, & |\varphi(z)| = 1, & \Re(\psi(z)) = 0 \\ \Re(z) > 0, & |\varphi(z)| > 1, & \Re(\psi(z)) > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Wir wollen nun $\psi(z)$ in seine Partialbrüche zerlegen. Auf Grund der früheren Bemerkungen über die $n-1$ Nullstellen von $\overline{a_0}f - a_0 f^*$, die mit $i\beta_1, \ldots, i\beta_{n-1}$ bezeichnet werden mögen, sind diese zusammen mit dem ∞ fernen Punkt einfache Pole von ψ[1]. Die Entwicklung von ψ im Unendlichen lautet offenbar

$$\psi(z) = \frac{2\,a_0\,\overline{a_0}}{\overline{a_0}\,a_1 + a_0\,\overline{a_1}}\,z + \text{regulärer Bestandteil,}$$

und wir können also ψ in der Form ansetzen

$$\psi(z) = \frac{2\,a_0\,\overline{a_0}}{\overline{a_0}\,a_1 + a_0\,\overline{a_1}}\,z + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda_\nu}{z - i\beta_\nu} + \text{Const.} \tag{9}$$

Da das Vorzeichen von $\Re[\psi(z)]$ auf Grund von (8) mit dem von $\Re(z - i\beta_\nu)$ übereinstimmt, andererseits $\psi(z)$ sich in der Umgebung des Pols $i\beta_\nu$ wie $\frac{\lambda_\nu}{z - i\beta_\nu}$ verhält, so erkennen wir, daß die Residuen λ_ν positive Zahlen sein müssen. Setzt man jetzt $z = 0$, so ergibt sich Const. als rein imaginär. [Siehe (8)] Aus diesen beiden Bemerkungen ergibt sich nun die für uns wichtige Tatsache, daß für $n > 1$ das Vorzeichen des Realteils von

$$\psi_1 = \psi - \frac{2\,a_0\,\overline{a_0}}{a_0\,\overline{a_1} + a_1\,\overline{a_0}}\,z = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda_\nu}{z - i\beta_\nu} + \text{Const.} \tag{10}$$

mit dem von $\Re(\psi)$ übereinstimmt. Bildet man also diejenige Funktion φ_1, die mit ψ_1 in derselben Weise zusammenhängt wie φ mit ψ, also $\frac{\varphi_1 + 1}{\varphi_1 - 1} = \psi_1$ oder $\varphi_1 = \frac{\psi_1 + 1}{\psi_1 - 1}$, so ist

$$\begin{cases} |\varphi_1| < 1 & \text{für } \Re(z) < 0 \\ |\varphi_1| = 1 & \text{für } \Re(z) = 0 \\ |\varphi_1| > 1 & \text{für } \Re(z) > 0. \end{cases} \tag{10'}$$

Eine kleine Rechnung ergibt $\frac{a_0}{\overline{a_0}}\,\varphi_1 = \frac{f_1}{f_1^*}$ mit

$$f_1(z) = (a_0\,\overline{a_1} + a_1\,\overline{a_0} - a_0\,\overline{a_0}\,z)\,f + a_0^2\,z\,f^*. \tag{11}$$

Wir stellen nun fest, daß $f_1(z) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung von $(n-1)$-tem Grade ist. Zuerst ergibt sich durch einfaches Ausrechnen, daß die Koeffizienten von z^{n+1} und z^n in $f_1(z)$ herausfallen. Daß sie von genau $(n-1)$-tem Grade ist, folgt daraus, daß $\varphi_1 = 0$ oder $\psi_1 = -1$, wie (10) lehrt, auf eine Gleichung vom Grade $(n-1)$ führt. Es können also auch f_1 und f_1^* keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Dies im Verein von (10') zeigt weiter, daß $f_1 = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist.

---

[1] Es sind wirklich Pole, da der Zähler nicht gleichzeitig verschwinden kann.

Umgekehrt folgt aber, wenn $f_1(z) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist, daß dann auch $f(z) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung sein muß, wenn nur $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ ist. Zum Beweis braucht man nur den Weg, der von f zu $f_1(z)$ führte, umgekehrt zu durchlaufen. Die Ungleichung $\Re\frac{a_1}{a_0} > 0$ braucht man beim Übergang von ψ_1 zu ψ [Gl. (9)]

Wir haben damit ein Reduktionsverfahren gewonnen, das nach höchstens $n - 1$ Schritten die Entscheidung gestattet, ob $f(z) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist oder nicht, ohne die Determinantenkriterien heranziehen zu müssen. Man gelangt jedoch zu diesen in sehr einfacher Weise folgendermaßen: Im Falle reeller Koeffizienten ist, wenn man $f = g + h$ setzt, mit

$$g(z) = a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \cdots, \quad h = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \cdots,$$
$$f^* = g - h \quad \text{und} \quad f_1 = (2a_0 a_1 - a_0^2 z)(g + h) + a_0^2 z(g - h),$$

also die bis auf einen konstanten Faktor mit f_1 übereinstimmende Funktion

$$F_1(z) = \frac{f_1}{2a_0} = (a_1 - a_0 z)h + a_1 g = a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2}$$
$$+ a_1 a_3 z^{n-3} + (a_1 a_4 - a_0 a_5) z^{n-4} + \cdots$$

Die Hurwitzschen Determinanten für F_1

$$\varDelta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3, & a_1^2 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5, & a_1 a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

können leicht durch die Hurwitzschen Determinanten D_ν für $f(z)$ ausgedrückt werden. Schreibt man $a_0 a_1 \varDelta_\nu$ in der Form

$$a_0 a_1 \varDelta_\nu = \begin{vmatrix} a_0 a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0 a_3, & a_1 a_2 - a_0 a_3, & a_1^2, & 0 & \ldots \\ a_0 a_5, & a_1 a_4 - a_0 a_5, & a_1 a_3, & a_1 a_2 - a_0 a_3, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und addiert die erste zur zweiten, die mit $\frac{a_0}{a_1}$ multiplizierte dritte zur vierten Spalte usw., so erhält man $a_0 a_1 \varDelta_1 = a_0 a_1 D_2$, $a_0 a_1 \varDelta_2 = a_0 a_1^2 D_3$, $a_0 a_1 \varDelta_3 = a_0 a_1^3 D_4, \cdots$. Nun ist aber $f(z) = 0$ bei positivem a_0 nach unseren früheren Überlegungen dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn $a_1 > 0$ und $F_1 = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung darstellt. Denken wir uns für Gleichungen von $(n-1)$-tem Grade das Hurwitzsche Kriterium bereits bewiesen, so ist also $f = 0$ dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn

$$a_1 > 0, \quad \varDelta_1 > 0, \quad \varDelta_2 > 0, \ \ldots \ \varDelta_{n-1} > 0.$$

Diese Bedingungen sind aber identisch mit

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \ldots \ D_n > 0.$$

§ 5. Elliptische Funktionen und Integrale

1. Differentialgleichungen, die auf elliptische Funktionen führen. Bei Problemen der Mechanik wird man häufig auf eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x) \tag{1}$$

geführt, wo die Funktion $F(x)$ an den Endpunkten a, b des Intervalls $a \leqq x \leqq b$, auf das die Raumkoordinate x beschränkt bleiben soll, derart verschwindet, daß

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{(x-a)(b-x)} \tag{2}$$

auch in den Endpunkten a, b stetig und überall oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Z. B. ist (1) die Gleichung der lebendigen Kraft für ein Fadenpendel, wenn $F = 2gl(\cos x - \cos a)$ gesetzt wird, l die Fadenlänge, x den Winkelausschlag zur Zeit t und a den Wert von x an der Umkehrstelle bedeuten: die Intervallgrenzen sind hier $-a$ und a, und in der Tat findet man für F_1 durch Differentiation

$$\lim_{x=a} \frac{\cos x - \cos a}{(x-a)(-x-a)} = \frac{\sin a}{2a}$$

und sieht überdies, daß der Quotient für x-Werte zwischen $-a$ und a positiv ist.

Das Eigentümliche solcher Differentialgleichungen ist nun, daß sie zu einem Schwingungsvorgang gehören, daß also jede Lösung $x = x(t)$ von (1) eine periodische Funktion der Zeit t sein muß.

Um dies einzusehen, ist es zweckmäßig, statt x eine neue Variable v einzuführen vermöge der Gleichung

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sin v. \tag{3}$$

Durchläuft v eine Periodenlänge des Sinus, etwa $-\pi \leqq v \leqq \pi$, so beschreibt x das Intervall $a \leqq x \leqq b$ hin und zurück.

Es ist $\frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2}\cos v \cdot \frac{dv}{dt}$, $(x-a)(b-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1 - \sin^2 v)$.

Setzt man also noch $F_1\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sin v\right) = f(\sin v)$, so lautet die Differentialgleichung auf v umgeschrieben

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = f(\sin v) \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = \sqrt{f(\sin v)}. \tag{1'}$$

Hier darf man die Wurzel positiv nehmen, da mit $v = v(t)$ auch $\pi - v(t)$ eine Lösung von (1′) darstellt, und zwar mit entgegen-

gesetztem Wert der Wurzel, und, wie man (3) entnimmt, dieselbe Bewegung definiert. Setzt man nun

$$(4)\qquad \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{f(\sin v)}} = \psi(v) \left(= \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}\right),$$

so gibt die Trennung der Variablen in (1′) als allgemeine Lösung von (1′)

$$(5)\qquad t = \psi(v) + \tau,$$

wo τ eine willkürlich wählbare Integrationskonstante darstellt. Wir erhalten auf diese Weise t als Funktion von v. Um jedoch, was das natürlichere ist, v und damit x als Funktion von t darzustellen, muß man die Funktion $\psi(v)$ umkehren. Da $\psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{f(\sin v)}}$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt, so durchläuft $\psi(v)$ wachsend alle Werte von $-\infty$ bis ∞, wenn v dies tut. Die Umkehrung ist also sicher möglich. Bezeichnet man die Umkehrfunktion mit φ, so lautet die allgemeine Lösung auf Grund von (5)

$$(5')\qquad v = \varphi(t - \tau)$$

und mit Rücksicht auf (3):

$$(5'')\qquad x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \sin \varphi(t-\tau).$$

Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, daß $x(t)$ tatsächlich eine periodische Funktion von t ist. Da nämlich $\psi'(v)$ offenbar die Periode 2π hat, also $\psi'(v + 2\pi) - \psi'(v) = 0$ ist, so ist $\psi(v + 2\pi) - \psi(v) = 2\omega$ eine Konstante, und es wächst somit umgekehrt $\varphi(t - \tau)$ um 2π, wenn t um die Periode 2ω zunimmt. x dagegen bleibt ungeändert, da φ in (5″) nur im Sinus vorkommt. Wir können aber noch mehr sagen. Wegen

$$(5''')\qquad \frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2} \cos v \,.\, \sqrt{f(\sin v)}$$

ändert $\frac{dx}{dt}$ nur das Vorzeichen, wenn man v durch $\pi - v$ ersetzt, während x überhaupt ungeändert bleibt. Nur für die einander entsprechenden Werte

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\pi}{2} + 2\nu\pi, \quad & x &= a, \\ & & & \qquad \nu = 0, \pm 1, \ldots \\ v &= \frac{\pi}{2} + 2\nu\pi, \quad & x &= b, \end{aligned}$$

ist $\frac{dx}{dt} = 0$. Hieraus folgt, daß x im Intervall $a \leqq x \leqq b$ zwischen den Grenzen a, b hin und her läuft und ein Übergang von b nach a nur eine Umkehrung der Bewegung von a nach b darstellt. Die Zeit für einen solchen Hin- oder Hergang ist gleich der Halbperiode

$$(6) \qquad \omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{f(\sin v)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Auch im zweiten Integral ist die Wurzel positiv zu nehmen. Zur vollständigen Lösung des mechanischen Problems gehört nun noch die Berechnung der Integrationskonstanten τ aus den gegebenen Anfangsdaten: dem Wert x_0 von x zur Anfangszeit $t = t_0$ sowie der Bewegungsrichtung, also dem Vorzeichen der „Geschwindigkeit“ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}$. Aus der Gl. (3) ergibt sich zuerst für $v_0 = \varphi(t_0 - \tau)$ die Gleichung

$$x_0 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \sin v_0,$$

also hieraus der Wert von $\sin v_0$ und hierauf aus (5‴) auch das Vorzeichen von $\cos v_0$, wodurch v_0 dann bis auf Vielfache von 2π gegeben ist. Gl. (5) ergibt hierauf für τ

$$\tau = t_0 - \psi(v_0).$$

Zusammenfassend können wir also sagen: Um bei gegebenen Anfangsbedingungen die Bewegung vollständig beschreiben zu können, hat man im wesentlichen zwei Aufgaben zu lösen: 1. Berechnung des Integrals $\psi(v)$ für einen aus den Anfangsdaten leicht berechenbaren Wert v_0 von v. 2. Herstellung der Umkehrfunktion von $\psi(v)$.

Besonders eingehend sind diese Fragen studiert worden für den Fall, wo $F(x)$ ein Polynom vom dritten oder vierten Grade ist mit lauter einfachen Nullstellen

$$(7) \qquad F(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + \cdots + a_4.$$

Der Fall eines Polynoms dritten Grades ist in (7) einbegriffen, wenn wir zulassen, daß $a_0 = 0$ sein darf: a_1 muß dann natürlich $\neq 0$ sein. Die Gleichung des Fadenpendels läßt sich auf den Fall (7) zurückführen, indem man $y = \sin \frac{x}{2}$ als neue Variable einführt; es wird dann nämlich, wie man leicht ausrechnet:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = gl(1 - y^2)\left(\sin^2 \frac{a}{2} - y^2\right).$$

Auch die Bewegungsgleichungen des starren Körpers (Kreisels) führ
auf eine ähnliche Form. Man nennt im Falle von (7)

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} \tag{8}$$

ein elliptisches Integral erster Gattung. Die Umkehrfunktion x = sn
von (8) hat nun die merkwürdige Eigenschaft, ins Komplexe fortgesetz
neben der reellen Periode 2ω, die eine unmittelbare mechanische Be
deutung besitzt, noch eine komplexe Periode zu besitzen. es ist eine
doppeltperiodische Funktion.

Allgemein bezeichnet man als ein elliptisches Integral ein Integral
von der Form

$$\int R\left(x, \sqrt{F(x)}\right) dx, \tag{9}$$

wo R eine beliebige rationale Funktion ihrer Argumente bedeuten kan.
Der Name elliptisch rührt von dem äußerlichen Umstande her, daß
die Berechnung eines Ellipsenbogens auf ein solches Integral führt.

2. Reduktion elliptischer Integrale auf Grundtypen. Um die durch
Differentialgleichungen der Form (1) bestimmten Bewegungsvorgänge
zahlenmäßig zu beherrschen, muß man Tafeln für die Werte ellip-
tischer Integrale und Funktionen anlegen. Dies ist aber nur möglich
wenn man die Zahl der in Betracht kommenden Parameter möglichst
einschränkt. Wir wollen daher versuchen, durch formales Rechnen ein
allgemeines elliptisches Integral auf einfache Grundtypen zurück-
zuführen. Statt x schreiben wir jetzt lieber z, um anzudeuten, daß
wir für alle vorkommenden Größen auch komplexe Zahlenwerte zu-
lassen. Wir bringen zuerst den Integranden $R(z, \sqrt{F(z)})$ auf eine
einfache Normalform. Da eine gerade Potenz von $\sqrt{F(z)}$ ein Polynom
ist, so kann man R offenbar in der Form schreiben

$$R\left(z, \sqrt{F(z)}\right) = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{F(z)}}{C(z) + D(z)\sqrt{F(z)}},$$

wo A, B, C, D Polynome in z sind. Multipliziert man hier Zähler und
Nenner mit $C - D\sqrt{F}$, so erhält man R in der Form $R_1(z) + R_2(z)\sqrt{F(z)}$,
wo R_1 und R_2 rational sind, und damit ist bereits eine Normalform
gewonnen. Doch ist es noch zweckmäßiger, im zweiten Bestandteil $\sqrt{F}$
zu ersetzen durch $\frac{F}{\sqrt{F}}$ und F mit R_2 zu einer neuen rationalen
Funktion zusammenzuziehen. R bekommt dann die Gestalt

$$R\left(z, \sqrt{F(z)}\right) = S(z) + \frac{T(z)}{\sqrt{F(z)}},$$

wo S und T in z rational sind.

Das Integral von R wird nun

$$\int R\left(z, \sqrt{F(z)}\right) dz = \int S(z)\, dz + \int \frac{T(z)}{\sqrt{F(z)}}\, dz.$$

Das Integral $\int S(z)\,dz$ können wir als Integral einer rationalen Funktion beiseite lassen. Um das zweite Integral zu vereinfachen, denken wir uns $T(z)$ in seine Partialbrüche zerlegt. Dementsprechend zerfällt offenbar das Integral in Integrale von der Form $\int \frac{z^k}{\sqrt{F(z)}}\, dz$, $\int \frac{dz}{(z-z_0)^k \sqrt{F(z)}}$, wo k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl bedeuten kann. Für diese Integrale lassen sich nun einfache Rekursionsformeln aufstellen. Zur Abkürzung schreiben wir

$$J_l = \int \frac{(z-z_0)^l\, dz}{\sqrt{F(z)}},$$

wobei wir jetzt für l jeden ganzzahligen Wert zulassen.

Zur Ableitung einer Rekursionsformel für die J_l ordnen wir zuerst $F(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$ um:

$$F(z) \equiv b_0 (z-z_0)^4 + b_1 (z-z_0)^3 + \cdots + b_4.$$

Multipliziert man nun die Identität

$$\frac{b_0 (z-z_0)^4 + b_1 (z-z_0)^3 + \cdots + b_4}{\sqrt{F(z)}} = \sqrt{F(z)}$$

mit $(z-z_0)^l$ und integriert, so erhält man

$$(10') \quad b_0 J_{l+4} + b_1 J_{l+3} + b_2 J_{l+2} + b_3 J_{l+1} + b_4 J_l = \int (z-z_0)^l \sqrt{F(z)}\, dz.$$

Im Falle $l + 1 \neq 0$ gibt die partielle Integration der rechten Seite

$$\int (z-z_0)^l \sqrt{F(z)}\, dz = \frac{(z-z_0)^{l+1}}{l+1} \sqrt{F(z)} - \int \frac{(z-z_0)^{l+1}}{2(l+1)} \frac{F'(z)}{\sqrt{F(z)}}\, dz$$

$$= \frac{(z-z_0)^{l+1}}{l+1} \sqrt{F(z)} - \frac{1}{2(l+1)} \left\{ 4 b_0 J_{l+4} + 3 b_1 J_{l+3} + 2 b_2 J_{l+2} + b_3 J_{l+1} \right\}$$

Setzt man dies in (10′) ein und bringt alle J nach links, so ergibt sich

$$(10) \quad \begin{cases} (2l+6) b_0 J_{l+4} + (2l+5) b_1 J_{l+3} + (2l+4) b_2 J_{l+2} \\ + (2l+3) b_3 J_{l+1} + (2l+2) b_4 J_l = 2(z-z_0)^{l+1} \sqrt{F(z)}. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Rekursionsformel. Sie gilt offenbar auch für $l = -1$. Mit ihrer Hilfe kann man jedenfalls die Berechnung der J reduzieren auf die Berechnung von J_2, J_1, J_0, J_{-1}. Ist z_0 eine Nullstelle von $F(z)$, also $b_4 = 0$, so erhält die linke Seite von (10) nur vier Glieder, man kann also auch J_2 durch J_1, J_0, J_{-1} ausdrücken.

Dasselbe ist der Fall, wenn F ein Polynom dritten Grades ist ($b_0 = 0$). Doch auch im allgemeinen Fall kann man $J_2 = \int \frac{(z-z_0)^2\,dz}{\sqrt{F(z)}}$ durch Integrale vom Typus J_1, J_0, J_{-1} ausdrücken, wenn man eine Nullstelle α von $F(z)$ kennt, indem man $(z-z_0)^2$ nach Potenzen von $z-\alpha$ umordnet und die zu $z_0 = \alpha$ gehörige Rekursionsformel anwendet, die nur vier Glieder J enthält. Da nun $J_1 = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{F(z)}} - z_0 J_0$, so kann man unser bisheriges Resultat so aussprechen: Die Auswertung eines elliptischen Integrals erfordert außer Integration rationaler Funktionen nur Berechnung der Integrale

$$(11) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{F(z)}}, \quad \int \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{F(z)}}.$$

Das erste Integral ist das zu $F(z)$ gehörige elliptische Integral erster Gattung. Das zweite kann als Spezialfall des den Parameter z_0 enthaltenden dritten Integrals angesehen werden, indem hier an Stelle des für $z = z_0$ unendlich werdenden linearen Ausdrucks $\frac{1}{z-z_0}$ der für $z_0 = \infty$ unendlich werdende lineare Ausdruck z tritt. Man nennt ein Integral $\int \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{F(z)}}$ ein Normalintegral von zweiter oder dritter Gattung, je nachdem ob z_0 eine Wurzel von $F(z) = 0$ ist oder nicht. Ist $F(z)$ vom dritten Grade, so ist es, wie wir bald sehen werden, zweckmäßig, $z = \infty$ als vierte Wurzel von $F(z) = 0$ anzusehen. Das zweite der Integrale (11) ist dann ein Integral zweiter Gattung, sonst von dritter Gattung.

3. Lineare Transformationen. Normalformen der elliptischen Integrale. Wir haben bisher die Variable z festgehalten. Nun wollen wir versuchen, durch Einführung einer neuen Variablen ζ das Integrationsproblem noch weiter zu reduzieren. Dabei beschränken wir uns zuerst auf lineare Transformationen:

$$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Es wird dann

$$F(z) = a_0 z^4 + \cdots + a_4 = \frac{\alpha_0\zeta^4 + \alpha_1\zeta^3 + \cdots + \alpha_4}{(\gamma\zeta + \delta)^4} \cdot [\alpha\delta - \beta\gamma]^2\,[1]).$$

[1]) Die Abspaltung des konstanten Faktors $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \neq 0$ ist aus formalen Gründen zweckmäßig. Die Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$ bleiben dann ungeändert, wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit einem Faktor multipliziert. Siehe außerdem Gl. (12).

Die Nullstellen von $\Phi(\zeta) = \alpha_0 \zeta^4 + \alpha_1 \zeta^3 + \cdots + \alpha_4$ sind gerade diejenigen Punkte, die durch unsere Transformation aus den Nullstellen von $F(z)$ hervorgehen, und zwar gilt dies, wie man sich leicht überzeugt, auch dann, wenn eine der Nullstellen von F oder Φ im Unendlichen liegt. Weiter ist $dz = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\zeta + \delta)^2} d\zeta$, also

$$\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}. \tag{12}$$

Die Gl. (12) ist fundamental. Sie lehrt, daß **bei einer linearen Transformation ein elliptisches Integral erster Gattung wieder in ein elliptisches Integral erster Gattung übergeht.**

Wir orientieren uns jetzt auch über die Transformation der Elementarintegrale zweiter und dritter Gattung. Dabei beschränken wir uns auf den Fall eines endlichen z_0 und nehmen an, daß auch der entsprechende Wert ζ_0 endlich ist. Die Grenzfälle eines unendlichen z_0 oder ζ_0 lassen sich ähnlich behandeln. Eine kleine Rechnung ergibt auf Grund von $z_0 = \frac{\alpha\zeta_0 + \beta}{\gamma\zeta_0 + \delta}$

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{A}{\zeta - \zeta_0} + B$$

mit

$$A = \frac{(\gamma\zeta_0 + \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad B = \frac{\gamma\zeta_0 + \delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\gamma,$$

also

$$\int \frac{1}{z - z_0} \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} = A \int \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}} + B \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}. \tag{12'}$$

Da ζ_0 dann und nur dann eine Nullstelle von $\Phi(\zeta)$ ist, wenn z_0 eine Nullstelle von $F(z)$ darstellt, so sagt Gl. (12′) folgendes: **Ein Normalintegral zweiter Gattung** verwandelt sich bei einer linearen Transformation **in eine lineare Kombination eines Integrals zweiter Gattung mit einem Integral erster Gattung. Ein Integral dritter Gattung** geht über in eine lineare Kombination eines Integrals **dritter Gattung** und **eines Integrals erster Gattung.** Wir sehen also, daß durch lineare Transformation aus den Grundtypen (11) wieder wenigstens Linearkombinationen von Grundtypen elliptischer Integrale hervorgehen. Indem wir jetzt die lineare Transformation so wählen, daß $\Phi(\zeta)$ bestimmte einfache Gestalten erhält, bekommen wir die in der Literatur über elliptische Funktionen vorkommenden **Normalformen der elliptischen Grundintegrale:**

I. Man erhält die **Weierstrasssche** Normalform durch folgende Operationen: Erstens kann man durch eine lineare Transformation eine

der Nullstellen von $F(z)$ ins Unendliche werfen. Das aus $F(z)$ hierbei hervorgehende $\Phi(\zeta)$ wird dann vom dritten Grade. Hierauf kann man durch eine Schiebung der ζ-Ebene bewirken, daß der Schwerpunkt der drei im Endlichen gelegenen Nullstellen von $\Phi(\zeta)$ in den 0-Punkt fällt. Der Koeffizient von ζ^2 in $\Phi(\zeta)$ wird dann 0. Endlich kann man durch eine passende Drehstreckung vom 0-Punkt aus (Ersetzung von ζ durch $\alpha\zeta$, α passende Konstante) dem Koeffizienten von ζ^3 einen vorgeschriebenen Zahlenwert, am besten 4 geben. $\Phi(\zeta)$ bekommt also die Gestalt

$$\Phi(\zeta) = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3. \tag{13}$$

Das ist die Weierstrasssche Normalform. Die wirkliche Durchrechnung ergibt

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

g_2, g_3 sind also unabhängig davon, wie die Transformation auf die Normalform vorgenommen wird, insbesondere, welche der vier Wurzeln von $F(z) = 0$ ins Unendliche gebracht wird. Man nennt g_2, g_3 die Invarianten des elliptischen Integrals $\int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + \cdots + a_4}}$ erster Gattung.

Bei der Transformation eines elliptischen Integrals zweiter Gattung ist es zweckmäßig, die Wurzel z_0 in den unendlich fernen Punkt zu bringen. Das transformierte Integral wird dann eine lineare Kombination des elliptischen Integrals erster Gattung $\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}$ und des elliptischen Integrals zweiter Gattung $\int \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}$ mit gewissen leicht berechenbaren konstanten Koeffizienten. Wenn wir jetzt wieder z statt ζ schreiben, so erhalten wir als Weierstrasssche Normalformen der Elementarintegrale:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad \int \frac{dz}{(z - z_0)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{11'}$$

Im Integral dritter Gattung muß z_0 von den drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 des Radikanden verschieden sein.

II. Man erhält die Riemannsche Normalform, indem man drei der Nullstellen von $F(z)$ in $\zeta = 0, 1, \infty$ überführt. $\Phi(\zeta)$ erhält dann offenbar die Gestalt

$$\Phi(\zeta) = C\zeta(1 - \zeta)(1 - \lambda\zeta) \quad (\lambda \neq 0, 1). \tag{13'}$$

Je nach der Wahl der Substitution kann man hier jedoch verschiedene Normalformen bekommen. Gehen wir von der Weierstrassschen Normalform aus und wenden die Substitution

$$z = \frac{1}{\zeta}(e_1 - e_3) + e_3 \tag{15}$$

an, die die Punkte $z = \infty$, e_1, e_3 der Reihe nach in $\zeta = 0, 1, \infty$ transformiert, so ergibt sich

$$C = 4(e_1 - e_3), \quad \lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}. \tag{16}$$

Je nach der Numerierung bekommt man im allgemeinen sechs verschiedene Werte von λ und C. Ist $e_2 e_3$ die kleinste, $e_1 e_3$ die größte Seite im Dreieck $e_1 e_2 e_3$, so wird $|\lambda| \leqq 1$. Die sechs λ-Werte sind die Doppelverhältnisse, die die Nullstellen von $F(z)$ in verschiedenen Anordnungen geben. Es ist ja $(0, \infty, 1, 1/\lambda) = \lambda$. Nur in zwei Fällen reduziert sich die Zahl der Doppelverhältnisse und damit die der Normalformen: erstens wenn e_1, e_2, e_3 in gleichem Abstand auf einer Geraden liegen. Wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ muß der mittlere Punkt dann mit dem Nullpunkt zusammenfallen. Hier ist $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$, $\lambda = -1$, $1/2$ oder 2 (Harmonischer Fall). Zweitens wenn e_1, e_2, e_3 ein gleichseitiges Dreieck bilden. Hier ist also $g_2 = 0$, $g_3 \neq 0$ und $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (Äquianharmonischer Fall).

Bei der Herstellung einer Normalform des Integrals zweiter Gattung kann man ebenso wie im Falle I z_0 ins Unendliche werfen. Man hat also folgende Riemannsche Normalformen:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Cz(1-z)(1-\lambda z)}}, \int \frac{z\,dz}{\sqrt{Cz(1-z)(1-\lambda z)}}, \int \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{Cz(1-z)(1-\lambda z)}}. \tag{11''}$$

Für C und λ kommen alle Wertepaare (16) in Betracht.

III. Zu den Legendreschen Normalformen gelangt man, indem man in den Riemannschen Normalformen zunächst die Substitution $z = \zeta^2$ macht, die also nicht mehr linear ist. Schreibt man dann wieder ζ statt z, so erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{dz}{\sqrt{(e_1 - e_3)(1 - z^2)(1 - \lambda z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(e_1 - e_3)(1 - z^2)(1 - \lambda z^2)}}, \\ &\int \frac{dz}{(z^2 - z_0)\sqrt{(e_1 - e_3)(1 - z^2)(1 - \lambda z^2)}}. \end{aligned}\right. \tag{11'''}$$

Die beiden letzten Integrale sind keine Elementarintegrale mehr im früher definierten Sinne, da sie die quadratische Funktion z^2 bzw. $\frac{1}{z^2 - z_0}$ enthalten.

Um vollständige Übereinstimmung mit den Legendreschen Integralen zu bekommen, muß man noch die Substitution $z = \sin\varphi$ ausführen und bei dem mit $(-\lambda)$ multiplizierten Integral zweiter Gattung das Integral erster Gattung additiv hinzufügen. Abgesehen von konstanten Faktoren erhält man

$$(11'''')\quad \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\ \int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

mit $k^2 = \lambda$. Man nennt k den Modul der Integrale. Die Konstante n muß der Bedingung genügen: $n \neq 0,\ -1,\ -k^2$.

Die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit der unteren Grenze 0

$$F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

sind von Legendre für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 < k < 1$ mit großer Genauigkeit berechnet worden[1]). Sind die Nullstellen von $F(z)$ reell, so kann man die Transformation der zugehörigen Integrale auf die Normalform stets so einrichten, daß k in das Intervall $(0,1)$ hineinfällt, denn man kann, wie (16) lehrt, die Wurzeln e_1, e_2, e_3 so numerieren, daß $\lambda = k^2$ in dieses Intervall zu liegen kommt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß im äquianharmonischen Falle auch die Weierstrassschen Funktionen in Tabellen berechnet vorliegen[1]).

4. Funktionentheoretische Betrachtung der elliptischen Integrale. Die in den elliptischen Integralen auftretende Quadratwurzel ist überall, wo der Radikand nicht verschwindet, zweier verschiedener Werte fähig. Um nun die bisherigen Entwicklungen ganz einwandfrei zu gestalten, ist es notwendig, die elliptischen Integrale als bestimmte Integrale aufzufassen und längs des in der z-Ebene verlaufenden Integrationsweges den Wert der Wurzel überall eindeutig festzulegen. Dabei wird man natürlich verlangen müssen, daß sie dann auf dem ganzen Wege eine stetige Funktion darstellt. Legt man der Wurzel im Anfangspunkt des Weges einen bestimmten Wert bei, so ist offenbar durch

---

[1]) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig u. Berlin (Teubner) 1909.

die Stetigkeitsforderung ihr Wert längs des ganzen Weges bestimmt, falls dieser nicht durch Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von $F(z)$ hindurchgeht. Ist das jedoch der Fall, so muß man sich jedesmal beim Durchschreiten einer solchen Stelle für eine der beiden möglichen Fortsetzungen des Wurzelwertes entscheiden. Dann aber hat das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}} R\left(z, \sqrt{F(z)}\right) dz \tag{17}$$

längs des Integrationsweges $\mathfrak{K}$ einen bestimmten Sinn, falls die eventuell auftretenden Unendlichkeitsstellen des Integranden von niedrigerer als erster Ordnung sind. Um den obigen Tatbestand anschaulich zu machen, führt man sogenannte Riemannsche Flächen ein und nennt die Nullstellen von $F(z)$ ihre Verzweigungspunkte. Doch können wir hier darauf nicht näher eingehen[1]).

Wir betrachten nun das Integral (17) für alle Kurven, die von einem festen Punkt a der z-Ebene ausgehen. Dabei soll, falls a kein Verzweigungspunkt ist, der Wert der Wurzel für $z = a$ eindeutig festgelegt sein. Faßt man nun (17) als Funktion des Endpunktes z des Integrationsweges auf, so entsteht eine Funktion, die man als eine Stammfunktion des Integranden aufzufassen hat. Es ist nun von vornherein klar, daß man auf diese Weise zu mehrdeutigen Funktionen kommt, und man hat die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Funktionswerten im selben Punkt z zu suchen. Es erweist sich jedoch weiter als zweckmäßig, nur Integralwerte miteinander zu vergleichen, die aus Integralen mit demselben Endwert der Wurzel entspringen (Integralen auf Kurven, die im selben Punkte der Riemannschen Fläche endigen). Die Differenzen solcher Integralwerte können offenbar aufgefaßt werden als Integralwerte über geschlossene Kurven, auf denen $\sqrt{F(z)}$ stetig festgelegt ist.

Abel hat nun die fundamentale Entdeckung gemacht, daß die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung $t = \int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$ eine in der ganzen t-Ebene eindeutige Funktion darstellt, die Paare von Perioden besitzt, die in einem nichtreellen Verhältnis stehen. Solche Funktionen nennt man doppeltperiodisch. Wir wollen sie im folgenden unabhängig von der Theorie der elliptischen Integrale studieren. Nachher ist die Aufgabe zu lösen, unter ihnen diejenigen auszusuchen, die durch Umkehrung eines Integrals erster Gattung entstehen.

5. Elliptische Funktionen. Unter einer elliptischen Funktion $f(t)$ versteht man eine doppeltperiodische Funktion, die außer Polen keine

[1]) Vgl. etwa die S. 192 unter 3. und 4. genannten Lehrbücher.

Singularitäten besitzt. Es sind also wesentlich singuläre Laurentstellen ausgeschlossen. Bezeichnet man das Periodenpaar mit $2\omega_1$ und $2\omega_3$, so hat man

$$(18)\qquad \begin{cases} f(t+2\omega_1) = f(t), \\ f(t+2\omega_3) = f(t). \end{cases}$$

Von $2\omega_1$, $2\omega_3$ wird, wie noch einmal hervorgehoben sei, vorausgesetzt, daß sie in einem nicht reellen Verhältnis stehen, daß also ω_1 und ω_3 verschiedene Arkus besitzen. Betreffs der Numerierung treffen wir ein für allemal die Festsetzung, daß $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ einen positiven Imaginärteil haben soll. Es ist selbstverständlich, daß mit ω_1, ω_3 auch

$$(19)\qquad w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$$

ebenfalls eine Periode von f ist, wenn m, n irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen sind. Zeichnet man sich alle Werte w in der t-Ebene auf, so erhält man die Eckpunkte eines parallelogrammatischen Gitters, des sogenannten Periodengitters. Wir fragen nun, ob man auch aus anderen Paaren von Perioden als $2\omega_1$, $2\omega_3$ das allgemeinste w durch ganzzahlige Linearkombination aufbauen kann. Sei

$$(19')\qquad \begin{cases} w_1 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega_3 \\ w_3 = 2m_3\omega_1 + 2n_3\omega_3 \end{cases}$$

ein solches Paar. Eine hinreichende Bedingung ist jedenfalls, daß die Determinante

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist; denn dann ergibt sich durch Auflösung der Gl. (19'), daß sich $2\omega_1$ und $2\omega_3$ ganzzahlig linear aus w_1 und w_3 aufbauen lassen, und dasselbe gilt dann selbstverständlich für jedes w. Eine einfache Überlegung, die wir jedoch nicht durchführen, zeigt, daß die Bedingung (20) auch notwendig ist. Man nennt jedes w_1, w_3, das unserer Forderung genügt, ein primitives Periodenpaar des Gitters. Man bezeichnet zwei Punkte t_1, t_2 der t-Ebene als homolog in bezug auf das Gitter, wenn die Differenz $t_1 - t_2$ einer Periode w gleich ist. Betrachtet man ein Parallelogramm mit den Ecken a, $a+2\omega_1$, $a+2\omega_3$, $a+2\omega_1+2\omega_3$ mit einem willkürlichen Wert a, so ist jeder Punkt der Ebene einem Punkt desselben homolog, und zwar im allgemeinen nur einem einzigen. Nur Punkte auf der Berandung des Parallelogramms können einander homolog sein. Um diesen Übelstand zu vermeiden, genügt es, die Seiten, die nicht von a ausgehen, nicht zum Parallelogramm zu rechnen. Der gesamte Wertevorrat einer doppelt-

periodischen Funktion wird dann in einem solchen „Fundamentalparallelogramm“ angenommen. Wir wollen im folgenden a stets so wählen, daß keine singuläre Stelle der jeweils betrachteten Funktion $f(t)$ auf den Rand desselben zu liegen kommt.

Es soll nun eine Reihe von Sätzen abgeleitet werden, die die Grundlage der Theorie der elliptischen Funktionen bilden.

1. Satz: Eine in der gesamten t-Ebene reguläre elliptische Funktion ist konstant. Eine solche Funktion bleibt nämlich im Fundamentalparallelogramm und damit in der ganzen Ebene absolut unter einer festen Schranke und ist somit konstant (Liouvillescher Satz!).

Eine nicht konstante elliptische Funktion muß also Pole besitzen. Diese lassen sich wegen der Periodizität in Gruppen homologer ordnen. Die Pole einer Gruppe haben offenbar kritische Bestandteile mit denselben Koeffizienten. Sie stimmen also gewiß in der Ordnung und im Werte des Residuums überein. Hebt man aus jeder Gruppe einen Pol heraus (man kann etwa die Pole im Fundamentalparallelogramm wählen), so spricht man von einem vollständigen Polsystem. Es gilt nun der

2. Satz: Die Summe der Residuen eines vollständigen Polsystems ist Null. Zum Beweise hat man zu zeigen, daß die Residuensumme im Fundamentalparallelogramm Null ist. Dies folgt leicht durch Integration längs der Berandung des Parallelogramms, da sich die auf je zwei Gegenseiten bezüglichen Integrale wegen der Periodizität aufheben.

Eine einfache Folgerung des 2. Satzes ist die Nichtexistenz von elliptischen Funktionen mit nur einem einfachen Pol im Fundamentalparallelogramm.

Wendet man den 2. Satz auf $\frac{f'(t)}{f(t)}$ an und beachtet, daß ein k-facher Pol zu einem Residuum von der Größe $-k$, eine l-fache Nullstelle zu einem Residuum von der Größe l der neugebildeten Funktion führt (vgl. § 3, 6), so erhält man den

3. Satz: Eine elliptische Funktion nimmt im Fundamentalparallelogramm den Wert Null so oft an, als die Zahl der Pole daselbst beträgt. Man bezeichnet letztere als Ordnung der elliptischen Funktion. Betrachtet man jetzt statt $f(t)$ die Funktion $f(t) - \alpha$ mit einem beliebigen konstanten α, so erhält man den allgemeineren

4. Satz: Eine elliptische Funktion nimmt im Fundamentalparallelogramm jeden Wert so oft an, als ihre Ordnung beträgt.

‿ntegration von $\frac{tf'(t)}{f(t)}$ längs der Berandung eines Funda-
‿logramms ergibt sich leicht, wenn die Nullstellen und
‿ mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_k$ bezeichnet werden, der
. Die Differenz

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu = w \tag{21}$$

ist eine Periode. Wenn man eines der a bzw. b durch $a + w$ bzw. $b - w$ ersetzt, also durch einen passenden homologen Wert, kann man sogar rechts 0 erreichen.

6. Die Weierstrasssche $\wp$-Funktion. Weierstrass hat einen einfachen Weg zur Bildung elliptischer Funktionen angegeben. Man bilde die Reihe

$$\sum_{w} \frac{1}{(t-w)^3}. \tag{22}$$

Die Summation ist über alle Perioden eines gegebenen Gitters in irgendeiner Reihenfolge zu erstrecken. Die Konvergenz ergibt sich so: Beschränkt man t auf einen Kreis $|t| \leqq R$, so ist für einen Gitterpunkt außerhalb des Kreises mit doppeltem Radius $|t-w| \geqq \frac{|w|}{2}$. Es genügt also, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{w}{}' \frac{1}{|w|^3} \tag{23}$$

zu untersuchen. Der Strich beim Summenzeichen soll bedeuten, daß $w = 0$ bei der Summation wegzulassen ist. Wir wollen die Reihenglieder dieser neuen Reihe in bestimmter Weise zusammenfassen. Die erste Gruppe soll zu den acht Perioden gehören, die auf dem Parallelogramm mit den Ecken $\pm 2\omega_1 \pm 2\omega_3$ liegen, die zweite Periodengruppe liege auf dem Parallelogramm mit den Ecken $2(\pm 2\omega_1 \pm 2\omega_3)$ usw. Auf dem k-ten Parallelogramm liegen dann offenbar $8k$ Perioden. Bezeichnet man den Minimalabstand des ersten Parallelogramms vom Nullpunkt mit ϱ, so ist der entsprechende Wert für die k-te Gruppe gleich $k\varrho$ und der Anteil, den die k-te Periodengruppe für (23) ergibt, ist nicht größer als $\frac{8}{k^2} \cdot \frac{1}{\varrho^3}$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so ist also eine Majorante für (23) gewonnen. Daraus folgt weiter auf Grund der früheren Abschätzung, daß die Reihe (22) im Kreise $|t| \leqq R$ nach Abspaltung endlich vieler Glieder gleichmäßig konvergiert; sie stellt also daselbst eine (wegen

der absoluten Konvergenz von der Reihenfolge der w unabhängige) bis auf Pole reguläre analytische Funktion dar. Sehr leicht überzeugt man sich nun davon, daß (22) eine doppeltperiodische Funktion ist mit den gegebenen Perioden. In der Tat bewirkt eine Ersetzung von t durch t + einer Periode nur eine Vertauschung der Reihenglieder. Man hat also in (22) eine elliptische Funktion mit dreifachen Polen in den Periodenpunkten gewonnen.

Es ist nun von Bedeutung, daß auch die Stammfunktion von (22) eine elliptische Funktion darstellt. Um zu einer Reihendarstellung derselben zu gelangen, integriere man (22) nach Abspaltung des Gliedes $\frac{1}{t^3}$ von 0 bis t. Es ergibt sich so nach Multiplikation mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ und Festlegung der Integrationskonstanten die Funktion

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(t-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right). \tag{24}$$

Aus der Periodizität ihrer Ableitung ($\wp'(t + 2\omega_1) - \wp'(t) = 0$ und $\wp'(t + 2\omega_3) - \wp'(t) = 0$) ergibt sich zunächst nur, daß $\wp(t + 2\omega_1) - \wp(t)$ und $\wp(t + 2\omega_3) - \wp(t)$ konstant sind. Beachtet man aber weiter, daß $\wp(t)$ eine gerade Funktion ist, und setzt in diesen Differenzen $t = -\omega_1$ bzw. $-\omega_3$, so ergibt sich, daß sie identisch verschwinden müssen. $\wp(t)$ stellt also eine elliptische Funktion mit je einem Doppelpol in den Periodenpunkten dar. Man nennt sie die Weierstrasssche $\wp$-Funktion.

Wir beweisen nun die fundamentale Tatsache: $z = \wp(t)$ ist die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals erster Gattung: $t = \int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$. Es ist offenbar zu zeigen, daß $(\wp'(t))^2$ ein Ausdruck 3-ten oder 4-ten Grades in $\wp(t)$ mit lauter verschiedenen Nullstellen ist. $(\wp')^2$ ist eine elliptische Funktion mit sechsfachen Polen in den Gitterpunkten. Die Anfangsglieder der Reihenentwicklung im Nullpunkt mit nichtpositiven Potenzen von t lauten, wie eine leichte Rechnung aus (24) ergibt,

$$4\left(\frac{1}{t^6} - \frac{g_2}{10}\frac{1}{t^2} - \frac{g_3}{7}\right)$$

mit

$$\begin{cases} g_2 = 60 \sum{}' \dfrac{1}{w^4}, \\ g_3 = 140 \sum{}' \dfrac{1}{w^6}. \end{cases} \tag{25}$$

Die analogen Anfangsglieder von $\wp^3(t)$ sind nach Multiplikation mit 4

$$4\left(\frac{1}{t^6}+\frac{3g_2}{20}\frac{1}{t^2}+\frac{3g_3}{28}\right).$$

Die Anfangsglieder von $\wp'^2-4\wp^3$ sind also von niedrigerer als sechster Ordnung und gegeben durch $-\frac{g_2}{t^2}-g_3$, also genau die Anfangsglieder von $-g_2\wp(t)-g_3$. Die elliptische Funktion $\wp'^2-4\wp^3+g_2\wp+g_3$ ist also in der ganzen t-Ebene regulär und verschwindet im Nullpunkt, also ist sie nach dem 1. Satze von 5 identisch 0, d. h. $\wp(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$\wp'^2(t)=4\wp^3(t)-g_2\wp(t)-g_3 \tag{26}$$

mit den in (25) angegebenen Werten von g_2 und g_3. Statt (26) kann auch geschrieben werden

$$t=\int\limits_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}. \tag{27}$$

Um zu zeigen, daß (27) ein elliptisches Integral erster Gattung ist, muß noch bewiesen werden, daß die Nullstellen von $4z^3-g_2z-g_3$ paarweise verschieden sind. Sie sind, wie man (26) entnimmt, die Werte von $\wp(t)$ an den t-Stellen, wo $\wp'=0$ ist. Die Nullstellen von $\wp'(t)$ lassen sich aber leicht angeben. $\wp'(t)$ ist eine ungerade Funktion; insbesondere ist $\wp'(\omega_1)=-\wp'(-\omega_1)$. ω_1 und $-\omega_1$ unterscheiden sich aber um eine Periode. Es ist also auch $\wp'(\omega_1)=+\wp'(-\omega_1)$, und somit ist $\wp'(\omega_1)=0$. Ebenso ergibt sich $\wp'(\omega_2)=0$, $\wp'(\omega_3)=0$, wenn mit ω_3 der Wert $-(\omega_1+\omega_3)$ bezeichnet wird. Daß man in ω_1, ω_2, ω_3 und den homologen Punkten sämtliche Nullstellen von $\wp'(t)$ gewonnen hat, folgt aus der Tatsache, daß $\wp'(t)$ von dritter Ordnung ist und ω_1, ω_2, ω_3 paarweise inhomolog sind.

$$\wp(\omega_1)=e_1,\quad \wp(\omega_2)=e_2,\quad \wp(\omega_3)=e_3 \tag{28}$$

sind also gewiß die Nullstellen von $4z^3-g_2z-g_3$. Ihre Verschiedenheit ergibt sich nun so: $\wp(t)$ ist eine elliptische Funktion zweiter Ordnung, sie nimmt also in einem Fundamentalparallelogramm jeden Wert genau zweimal an. An einer Stelle, wo $\wp'(t)=0$ ist, wird also $\wp(t)$ genau zweimal angenommen und sonst nirgends im Parallelogramm. e_1, e_2, e_3 sind also tatsächlich paarweise verschieden und $\wp(t)$ ist die Umkehrung eines elliptischen Integrals erster Gattung in der Weierstrassschen Normalform[1]).

---

[1]) Auf die Abelsche Entdeckung, daß die Umkehrung jedes Integrals erster Gattung eine elliptische Funktion ist, können wir hier nicht eingehen.

7. Die Funktionen $\zeta(t)$ und $\sigma(t)$. Integriert man die Funktion $\wp(t)$, so erhält man nach Umkehrung des Vorzeichens die Funktion

$$\zeta(t) = \frac{1}{t} + \sum{}'\left(\frac{1}{t-w} + \frac{1}{w} + \frac{t}{w^2}\right). \tag{29}$$

Sie hat als singuläre Stellen einfache Pole in den Gitterpunkten mit dem Residuum 1. Da die Gleichung besteht: $\zeta'(t) = -\wp(t)$ oder $\zeta(t) = -\int \wp(t)\,dt$, so ist mit $z = \wp(t)$

$$\zeta(t) = -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{29'}$$

$\zeta(t)$ ist also nichts anderes als das Integral zweiter Gattung, das dem Integral erster Gattung (27) entspricht.

Wie verhält sich $\zeta(t)$ bei Ändernng von t um eine Periode? Es ist von vornherein klar, daß es keine periodische Funktion sein kann, da nach einer früheren Bemerkung eine elliptische Funktion nicht von erster Ordnung sein kann. Doch folgt aus $\wp(t + 2\omega_1) - \wp(t) = 0$, $\wp(t + 2\omega_3) - \wp(t) = 0$ durch Integration, daß die Differenzen

$$\begin{cases} \zeta(t + 2\omega_1) - \zeta(t) = 2\eta_1, \\ \zeta(t + 2\omega_3) - \zeta(t) = 2\eta_3 \end{cases} \tag{30}$$

konstant sein müssen.

Zwischen den vier Konstanten $\eta_1, \eta_3, \omega_1, \omega_3$ besteht die „Legendresche Relation"

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}. \tag{31}$$

Sie ergibt sich, indem man $\zeta(t)$ über die Berandung eines Fundamentalparallelogramms integriert, wobei $2\pi i$ herauskommen muß, da innen genau ein Pol mit dem Residuum 1 liegt; die auf je zwei Gegenseiten bezüglichen Integrale fasse man dann auf Grund von (30) zusammen.

Bildet man die Stammfunktion von $\zeta(t)$, indem man nach Abspaltung von $\frac{1}{t}$ längs eines von 0 bis t gehenden, die Gitterpunkte meidenden Weges integriert und $\log t$ als Stammfunktion des ersten Gliedes $\frac{1}{t}$ wählt, so erhält man

$$\log t + \sum{}'\left\{\log\left(1 - \frac{t}{w}\right) + \frac{t}{w} + \frac{t^2}{2w^2}\right\}. \tag{32}$$

Die Werte der Logarithmen unter dem Summenzeichen hängen von der Wahl des Integrationsweges ab. Um zu einer eindeutigen

zu gelangen, setze man (32) in die Exponentialfunktion ... ntsteht so die in der ganzen Ebene eindeutige und reguläre

$$\sigma(t) = t \prod{}' \left\{ \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{\frac{t}{w} + \frac{t^2}{2w^2}} \right\}.$$

...menhang mit $\zeta(t)$ ist durch

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \zeta(t)$$

...eben mit $\sigma'(0) = 1$. $\sigma(t)$ besitzt, wie man der Produktdarstellung (33) entnimmt, in den Gitterpunkten je eine einfache Nullstelle, verschwindet aber sonst nirgends.

Wie verhält sich $\sigma(t)$ bei Änderung von t um eine Periode? Unter Verwendung der in der Form $\frac{d \log \sigma(t)}{dt} = \zeta(t)$ schreibbaren Gl. (34) ergibt sich aus den Relationen (30), daß

$$(35') \qquad \begin{cases} \sigma(t + 2\omega_1) = c_1 e^{2\eta_1 t} \sigma(t), \\ \sigma(t + 2\omega_3) = c_3 e^{2\eta_3 t} \sigma(t) \end{cases}$$

gilt mit gewissen Konstanten c_1 und c_3. Nun beachte man, daß $\sigma(t)$ eine ungerade Funktion ist. Ersetzt man nämlich in (33) t durch $-t$ und w durch $-w$, was erlaubt ist, da $-w$ mit w ebenfalls das ganze Gitter durchläuft, so bleibt das Produkt auf der rechten Seite von (33) ungeändert, während durch den Faktor t das Vorzeichen gewechselt wird. Für $t = -\omega_1$ ergibt jetzt die erste der Relationen (35'), da $\sigma(\omega_1) \neq 0$ ist, für c_1 den Wert $-e^{2\eta_1\omega_1}$, und ebenso erhält man $c_3 = -e^{2\eta_3\omega_3}$. Man hat also

$$(35) \qquad \begin{cases} \sigma(t + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(t+\omega_1)} \sigma(t), \\ \sigma(t + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(t+\omega_3)} \sigma(t). \end{cases}$$

Aus den beiden Gleichungen (35) ergibt sich durch eine einfache Rechnung unter Benutzung der Legendreschen Relation, daß auch

$$\sigma(t + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(t+\omega_2)} \sigma(t)$$

ist, wenn $\eta_2 = \eta_1 + \eta_3$ gesetzt wird.

8. Produkt- und Partialbruchzerlegung elliptischer Funktionen. Will man bei einer rationalen Funktion Nullstellen und Pole in Evidenz setzen, so zerlegt man Zähler und Nenner derselben in Linearfaktoren. Will man die kritischen Bestandteile sichtbar hervortreten lassen, so nimmt man die Partialbruchzerlegung vor. Beide Darstellungen haben bei elliptischen Funktionen ihr Analogon. Die

Rolle, die ein Linearfaktor $z - a$ bei der Faktorzerlegung der rationalen Funktionen spielt, wird bei elliptischen Funktionen von $\sigma(t - a)$ übernommen. Bei der Übertragung der Partialbruchzerlegung tritt an Stelle von $\frac{1}{z - a}$ die Funktion $\zeta(t - a)$, und an Stelle der höheren Potenzen $\frac{1}{(z - a)^m}$ oder, was dasselbe ist, der höheren Ableitungen von $\frac{1}{z - a}$ treten die Ableitungen von $\zeta(t - a)$, also $\wp(t - a)$, $\wp'(t - a)$, $\cdots$.

Zur Faktorzerlegung kommt man in folgender Weise: Sei

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \quad \text{bzw.} \quad b_1, b_2, \ldots, b_k$$

ein vollständiges System inhomologer Nullstellen bzw. Pole der darzustellenden elliptischen Funktion $f(t)$. Nach (21) können sie so gewählt werden, daß

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k \tag{36}$$

ist. Wir bilden

$$f_1(t) = \frac{\sigma(t - a_1)\,\sigma(t - a_2)\ldots\sigma(t - a_k)}{\sigma(t - b_1)\,\sigma(t - b_2)\ldots\sigma(t - b_k)}.$$

Die Funktion $f_1(t)$ hat dieselben Nullstellen und Pole wie $f(t)$, und zwar mit derselben Vielfachheit. Wie verhält sie sich bei Vermehrung von t um eine Periode? Es ist nach (35)

$$\sigma(t + 2\omega_1 - a_\nu) = -\sigma(t - a_\nu)\,.\,e^{2\eta_1(t + \omega_1 - a_\nu)}$$

und ebenso

$$\sigma(t + 2\omega_1 - b_\nu) = -\sigma(t - a_\nu)\,e^{2\eta_1(t + \omega_1 - b_\nu)}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Dies ergibt unter Benutzung von (36):

$$f_1(t + 2\omega_1) = f_1(t)$$

und ebenso

$$f_1(t + 2\omega_3) = f_1(t).$$

$f_1(t)$ ist somit ebenso wie $f(t)$ eine elliptische Funktion. $\frac{f_1(t)}{f(t)}$ ist also eine elliptische Funktion ohne Singularitäten und als solche konstant. Damit ist bewiesen, daß $f(t)$ die Faktorzerlegung

$$f(t) = C\,\frac{\sigma(t - a_1)\,\sigma(t - a_2)\ldots\sigma(t - a_k)}{\sigma(t - b_1)\,\sigma(t - b_2)\ldots\sigma(t - b_k)} \tag{37}$$

gestattet mit konstantem C.

Als Beispiel leiten wir die sogenannten Additionstheoreme von $\zeta(t)$ und $\wp(t)$ ab. Wir setzen $f(t) = \wp(t) - \wp(a)$, wo a eine

von den Perioden w verschiedene Konstante ist. Ein vollständiges System von Nullstellen von $f(t)$ ist a, $-a$ und von Polen 0, 0. Da hierfür die Relation (36) erfüllt ist, so hat man

$$\wp(t) - \wp(a) = C \cdot \frac{\sigma(t-a)\sigma(t+a)}{\sigma^2(t)}.$$

Die Konstante ergibt sich nach Multiplikation mit t^2 durch Grenzübergang $t \to 0$ zu $-\frac{1}{\sigma^2(a)}$. Es ist also

$$(38) \qquad \wp(t) - \wp(a) = -\frac{\sigma(t-a)\sigma(t+a)}{\sigma^2(t)\sigma^2(a)}.$$

Die logarithmische Ableitung hiervon nach t bzw. a ergibt das Formelpaar

$$\frac{\wp'(t)}{\wp(t) - \wp(a)} = \zeta(t+a) + \zeta(t-a) - 2\zeta(t),$$

$$\frac{-\wp'(a)}{\wp(t) - \wp(a)} = \zeta(t+a) - \zeta(t-a) - 2\zeta(a);$$

durch Addition derselben erhält man

$$(39) \qquad \zeta(t+a) = \zeta(t) + \zeta(a) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(t) - \wp'(a)}{\wp(t) - \wp(a)}.$$

Das ist das „Additionstheorem" der Funktion $\zeta(t)$.

Durch Differentiation nach t ergibt sich hieraus das Additionstheorem der $\wp$-Funktion:

$$(40) \qquad \wp(t+a) = \wp(t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\wp'(t) - \wp'(a)}{\wp(t) - \wp(a)}\right).$$

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der Partialbruchzerlegung einer elliptischen Funktion $f(t)$. Es sei a ein Pol derselben mit dem kritischen Teile

$$\frac{\alpha_1}{t-a} + \frac{\alpha_2}{(t-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_l}{(t-a)^l}.$$

Denselben kritischen Teil in a hat

$$f_a(t) = \alpha_1\zeta(t-a) + \alpha_2\wp(t-a) - \cdots + (-1)^{l-2}\alpha_l \frac{\wp^{(l-2)}(t-a)}{(l-1)!}.$$

Die Summe $\sum_a f_a(t)$, erstreckt über ein vollständiges System inhomologer Pole a, stimmt daher mit $f(t)$ in den Polen und in den zugehörigen kritischen Bestandteilen überein. Nun ist weiter die

Summe sogar eine elliptische Funktion; denn ändert man t um $2\omega_1$ ab, so kommt nach (30) zum ersten Bestandteil in dem Ausdruck für $f_a(t)$ die Konstante $2\eta_1\alpha_1$ additiv hinzu, während der Rest ungeändert bleibt, und $\sum_a f_a(t)$ ändert sich somit um $2\eta_1 \sum_a \alpha_1$. Die letztere Summe verschwindet aber nach Satz 2 in **5**. $f(t) - \sum_a f_a(t)$ ist also eine überall reguläre elliptische Funktion und als solche konstant, und man hat in

$$f(t) = C + \sum_a f_a(t) \tag{41}$$

das Analogon der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion gewonnen.

Eine wichtige Anwendung findet die Formel (41), ähnlich wie in der Theorie der rationalen Funktionen, bei der Integration einer elliptischen Funktion. Es ist ja

$$\int f(t)\,dt = Ct + \sum_a \int f_a(t)\,dt + \text{konst.}$$

und

$$\int f_a(t)\,dt = \alpha_1 \log \sigma(t-a) - \alpha_2 \zeta(t-a) - \cdots + (-1)^{l-2} \alpha_l \frac{\wp^{(l-3)}(t-a)}{(l-1)!}.$$

Eine weitere für die Theorie der elliptischen Funktionen fundamentale Folgerung ist in dem Satze enthalten: Jede elliptische Funktion läßt sich als rationale Funktion von $\wp(t)$ und $\wp'(t)$ schreiben. Zum Beweis ziehen wir die Additionstheoreme (39) und (40) heran, indem wir mit ihrer Hilfe in (41) sämtliche Bestandteile in $\sum_a f_a(t)$ durch $\zeta(t)$ und dessen Ableitungen $\wp(t)$, $\wp'(t), \ldots$ ausdrücken. Dabei fällt aber $\zeta(t)$ vollständig heraus, da es nur additiv mit der Konstante $\sum_a \alpha_1 = 0$ multipliziert auftritt. Andererseits folgt aus $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ durch Differentiation und darauffolgende Division durch $2\wp'$

$$\wp'' = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2} g_2,$$

und weitere Differentiationen, bei denen man jedesmal $\wp''$ durch $6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$ ersetzt, liefern, daß sich alle Ableitungen von $\wp(t)$ ganz und rational durch $\wp(t)$ und $\wp'(t)$ ausdrücken lassen; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir können jetzt beweisen, daß die Integration einer elliptischen Funktion und Ausführung eines elliptischen Integrals völlig äqui-

valente Probleme sind. Sei $f(t) = R(\wp(t), \wp'(t))$ als rationale Funktion von $\wp$ und $\wp'$ dargestellt. Dann ist vermöge $z = \wp(t)$

$$\int f(t)\,dt = \int R\left(z, \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}\right) \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

und rechts steht ein willkürliches elliptisches Integral.

9. Die Funktionen $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_3(t)$; $\operatorname{sn} t$, $\operatorname{cn} t$, $\operatorname{dn} t$. Die bisher eingeführten Weierstrassschen Funktionen reichen aus, um sämtliche elliptischen Funktionen aus ihnen aufzubauen. Doch ist es zweckmäßig, neben ihnen noch gewisse mit ihnen verwandte Funktionen einzuführen, die eng mit den von Jacobi benutzten, von ihm als ϑ-Funktionen bezeichneten Transzendenten zusammenhängen, da letztere sich sehr für praktische Rechnungen eignen. Wir suchen die Produktdarstellung von $\dfrac{1}{\wp(t) - e_\alpha}$.

Nach (38) ist mit $a = \omega_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$

$$\frac{1}{\wp(t) - e_\alpha} = -\frac{\sigma^2(t)\,\sigma^2(\omega_\alpha)}{\sigma(t-\omega_\alpha)\,\sigma(t+\omega_\alpha)}.$$

Andererseits ist nach (35) $\sigma(t+\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha t}\sigma(t-\omega_\alpha)$, also

$$\frac{1}{\wp(t) - e_\alpha} = \frac{\sigma^2(t)}{\sigma_\alpha^2(t)} \tag{42}$$

mit

$$\sigma_\alpha(t) = -\frac{e^{\eta_\alpha t}\,\sigma(t-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{43}$$

Die drei Funktionen $\sigma_\alpha(t)$ werden die drei Nebensigma genannt. Es ist zu beachten, daß $\dfrac{1}{\sqrt{\wp(t) - e_\alpha}}$ in die zwei eindeutigen Funktionen $\dfrac{\sigma(t)}{\sigma_\alpha(t)}$ und $-\dfrac{\sigma(t)}{\sigma_\alpha(t)}$ zerfällt.

Der Quotient $\dfrac{\sigma(t)}{\sigma_3(t)}$ hängt zusammen mit der von Jacobi eingeführten Funktion $\operatorname{sn}(w)$. Es ist

$$\operatorname{sn} w = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma\left(\dfrac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}. \tag{44}$$

Die Umkehrung von $\zeta = \operatorname{sn} w$ ergibt sich durch einfache Rechnung zu

$$(44') \qquad w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda\zeta^2)}}$$

mit $\lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, sn w ist also die Umkehrung eines elliptischen Integrals erster Gattung in der Legendreschen Normalform (11‴). Neben sn w werden häufig noch die Jacobischen Funktionen

$$(45) \qquad \operatorname{cn} w = \frac{\sigma_1\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} w = \frac{\sigma_2\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}$$

benutzt. Aus ihrer Definition folgen unmittelbar die Beziehungen

$$(46) \begin{cases} \operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w = 1, \ \operatorname{dn}^2 w - k^2 \operatorname{cn}^2 w = k'^2, \ \operatorname{dn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 w = 1, \\ \frac{d \operatorname{sn} w}{dw} = \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w, \ \frac{d \operatorname{cn} w}{dw} = -\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w, \ \frac{d \operatorname{dn} w}{dw} = -k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \end{cases}$$

mit $k^2 = \lambda$, $k'^2 + k^2 = 1$.

10. Die Jacobischen ϑ-Funktionen. Die Weierstrassschen Reihendarstellungen konvergieren sehr langsam. Zu Zahlenrechnungen eignen sich weit besser die Jacobischen ϑ-Funktionen. Kennt man die Weierstrassschen σ-Funktionen, so gelangt man zu diesen am einfachsten in folgender Weise: Man versucht durch Hinzufügung von einfachen Faktoren in einer der Größen $2\omega_1$, $2\omega_3$ Periodizität oder höchstens Vorzeichenwechsel zu erzielen. Wir führen dies bei $\sigma(t)$ durch. Es ist nach (35)

$$\sigma(t + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(t+\omega_1)}\sigma(t).$$

Andererseits ist für $\varphi(t) = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}t^2}$

$$\varphi(t + 2\omega_1) = e^{2\eta_1(t+\omega_1)}\varphi(t),$$

also

$$\frac{\sigma(t + 2\omega_1)}{\varphi(t + 2\omega_1)} = -\frac{\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Setzt man $\frac{t}{2\omega_1} = v$ und bezeichnet $\frac{\sigma}{\varphi}$ als Funktion von v mit $\psi(v)$, so kann man auch schreiben

$$(47) \qquad \psi(v + 1) = -\psi(v).$$

Einer Änderung von t um $2\omega_3$ entspricht ein Zuwachs von v um $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$, und aus $\sigma(t + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(t+\omega_3)}\sigma(t)$ folgt unter Benutzung der Legendreschen Relation $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$

$$\psi(v + \tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)}\psi(v). \tag{48}$$

Aus (47) folgt, daß $\psi(v)$ die Periode 2 hat:

$$\psi(v + 2) = \psi(v). \tag{47'}$$

Da $e^{\pi i v} = \chi(v)$ von derselben Art ist, ja sogar $\chi(v_1) = \chi(v)$ überhaupt nur möglich ist, wenn $v_1 - v$ ein Vielfaches der Periode 2 ist, so läßt sich $\psi(v)$ als eindeutige Funktion von $\chi(v) = z$ schreiben. z ist aller Werte fähig bis auf $z = 0$. Es gilt also eine Laurententwicklung

$$\psi(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Einer Änderung von v um 1 entspricht Vorzeichenwechsel von z. Wegen (47) müssen daher in der Laurentreihe die geraden Potenzen fehlen; es ist also

$$\psi(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1} z^{2m+1}. \tag{49}$$

Was besagt (48) für die Koeffizienten? Setzt man $e^{\pi i \tau} = h$, so ist $\chi(v + \tau) = h\chi(v)$ und somit auf Grund von (48)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1} h^{2m+1} z^{2m+1} = -\frac{1}{z^2 h} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1} z^{2m+1}$$

oder in Koeffizienten ausgedrückt:

$$a_{2m+1} = -h^{2m} a_{2m-1}.$$

Dies lehrt, daß die Koeffizientenreihe gegeben ist durch

$$a_{2m+1} = C \cdot (-1)^m h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}$$

und

$$\psi(v) = C \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} z^{2m+1}$$

wird mit konstantem C. Die gebrochenen Potenzen sind im Sinne von

$$h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}(2m+1)^2}$$

zu verstehen. Die Reihe mit $C = -i$

$$\vartheta_1(v/\tau) = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} z^{2m+1} \tag{50}$$

ist die Jacobische ϑ-Funktion mit dem Index 1.

Wenn man je zwei Glieder mit entgegengesetztem Exponenten von z zusammenfaßt, kann man auch schreiben:

$$\vartheta_1(v/\tau) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} \sin(2m+1) v\pi. \tag{50'}$$

Der Zusammenhang von ϑ_1 mit σ kann in der Form geschrieben werden:

$$\sigma(t) = \frac{2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}. \tag{51}$$

In ganz entsprechender Weise kommt man zu Reihen, mit deren Hilfe die Nebensigma rasch berechnet werden können:

$$\vartheta_2(v/\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} z^{2m+1},$$

$$\vartheta_3(v/\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^{m^2} z^{2m}.$$

$$\vartheta_0(v/\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m h^{m^2} z^{2m}.$$

Es ist

$$\sigma_1(t) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)},$$

$$\sigma_2(t) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)},$$

$$\sigma_3(t) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}.$$

Aus den Reihen ergibt sich leicht folgende Formeltabelle, die die Änderung der Funktionen bei Änderung von v um $1, \tau, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$ ergibt.

	$v+1$	$v+\tau$	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\frac{1+\tau}{2}$
$\vartheta_0(v)$	$\vartheta_0(v)$	$-e_1\vartheta_0(v)$	$\vartheta_3(v)$	$i e_2 \vartheta_1(v)$	$e_2\vartheta_2(v)$
$\vartheta_1(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$-e_1\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$i e_2 \vartheta_0(v)$	$e_2\vartheta_3(v)$
$\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_2(v)$	$e_1\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$e_2\vartheta_3(v)$	$-i e_2\vartheta_0(v)$
$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3(v)$	$e_1\vartheta_3(v)$	$\vartheta_0(v)$	$e_2\vartheta_2(v)$	$i e_2\vartheta_1(v)$

Darin bedeutet $e_1 = e^{-\pi i(2v+\tau)}$, $e_2 = e^{-\pi i\left(v+\frac{1}{4}\tau\right)}$.

Lehrbücher

1. L. Bieberbach, Funktionentheorie (Teubners technische Leitfäden), Leipzig (Teubner) 1922. — (Kurze Einführung.)
2. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, Leipzig (Teubner), 2. Aufl., 1923. — (Ausführliches Lehrbuch.)
3. G. Kowalewski, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen, Leipzig (Teubner) 1911. — (Auch kurzer Abriß der elliptischen Funktionen.)
4. Burkhardt-Faber, Funktionentheoretische Vorlesungen I, II, Berlin (Vereinigung wissenschaftlicher Verleger) 1920, 1921. — (Der 2. Band enthält eine eingehende Darstellung der Theorie der elliptischen Funktionen.)
5. Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Berlin (Springer), 3. Aufl., 1929 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. III). — (Vollständige Darstellung der analytischen und geometrischen Funktionentheorie.)

Zu § 4:

6. H. Weber, Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande. Braunschweig (Vieweg) 1912.

Viertes Kapitel

Unendliche Reihen und Produkte

Auf die Ausführungen dieses Kapitels, namentlich auf die beiden ersten Paragraphen, wird der Leser im allgemeinen nur zurückgreifen, wenn er nach genauerer Begründung der in späteren Abschnitten verwendeten Schlußweisen sucht. Von selbständigerem Interesse sind vor allem die §§ 4 und 5 über Fouriersche Reihen und singuläre Integrale.

§ 1. Konvergenzkriterien

1. Begriff der Konvergenz. Wir betrachten eine Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

mit den Partialsummen (Teilsummen, auch Abschnitte genannt)

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \cdots. \tag{2}$$

Konvergiert die Folge $\{s_n\}$ gegen einen endlichen Grenzwert s, so sagen wir, daß die Reihe (1) konvergiert und ihre Summe gleich s ist. Besitzt dagegen die Folge $\{s_n\}$ keinen endlichen Grenzwert, so sagen wir, daß (1) divergent ist. Für die Konvergenz einer Reihe ist somit notwendig und hinreichend (vgl. III, § 1, 2): Zu jeder posi-

tiven Zahl ε gibt es eine Zahl M derart, daß für $n > M$ und für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \tag{3}$$

gilt. Insbesondere ist im Falle der Konvergenz: $|a_{n+1}| < \varepsilon$, d. h.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{4}$$

Das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe strebt somit gegen 0. Dies ist jedoch nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung, wie das Beispiel der harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{5}$$

zeigt; die in I, § 4, **3** hergeleitete Beziehung (37) lehrt nämlich, daß ihre Partialsummen gegen ∞ streben.

Aus der Definition (2) folgt, daß bei einer unendlichen Reihe mit lauter positiven Gliedern die Konvergenz der Partialsummen s_n mit ihrer Beschränktheit gleichbedeutend ist.

Neben (1) betrachten wir die Reihe

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{1'}$$

die aus (1) hervorgeht, wenn man $|a_n|$ an Stelle von a_n setzt. Ist (1') konvergent, so gilt das gleiche für (1). Es ist nämlich

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|.$$

Eine Reihe (1), für die gleichzeitig auch (1') konvergiert, nennen wir absolut konvergent. Das Beispiel [vgl. **3**, b)]

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log \operatorname{nat} 2 \tag{6}$$

im Verein mit der Divergenz von (5) zeigt, daß eine konvergente Reihe nicht notwendig absolut konvergiert; eine Reihe, die konvergent ist, ohne absolut konvergent zu sein, nennen wir bedingt konvergent.

Bei einer absolut konvergenten Reihe kann die Reihenfolge der Glieder auf beliebige Weise abgeändert werden, ohne daß dadurch die Konvergenz gestört oder die Summe verändert wird. Bildet man nämlich die Partialsumme der umgeordneten Reihe $a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_\nu}$, wobei die Folge $n_1, n_2, \ldots$ jede positive ganze Zahl einmal und nur einmal enthält, so umfaßt die Reihe der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ alle natürlichen Zahlen bis zu einem gewissen N und einige größere. Die neue Summe unterscheidet sich daher von s_N um einen geringeren Betrag als $|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots$. Dieser Betrag geht aber

bei der absolut konvergenten Reihe mit wachsendem N, während s_N gegen s konvergiert, gegen Null. Bei bloß bedingt konvergenten Reihen dagegen ist eine Umordnung der erwähnten Art im allgemeinen unzulässig. Darüber hinaus gilt der Satz, daß man durch geeignete Umordnung der Glieder einer bedingt konvergenten Reihe jede beliebig vorgegebene Zahl als Summe erhalten kann.

Wir wollen beispielsweise die geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \tag{7}$$

betrachten, wobei q eine beliebige reelle Zahl ist. Man hat hier

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (\text{bzw. } s_n = n \text{ für } q = 1). \tag{7'}$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1 \text{ (hier ist die Konvergenz eine absolute)}, \\ \infty \text{ für } |q| > 1 \text{ und } q = 1, \\ \text{nicht vorhanden für } q = -1. \end{cases}$$

Als ein weiteres Beispiel sei die Reihe

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots \tag{8}$$

genannt. Aus der Divergenz von (5) folgt, daß sie für $k = 1$ (also erst recht für $k < 1$) divergiert; wir wollen zeigen, daß sie für $k > 1$ konvergiert. Da nämlich die Kurve $y = \frac{1}{x^k}$ monoton abnehmend ist, so ist das Integral $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^k}\,dx$ größer als der Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Seiten 1 und $(n+1)^{-k}$ sind. Das heißt:

$$\frac{1}{(n+1)^k} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^k} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k} < \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^k} = \frac{1-(n+1)^{1-k}}{k-1}.$$

Hieraus folgt, daß die Partialsummen von (8) beschränkt bleiben.

Die eben benutzte Methode ist auch in anderen Fällen recht gut brauchbar. Man kann auf diese Weise die Konvergenzdiskussion von unendlichen Reihen, deren Glieder positiv und monoton abnehmend sind, auf die von uneigentlichen (unendlichen) Integralen zurückführen.

2. Funktionenreihen. Betrachten wir eine unendliche Reihe $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$, deren Glieder in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ eindeutige Funktionen von x sind. Eine solche Reihe

kann für gewisse x konvergieren, für andere x divergieren. (Die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ konvergiert z. B. für $-1 < x < 1$ und divergiert für $|x| \geqq 1$.) Wir wollen annehmen, daß unsere Reihe für $a \leqq x \leqq b$ konvergiert; dann stellt sie in diesem Intervall eine Funktion $f(x)$ dar. Es gehört sodann zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl M derart, daß $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ ist, wenn nur $n > M$ wird. Hierbei bezeichnet $S_n(x)$ die n-te Partialsumme. Die kleinste Zahl M dieser Art hängt von ε und im allgemeinen außerdem noch von der Stelle x ab, $M = M(\varepsilon, x)$. Ein wichtiger Fall liegt nun vor, wenn man die Differenz $f(x) - S_n(x)$ bloß durch die Wahl eines genügend großen von x unabhängigen n beliebig klein machen kann, so daß die Beziehung $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ für jedes x in a, b besteht. Dies ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß die Zahlen $M(\varepsilon, x)$ eine endliche obere Grenze $M(\varepsilon)$ besitzen, welche nur mehr von ε allein abhängt; es genügt sodann, $n > M(\varepsilon)$ zu wählen. Eine solche Reihe wollen wir eine im Intervall a, b gleichmäßig konvergente nennen. Entsprechend erklärt man die gleichmäßige Konvergenz in offenen bzw. halboffenen Intervallen. Diese Definition entspricht offenbar der Definition der gleichmäßigen Konvergenz von uneigentlichen Integralen (vgl. I, § 4, 1). Auch die folgenden Sätze haben ihr Analogon in dem Gebiete der Integrale.

Eine Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig, wenn sich dazu eine konvergente majorante Reihe angeben läßt, deren Glieder von x unabhängig sind; unter einer majoranten Reihe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ verstehen wir eine solche, für die $|f_n(x)| \leqq \alpha_n$ gilt ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Die geometrische Reihe konvergiert z. B. gleichmäßig für $|x| \leqq r < 1$ bei festem r, dagegen nicht gleichmäßig für $|x| < 1$.

Es gelten nun die folgenden Sätze: Eine gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen Funktionen besitzt eine stetige Summe. Eine derartige Reihe darf gliedweise integriert werden; sie kann auch gliedweise differenziert werden, vorausgesetzt, daß ihre Glieder stetig differenzierbar sind und daß die gliedweise differenzierte Reihe ebenfalls gleichmäßig konvergiert.

Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Ungleichung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq |f(x_1) - S_n(x_1)| + |S_n(x_1) - S_n(x_2)| + |S_n(x_2) - f(x_2)|.$$

Das erste und dritte Glied ist nämlich für jedes x_1 und x_2 kleiner als ε, wenn n genügend groß gewählt wird. Das zweite Glied ist [wegen der Stetigkeit von $f_n(x)$] kleiner als ε, wenn nur (bei festgehaltenem n) $|x_1 - x_2|$ genügend klein ist. Daß die Summe einer

konvergenten, aber nicht gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe im allgemeinen nicht stetig ist, zeigt das folgende Beispiel:

$$(1 - x) + (1 - x)x + \cdots + (1 - x)x^n + \cdots. \tag{9}$$

Diese Reihe ist (nicht gleichmäßig) konvergent mit der Summe 1 für $0 \leqq x < 1$. Sie konvergiert auch für $x = 1$, und zwar gegen 0. Ihre Summe hat also eine Unstetigkeit an der Stelle $x = 1$.

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung [I, § 2, (5)], nach welchem

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - S_n(x)]\,dx\right| < \varepsilon(x_2 - x_1).$$

Um den dritten Teil zu beweisen, setzen wir $\varphi(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x) + \cdots = \lim\limits_{n \to \infty} S_n'(x)$. Laut Voraussetzung ist diese Reihe gleichmäßig konvergent, also $\varphi(x)$ stetig. Durch Integration folgt dann

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) + \cdots = f(x) - f(a),$$

d. h. $\varphi(x) = f'(x)$, w. z. b. w. Man sieht auch, daß die gleichmäßige Konvergenz der abgeleiteten Reihe die der gegebenen Reihe zur Folge hat, wenn diese nur in einem Punkte konvergiert.

3. Konvergenzkriterien. a) Ein wichtiges Hilfsmittel zur Entscheidung über die Konvergenz unendlicher Reihen liefert das Prinzip der Vergleichung der zu untersuchenden Reihe mit einer solchen, deren Konvergenz bzw. Divergenz bekannt ist. Ist

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \tag{10}$$

eine Reihe mit positiven Gliedern, die zu den entsprechenden Gliedern der Reihe (1) in der Beziehung $|a_n| \leqq b_n$ steht (vgl. oben), so zieht die Konvergenz der Reihe (10) die von (1) [sogar die absolute Konvergenz von (1)] nach sich.

Als Anwendung sei der folgende Satz erwähnt: Die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ist absolut konvergent bzw. divergent, je nachdem

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \text{ bzw. } > 1 \tag{11}$$

ist. (Cauchysches Kriterium.) Daß hier im zweiten Falle Divergenz eintreten muß, ist klar, weil die notwendige Bedingung der Konvergenz: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, nicht erfüllt ist. Liegt andererseits der erste Fall vor, so ist von einem gewissen n an $|a_n|^{\frac{1}{n}} < q$, d. h. $|a_n| < q^n$.

wobei q ein positiver echter Bruch ist. Der Vergleich mit (7) ergibt die Konvergenz.

b) Ein Konvergenzkriterium von ganz anderer Natur ist das folgende: Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine beliebige Zahlenfolge, deren Teilsummen $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ für jedes n beschränkt bleiben: $|s_n| < S$. Dann konvergiert die Reihe

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n + \cdots, \tag{12}$$

sofern die $\{c_n\}$ eine monoton gegen 0 konvergierende, im übrigen beliebige Folge bilden.

Für den Beweis nehmen wir etwa an, daß die c_n monoton abnehmen ($c_n > 0$), und betrachten die Summe

$$a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \cdots + a_{n+k} c_{n+k}. \tag{12'}$$

Wie eine einfache Umformung (die sogenannte Abelsche partielle Summation) zeigt, läßt sie sich in der Form schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} &(s_{n+1} - s_n) c_{n+1} + \cdots + (s_{n+k} - s_{n+k-1}) c_{n+k} = - s_n c_{n+1} \\ &+ s_{n+1}(c_{n+1} - c_{n+2}) + \cdots + s_{n+k-1}(c_{n+k-1} - c_{n+k}) + s_{n+k} c_{n+k}. \end{aligned}\right. \tag{12''}$$

Ihr Betrag bleibt also für jedes n und k kleiner als

$$S(c_{n+1} + c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+2} - c_{n+3} + \cdots + c_{n+k-1} - c_{n+k} + c_{n+k}) = 2 S c_{n+1},$$

wird daher für genügend große n beliebig klein, und zwar für jedes k, w. z. b. w.

Als Beispiel für die Anwendung dieses Kriteriums sei die Reihe (6) genannt.

c) Wir wollen jetzt die Konvergenzverhältnisse der Reihe (1) näher studieren unter der Voraussetzung, daß sämtliche Glieder a_n positiv sind und der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern sich in der Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^k} \tag{13}$$

schreiben läßt, wo μ und k feste Zahlen sind, $k > 1$ ist und $|\omega_n|$ für jedes n beschränkt bleibt. Solche Reihen treten in der Analysis häufig auf. Wir zeigen, daß die Reihe konvergiert, wenn $\mu > 1$, und divergiert, wenn $\mu \leqq 1$ ist.

Im ersten Falle gilt nämlich für genügend große n, etwa für $n \geqq N$,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad (n-1)\, a_n - n a_{n+1} > \varepsilon a_n,$$

wo $\varepsilon > 0$ ist. Daraus folgt durch Addition

$$\varepsilon (a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n) < (N-1)\, a_N - n a_{n+1} < (N-1)\, a_N.$$

Die Partialsummen liegen also unterhalb einer festen Schranke.

Im zweiten Falle wenden wir die für $x \leqq {}^1/_2$ gültige Ungleichung

$$\log(1-x) \geqq -x - 2x^2 \tag{14}$$

an [vgl. § 7, (4)]. Mit Hilfe von (14) folgt aus (13) für genügend große n, etwa für $n \geqq N$,

$$\log a_{n+1} - \log a_n \geqq -\frac{\mu}{n} - \frac{A}{n^{1+\varepsilon}},$$

wo A und ε gewisse positive Konstanten sind. Hiernach ist

$$\log a_{n+1} \geqq -\mu\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$-A\left(\frac{1}{N^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(N+1)^{1+\varepsilon}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) + \log a_N.$$

Wegen I, § 4, (37) folgt hieraus

$$\log a_{n+1} \geqq -\mu \log n - A' \quad \text{oder} \quad a_{n+1} \geqq \frac{A''}{n^\mu} \quad (A', A'' > 0).$$

also mit Rücksicht auf den über die Reihen (8) bewiesenen Satz die Divergenz unserer Reihe.

4. Halbkonvergente Reihen. In der Analysis sucht man häufig den angenäherten Wert einer Funktion für große Werte des Arguments. Will man z. B. das Verhalten der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftretenden Funktion

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt \tag{15}$$

für große x kennen, so verfährt man folgendermaßen: Durch die Substitution $t = \frac{u}{2x} + x$ geht $\varphi(x)$ in

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4x^2}} e^{-u}\,du \tag{15'}$$

über. Nun ist nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$e^{-\frac{u^2}{4x^2}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu u^{2\nu}}{(2x)^{2\nu}\nu!} + \left(-\frac{u^2}{4x^2}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\theta\frac{u^2}{4x^2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Daraus folgt wegen I, § 2, (18)

$$\varphi(x) = e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu!\,(2x)^{2\nu+1}} + R_n(x), \tag{15''}$$

wobei, wie man sieht,

$$|R_n(x)| < \frac{(2n)!}{n!\,(2x)^{2n+1}} e^{-x^2}. \tag{16}$$

Das erste Glied rechts in (15'') liefert bei festem (übrigens ganz beliebigem) n eine gute Approximation von $\varphi(x)$, wenn x groß ist. Die formal angeschriebene Reihe

$$e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!\,(2x)^{2\nu+1}} \tag{17}$$

ist dagegen für jedes x divergent. [Der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern beträgt nämlich absolut genommen $2(2n-1)(2x)^{-2}$, wächst also für $\lim n = \infty$ über alle Grenzen.] Eine derartige Reihe nennt man halbkonvergent.

Die Eulersche Summenformel liefert in der in I, § 4, (35) angegebenen Gestalt unter sehr allgemeinen Voraussetzungen eine solche Reihe. Andere Beispiele halbkonvergenter Reihen siehe IX, § 3, **1**.

5. Summierbare Reihen. Es empfiehlt sich vielfach, auch divergenten Reihen eine Zahl als „Summe" zuzuweisen. Die Definition eines solchen Summationsverfahrens ist an sich willkürlich; man stellt bloß zumeist die Forderung, daß eine im gewöhnlichen Sinne konvergente Reihe stets auch im neuen Sinne summierbar sei, und zwar mit unveränderter Summe. Das einfachste Verfahren dieser Art besteht darin, an Stelle der Partialsummen s_n selbst, die arithmetischen Mittel derselben:

$$s_1,\ \frac{s_1+s_2}{2},\ \frac{s_1+s_2+s_3}{3},\ \ldots,\ \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n},\ \ldots \tag{18}$$

zu betrachten. Konvergiert diese Folge (18) gegen einen Grenzwert σ, so sagen wir, daß die gegebene Reihe (nach der Methode der arithmetischen Mittel erster Ordnung) summierbar ist, und zwar mit der Summe σ. Dies ist, wie sich leicht zeigen läßt, sicher der Fall, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ existiert; dann ist auch $\sigma = s$.

Daß diese Definition allgemeiner ist als die gewöhnliche, zeigt das Beispiel

$$1 - 1 + 1 - \cdots. \tag{19}$$

Diese Reihe ist divergent, weil die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht erfüllt ist. Es ist andererseits $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0, \cdots$, also, wie eine leichte Rechnung zeigt, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} = \frac{1}{2}$. Die Reihe (19) ist somit summierbar mit der Summe $1/2$.

Ein anderes Verfahren (Abelsche Summation) ordnet zu der Reihe (1) den Grenzwert

$$\lim_{r\to 1}(a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \cdots) = \lim_{r\to 1} \varphi(r)$$

als Summe zu, vorausgesetzt, daß $\varphi(r)$ einen Sinn hat. Bei der Reihe (19) wä... z. B. $\varphi(r) = 1 - r + r^2 - \cdots = \frac{1}{1+r} \to \frac{1}{2}$. Daß dieses Verfahren auch „konvergenzerhaltend" ist, ist der Inhalt des unten (§ 2, 4) zu beweisenden Abelschen Stetigkeitssatzes über Potenzreihen.

Solche Summationsmethoden spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Bezüglich einer Anwendung vgl. § 4, 4.

§ 2. Reelle und komplexe Potenzreihen

Wir betrachten in diesem Paragraphen Reihen von der Form

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

wobei die a_n gegebene komplexe Zahlen, x eine komplexe Veränderliche bezeichnet. Eine solche Reihe $\mathfrak{P}(x)$ nennt man eine **Potenzreihe**, die Zahlen a_n ihre Koeffizienten.

1. Konvergenzeigenschaften. Wir setzen $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$; dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = l\,|x|.$$

Daraus folgt, daß die Potenzreihe (1) für $|x| < 1/l$ konvergiert, für $|x| > 1/l$ divergiert. Für $|x| = 1/l$ ist ihr Verhalten im allgemeinen unbestimmt.

Die Zahl $1/l = \varrho$ nennt man den Konvergenzradius, den Kreis $|x| = \varrho$ in der komplexen x-Ebene den Konvergenzkreis der Reihe (1). (Vgl. III, § 3, 5.) Die Bestimmung des Konvergenzradius erfolgt nach der Formel

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\varrho}. \quad \text{(Cauchy-Hadamardscher Satz.)} \tag{2}$$

Die Potenzreihe konvergiert in jedem Kreise, der ganz im Innern des Konvergenzkreises liegt, absolut und gleichmäßig und stellt eine analytische Funktion $f(x)$ dar. Die Reihe (1) läßt sich beliebig oft differenzieren und integrieren; die so entstehenden Potenzreihen haben den gleichen Konvergenzkreis wie (1). Man erhält insbesondere $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so daß (1) mit der Taylorschen Reihe von $f(x)$ übereinstimmt.

Bemerkenswert sind folgende Grenzfälle: a) $l = 0$, d. h. $\varrho = \infty$. Die Reihe (1) konvergiert dann für jedes x. Die dargestellte Funktion $\mathfrak{P}(x)$ heißt in diesem Falle eine ganze (transzendente) Funktion, z. B.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

b) $l = \infty$, d. h. $\varrho = 0$. Die Reihe (1) konvergiert dann nur für $x = 0$. Zum Beispiel

$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + \cdots + n!\,x^n + \cdots.$$

Die Potenzreihen

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

haben den Konvergenzradius 1. Die Potenzreihe

$$1 + \binom{2}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \binom{2n}{n}x^n + \cdots$$

hat, wie man durch eine kleine Rechnung (vgl. § 7, 4) bestätigt, den Konvergenzradius $1/4$.

2. Rechnen mit Potenzreihen. Die Summe bzw. Differenz zweier Potenzreihen ergibt wieder eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius gewiß nicht kleiner ist als der kleinere der Konvergenzradien der beiden Potenzreihen. Das gleiche gilt für das „Produkt" zweier Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

wenn man unter dem (Cauchyschen) Produkt die Potenzreihe versteht:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\,x^n. \tag{3}$$

Sind $y = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ und $F(y) = A_0 + A_1 y + \cdots$ Potenzreihen mit von 0 verschiedenen Konvergenzradien, so erhält man für $F(y)$ als Funktion von x eine Potenzreihendarstellung, indem man die Potenzreihe für y in $F(y)$ einsetzt und sämtliche Potenzierungen (im Sinne der Cauchyschen Multiplikation) ausführt.

Eine feste Potenz von x tritt hierbei nur in einer endlichen Anzahl von Gliedern auf.

Wir benutzen diesen Satz zur Entwicklung des Quotienten zweier Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} \quad (b_0 \neq 0).$$

Wir setzen $y = (b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)/b_0$; dann ist $|y| < 1$ für genügend kleine $|x|$, also

$$\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1+y} = \frac{1}{b_0}(1 - y + y^2 - \cdots)$$
$$= \frac{1}{b_0} - \frac{b_1}{b_0^2}x + \left(\frac{b_1^2}{b_0^3} - \frac{b_2}{b_0^2}\right)x^2 + \cdots.$$

Durch Multiplikation mit $\mathfrak{P}_1(x)$ erhält man hieraus die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$.

Mit Hilfe des obigen Satzes kann man auch das Umkehrungsproblem von Potenzreihen erledigen. Ist $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, mi $a_1 \neq 0$, so können wir nach der Funktion (Potenzreihe) von y frager die x für genügend kleine $|y|$ darstellt. Ist diese Potenzreih $x = b_1 y + b_2 y^2 + \cdots$, so hat man identisch

$$y = a_1(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots) + a_2(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^2 + \cdots,$$

woraus durch Vergleichung der Koeffizienten

$$1 = a_1 b_1, \quad 0 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \quad 0 = a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3, \cdots$$

folgt. Wegen $a_1 \neq 0$ lassen sich hieraus die $b_1, b_2, b_3, \cdots$ sukzessive berechnen.

Diese Rechnung wird durch den folgenden Lagrangeschen Umkehrungssatz erleichtert: Setzt man $y = \frac{x}{f(x)}$ [$f(x)$ ist eine Potenzreihe mit von 0 verschiedenem Absolutglied], so ist kb_k gleich dem Koeffizienten von x^{k-1} in der Entwicklung von $[f(x)]^k$, $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Differentiation nach x und Multiplikation mit y^{-k} ergibt nämlich

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n y^{n-1} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{[f(x)]^k}{x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n y^{n-k-1} \frac{dy}{dx}.$$

Man entwickle hier beiderseits nach wachsenden Potenzen von x und vergleiche die Koeffizienten von x^{-1}. Für $n \neq k$ ist

$$n b_n y^{n-k-1} \frac{dy}{dx} = \frac{n b_n}{n-k} \frac{d y^{n-k}}{dx}.$$

Nun ist $y^{n-k} = x^{n-k}$ mal einer Potenzreihe. Die Ableitung eines solchen Ausdruckes kann also kein Glied mit x^{-1} enthalten. Für $n = k$ ist dagegen

$$k b_k y^{-1} \frac{dy}{dx} = k b_k \frac{d \log y}{dx} = k b_k (x^{-1} + \text{einer Potenzreihe}),$$

woraus die Behauptung folgt.

Als Beispiel sei die transzendente Gleichung $y = e^{-ax} x$, $a \neq 0$, erwähnt. Die Lösung läßt sich für kleine Werte von y in der Form

$$x = y + \frac{2a}{2!} y^2 + \frac{(3a)^2}{3!} y^3 + \cdots + \frac{(ka)^{k-1}}{k!} y^k + \cdots$$

darstellen, wie aus dem Lagrangeschen Satz folgt.

3. Die hypergeometrische Reihe. Unter der hypergeometrischen Reihe versteht man die Potenzreihe

$$(4)\quad \begin{cases} F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \dfrac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \\ + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \cdots. \end{cases}$$

Hierin sind α, β, γ beliebige reelle oder komplexe Parameter, von denen keiner gleich einer negativen ganzen Zahl oder Null ist. (In diesem Falle bricht die Reihe ab, vgl. VIII, § 4, **1.**) Zahlreiche Spezialfälle dieser Reihe sind geläufige Reihentypen. Es ist z. B.

$$(4')\quad F(-k,\beta,\beta;x) = 1 - \frac{k}{1}x + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}x^2 - \cdots = (1-x)^k$$

die binomische Reihe, ferner

$$(4'')\quad F(1,1,2;x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots = \frac{1}{x}\log\text{nat}\,\frac{1}{1-x}\quad\text{usw.}$$

Die hypergeometrische Reihe hat stets den Konvergenzradius 1.

Wie sind nun die Konvergenzverhältnisse für $x = 1$? Wir wollen diese Frage im Falle reeller Parameter beantworten. Es ist, wenn das n-te Glied von $F(\alpha,\beta,\gamma;1)$ mit a_n bezeichnet wird,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} \\ = \left(1+\dfrac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\dfrac{\beta-1}{n}\right)\left[1-\dfrac{\gamma-1}{n}+\left(\dfrac{\gamma-1}{n}\right)^2-\cdots\right] \\ = 1 + \dfrac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n} + \dfrac{\omega_n}{n^2},\qquad |\omega_n| < A. \end{cases}$$

Nach § 1, **3**, c) ist somit $F(\alpha,\beta,\gamma;1)$ konvergent, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ positiv, und divergent, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ negativ oder Null ist.

Die binomische Reihe $1 - \dfrac{k}{1} + \dfrac{k(k-1)}{1\,.\,2} - \cdots$ ist z. B. konvergent für $k > 0$ und divergent für $k < 0$.

4. Der Abelsche Stetigkeitssatz. Wie wir soeben gesehen haben, kann eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, deren Konvergenzradius 1 ist, für $x = 1$ konvergieren oder divergieren. Im ersten Falle können wir fragen, ob der Wert von $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sich stetig an die Werte der

Potenzreihe im Innern des Konvergenzkreises anschließt. Der Abelsche Satz besagt, daß dies der Fall ist, d. h.

$$\lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s \qquad (0 \leqq r < 1). \tag{6}$$

Der Beweis stützt sich auf die in § 1, **3**, b) benutzte partielle Summation. Sind $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die Partialsummen für $x = 1$, so ist $|s_n - s| < \varepsilon$ für $n \geqq N$. Nun ist für jedes $0 \leqq r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s = \sum_{n=0}^{N} a_n (r^n - 1) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (r^n - 1).$$

Für $K > N + 1$ ist ferner

$$\sum_{n=N+1}^{K} a_n (r^n - 1) = \sum_{n=N+1}^{K} [s_n - s - (s_{n-1} - s)](r^n - 1)$$

$$= -(s_N - s)(r^{N+1} - 1) + \sum_{n=N+1}^{K-1} (s_n - s)(r^n - r^{n+1}) + (s_K - s)(r^K - 1).$$

Daraus folgt für jedes K die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=N+1}^{K} a_n (r^n - 1) \right| < 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} (r^n - r^{n+1}) = 2\varepsilon + \varepsilon r^{N+1} < 3\varepsilon,$$

daher

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| \leqq \sum_{n=0}^{N} |a_n| (1 - r^n) + 3\varepsilon.$$

Werden ε und N festgehalten, ferner r genügend nahe an 1 gewählt, so wird hier das erste Glied kleiner als ε, woraus die Behauptung folgt.

§ 3. Fouriersches Integraltheorem

1. Der zweite Mittelwertsatz. Es sei $f(x)$ eine beschränkte und integrable, $\varphi(x)$ eine monotone Funktion im Intervall a, b. Wir beweisen die Existenz einer Stelle ξ in a, b, für welche

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) \, dx + \varphi(b) \int_{\xi}^{b} f(x) \, dx \tag{1}$$

ist. Hierbei sei unter $\varphi(a)$ der Limes $\varphi(a + 0)$, unter $\varphi(b)$ der Limes $\varphi(b - 0)$ verstanden.

Es genügt, (1) unter der Voraussetzung zu beweisen, daß $\varphi(x)$ monoton zunimmt und $\varphi(a) = 0$ ist. Sonst betrachte man $-\varphi(x)$

bzw. $\varphi(x) - \varphi(a)$. Das Integral auf der linken Seite von (1) ist der Limes von

$$(2)\qquad S_n = \varphi(\xi_1)\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \varphi(\xi_2)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \varphi(\xi_n)\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx,$$

wenn $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ wie in I, § 2, **1** irgend eine Einteilung von a, b, außerdem ξ_ν irgendeinen Punkt im Intervall $x_{\nu-1}$, x_ν bezeichnet und die Länge aller Intervalle gegen Null konvergiert. Wir wenden auf (2) die in § 1, **3**, b) benutzte Abelsche Umformung an und erhalten

$$(3)\qquad \begin{cases} S_n = \varphi(\xi_1)\int_a^{b} f(x)\,dx + [\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)]\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx + \cdots \\ \qquad + [\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})]\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx. \end{cases}$$

Der Grenzwert dieses Ausdruckes ändert sich nicht, wenn man ein mit wachsendem n gegen Null konvergierendes Glied hinzufügt:

$$(3')\qquad S_n' = S_n + [\varphi(b) - \varphi(\xi_n)]\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

Dieser Ausdruck liegt aber, da φ von Null bis $\varphi(b)$ wächst, zwischen $\varphi(b)A$ und $\varphi(b)B$, wenn A und B zwei Schranken für die in (3) und (3′) auftretenden Integrale sind. Für A und B kann man offensichtlich das Maximum bzw. Minimum der in a, b stetigen Funktion $F(x) = \int_x^b f(x)\,dx$ (vgl. I, § 2, 1) nehmen. Der Limes von S_n', d. h. das Integral links in (1), kann daher in der Form $\varphi(b)\mu$ geschrieben werden, wo μ einen Mittelwert von $F(x)$, d. h. einen Wert von $F(x)$ in a, b bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung.

Um gleich eine Anwendung zu geben, betrachten wir eine im endlichen Intervall a, b erklärte Funktion $f(x)$ von der folgenden Eigenschaft: Man kann dieses Intervall in endlich viele Teilintervalle zerspalten, so daß $f(x)$ in jedem einzelnen Intervall monoton ist. Von einer solchen Funktion sagen wir, daß sie der Dirichletschen Bedingung genügt. Es gelten für eine derartige Funktion $f(x)$ die Abschätzungen

$$(4)\qquad \left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| < \frac{A}{n} \quad\text{und}\quad \left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| < \frac{B}{n},$$

wo A und B von n unabhängig sind.

Wir brauchen diese Ungleichungen nur für die einzelnen Teilintervalle zu beweisen. Mit anderen Worten, wir können voraussetzen, daß $f(x)$ in a, b monoton ist. Dann folgt aber nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = f(a)\int_a^\xi \cos nx\,dx + f(b)\int_\xi^b \cos nx\,dx$$

$$= f(a)\frac{\sin n\xi - \sin na}{n} + f(b)\frac{\sin nb - \sin n\xi}{n}$$

und eine analoge Gleichung für $\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$, woraus die Behauptung hervorgeht.

2. Das Dirichletsche Integral. Für das Nachfolgende ist die in I, § 4, (17) hergeleitete Integralformel

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

von Bedeutung. Genügt die Funktion $f(x)$ im endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$ der Dirichletschen Bedingung, so gilt

$$\lim_{\mu \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\frac{\sin \mu x}{x}\,dx = \frac{f(+0) + f(-0)}{2}, \tag{6}$$

wenn man die Funktion $f(x)$ außerhalb des Intervalls a, b gleich Null setzt:

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < a \quad \text{und} \quad x > b.$$

Es steht dann in (6) auf der rechten Seite:

0,	wenn a und b gleiches Vorzeichen haben;
$\frac{f(+0) + f(-0)}{2}$,	„ a „ b ungleiches „ „ ;
$\frac{f(+0)}{2}$,	für $a = 0$, $b > 0$;
$\frac{f(-0)}{2}$,	für $a < 0$, $b = 0$.

Wir können zum Beweise dieses Dirichletschen Satzes annehmen, daß $f(x)$ in $a < x < b$ monoton ist. Es genügt ferner, die Behauptung für $a = 0$, $b > 0$ nachzuweisen; daraus folgt sie für $a < 0$, $b = 0$ durch Vertauschung von x mit $-x$. Jedes Integral

von der Form (6) läßt sich ferner aus solchen Integralen zusammensetzen, deren eine Grenze Null ist. Man hat zunächst

$$\frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\sin \mu x}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu b} \frac{\sin y}{y}\,dy, \quad \text{also} \quad \lim_{\mu \to +\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\sin \mu x}{x}\,dx = 1.$$

Die zu beweisende Gleichung lautet somit

$$(6') \qquad \lim_{\mu \to +\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^b (f(x) - f(+0))\frac{\sin \mu x}{x}\,dx = 0.$$

Die Funktion $f(x) - f(+0)$ hat für $x = 0$ den Grenzwert 0. Ist also ε eine beliebig kleine positive Zahl, so läßt sich eine positive Zahl δ so angeben, daß $|f(x) - f(+0)| < \varepsilon$ ausfällt, wenn $0 < x \leqq \delta$ ist. Nun hat man nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$(7) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^b (f(x) - f(+0))\frac{\sin \mu x}{x}\,dx = \int_0^\delta (f(x) - f(+0))\frac{\sin \mu x}{x}\,dx \\ \displaystyle + \int_\delta^b (f(x) - f(+0))\frac{\sin \mu x}{x}\,dx = (f(\delta) - f(+0))\int_{\xi'}^\delta \frac{\sin \mu x}{x}\,dx \\ \displaystyle + (f(\delta) - f(+0))\int_\delta^{\xi''} \frac{\sin \mu x}{x}\,dx + (f(b) - f(+0))\int_{\xi''}^b \frac{\sin \mu x}{x}\,dx. \end{cases}$$

Hierbei ist $0 \leqq \xi' \leqq \delta$, $\delta \leqq \xi'' \leqq b$. Das vorletzte Integral läßt sich in der Form $\displaystyle\int_{\mu\delta}^{\mu\xi''} \frac{\sin y}{y}\,dy$ schreiben, wird also bei festem δ nach I, § 2, 2 beliebig klein, wenn μ genügend groß ist. Dasselbe gilt für das letzte Integral. Die beiden letzten Glieder konvergieren somit für $\lim \mu = \infty$ gegen 0.

Das Integral $\displaystyle\int_{\xi'}^{\delta} \frac{\sin \mu x}{x}\,dx = \int_{\mu\xi'}^{\mu\delta} \frac{\sin x}{x}\,dx$ bleibt aber wegen der Konvergenz von (5) dem Betrage nach kleiner als eine von μ unabhängige Konstante A. Das erste Glied nach dem zweiten Gleichheitszeichen ist also dem Betrage nach kleiner als $A\varepsilon$, womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Das Fouriersche Integraltheorem. Den eben bewiesenen Satz können wir auch etwas anders aussprechen. Ist $f(x)$ die in 2 betrachtete Funktion, so hat man

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin \mu x}{x}dx = \int_a^b f(x)\,dx\int_0^\mu \cos ux\,du = \int_0^\mu du\int_a^b f(x)\cos ux\,dx. \tag{8}$$

Es gilt also mit den früheren Bezeichnungen und Voraussetzungen

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\mu du\int_a^b f(x)\cos ux\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_a^b f(x)\cos ux\,dx = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}. \tag{9}$$

Da die Funktion $f(x)$ außerhalb des Intervalls a, b gleich Null ist, so gilt jedenfalls

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos ux\,dx = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}. \tag{10}$$

Wir wenden diese Gleichung auf die Funktion $f(x+\xi)$ an, wobei ξ ein Parameter ist, und erhalten die sogenannte Fouriersche Integralformel

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos u(x-\xi)\,dx = \frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}. \tag{11}$$

Diese Formel gilt also für eine Funktion $f(x)$, die in einem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung genügt und außerhalb dessen gleich Null ist.

Darüber hinaus beweisen wir noch (11) unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ in jedem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung genügt, daß ferner das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx \tag{12}$$

konvergiert.

Nach dem Vorhergehenden genügt es zu zeigen, daß

$$\int_0^\mu du\int_\omega^\infty f(x)\cos ux\,dx \tag{13}$$

mit wachsendem ω beliebig klein wird, und zwar gleichmäßig in μ. (Analog läßt sich das über $-\infty < x < -\omega$ erstreckte Integral erledigen.) Nun ist für jedes μ, da $|f(x)\cos ux| \leqq |f(x)|$ gleichmäßig integrabel ist (vgl. I, § 4, **1**),

$$\int_0^\mu du \int_\omega^\infty f(x)\cos ux\,dx = \int_\omega^\infty f(x)\,dx \int_0^\mu \cos ux\,du = \int_\omega^\infty f(x)\frac{\sin \mu x}{x}\,dx.$$

Also bleibt (13) absolut kleiner als

$$\int_\omega^\infty \frac{|f(x)|}{x}\,dx \leqq \frac{1}{\omega}\int_\omega^\infty |f(x)|\,dx,$$

und zwar für jedes μ, woraus (11) folgt [1]).

Man kann (11) offenbar auch in der folgenden Form schreiben:

$$(11') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-iu\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iux}\,dx = \frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}.$$

Wenn man also außer den obigen Voraussetzungen noch die Stetigkeit von $f(x)$ annimmt, so gilt die Umkehrungsformel

$$(11'') \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iux}\,dx = g(u), \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{-iux}\,du = f(x).$$

4. Beispiele. Wir setzen in (11)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ e^{-\beta x} & \text{für } x \geqq 0, \end{cases}$$

wobei β einen positiven Parameter bezeichnet.

Durch Berücksichtigung der Formeln I, § 2, (19) ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos u(x-\xi)\,dx = \frac{\beta\cos u\xi + u\sin u\xi}{u^2+\beta^2}.$$

Wir erhalten somit

$$(14) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta\cos u\xi + u\sin u\xi}{u^2+\beta^2}\,du = \begin{cases} e^{-\beta\xi} & \text{für } \xi > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \xi = 0, \\ 0 & \text{für } \xi < 0. \end{cases}$$

---

[1]) Bezüglich allgemeinerer Bedingungen sei auf die Arbeiten von A. Pringsheim, Math. Ann. **68** (1910), S. 367; **71** (1911), S. 289, ferner H. Weyl, Jahresber. d. d. Math.-Ver. **20** (1911), S. 339 hingewiesen.

Es sei z. B. $\xi > 0$. Wenden wir die letzte Formel nacheinander auf ξ und $-\xi$ an, so ergibt sich:

$$(15) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos u\xi}{u^2+\beta^2}\,du = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta\xi}, \quad \int_0^\infty \frac{u\sin u\xi}{u^2+\beta^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-\beta\xi}.$$

Bezüglich weiterer Anwendungen vgl. VIII, § 3, **9**, wo auch eine von Hankel herrührende Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems formuliert wird.

§ 4. Fouriersche Reihen

1. Definition. Wir betrachten eine „trigonometrische Reihe"

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \cdots$$

mit gegebenen Koeffizienten a_n und b_n. Konvergiert diese Reihe gleichmäßig für $0 \leqq x \leqq 2\pi$, dann konvergiert sie gleichmäßig für jedes x und stellt eine stetige und periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π dar; d. h. $f(x+2\pi) = f(x)$. Mit Rücksicht auf die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen (VIII, § 1, **1** und **4**), d. h. auf die Formeln

$$(2) \qquad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx = 0 \quad (m \neq n), \\ \int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx = 0, \end{cases}$$

können die Koeffizienten von (1) durch $f(x)$ ausgedrückt werden. Wenn wir nämlich (1) mit $\cos nx$ multiplizieren ($n > 0$) und dann gliedweise von 0 bis 2π integrieren, was nach § 1, **2** erlaubt ist, so erhalten wir $\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n$, also

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \text{und ähnlich} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Diese Formeln gelten auch für $n = 0$, $b_0 = 0$.

Umgekehrt können wir mit Hilfe der Formeln (3) jeder beschränkten und integrablen Funktion $f(x)$ eine Reihe (1) wenigstens formal zuordnen. Hierbei können die einzelnen Integrale in (3), wenn $f(x)$ periodisch ist und die Periode 2π hat, von einem beliebigen Wert α

bis $\alpha + 2\pi$ (z. B. von $-\pi$ bis π) erstreckt werden. Die mit den so erhaltenen „Fourierschen Konstanten" gebildete Reihe heißt die zu $f(x)$ gehörige Fouriersche Reihe.

In vielen Fällen erweist sich übrigens die folgende „komplexe Schreibweise" der Fourierschen Reihe zweckmäßiger:

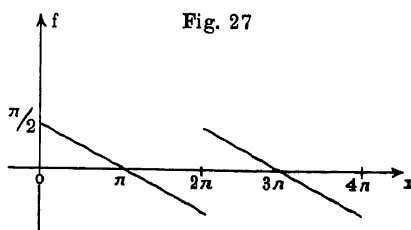
$$(1') \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{wobei} \quad c_n \doteq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

ist.

2. Beispiele. a) Es sei wie in untenstehender Abbildung

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\pi, \quad f(0) = 0.$$

Erweitert man die Definition dieser Funktion für jedes x, indem man die Periodizität $f(x + 2\pi) = f(x)$ fordert, so entsteht eine Funktion,

Fig. 27

die überall stetig ist, bis auf die Punkte $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$; außerdem ist sie eine ungerade Funktion, d. h. es gilt $f(-x) = -f(x)$. Für eine solche ungerade Funktion ist aber ganz allgemein

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, d x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x\, d x = 0,$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin n x\, d x = 2\int_0^{\pi} f(x) \sin n x\, d x.$$

[Ähnlich zeigt man, daß für eine gerade Funktion $f(x)$, d. h. für eine Funktion mit $f(-x) = f(x)$, die Koeffizienten b_n verschwinden.]

In unserem Beispiel ist somit $a_n = 0$ und $\pi b_n = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin n x\, d x$ $= \pi/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Die Fouriersche Reihe lautet also

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin n x}{n} + \cdots.$$

Sie konvergiert offensichtlich für $x = 0, \pm k\pi$. Um die Konvergenz auch für die übrigen x zu erkennen, genügt es nach dem in § 1, 3, b) bewiesenen Kriterium zu zeigen, daß die Summen $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ absolut genommen unterhalb einer von n unabhängigen Schranke liegen. Nun ist diese Summe der imaginäre Teil von

$$e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix} = e^{ix}\frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1}$$

und bleibt somit absolut genommen kleiner als $2 : |e^{ix} - 1| = 1 : \left|\sin\frac{x}{2}\right|$, woraus die Behauptung folgt. Wir werden übrigens weiter unten einen allgemeinen Satz beweisen, aus dem die Konvergenz dieser und der nachfolgenden Reihen ohne weiteres ersichtlich wird.

b) $f(x) = |\sin x|$ ist eine gerade Funktion, also $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für ungerade } n, \\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{1-n^2} \text{ für gerade } n. \end{cases}$$

Die Fouriersche Reihe lautet also

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 4x}{4^2 - 1} - \cdots - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 2\nu x}{(2\nu)^2 - 1} - \cdots.$$

Sie konvergiert absolut und gleichmäßig für jedes x.

c) $f(x) = \left(\dfrac{\pi - x}{2}\right)^2$. Hier ist $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\pi - x)^2 \cos nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{6} \text{ für } n = 0, \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ für } n > 0. \end{cases}$$

Die Fouriersche Reihe von $f(x)$ lautet somit

$$\frac{\pi^2}{12} + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots.$$

3. Konvergenz im Mittel. Wir wollen zunächst in einigen Worten sagen, wie man ganz naturgemäß auf die Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe geführt wird[1]. Man kann nach dem trigonometrischen Polynom n-ter Ordnung

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x) + \cdots + (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

---

[1]) Eine andere natürliche Einführungsart Fourierscher Reihen werden wir in IX, § 1 kennenlernen.

fragen, das von der Funktion $f(x)$ möglichst wenig „abweicht“. Hierbei empfiehlt es sich, als Maß für die Abweichung das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx \tag{4}$$

zu betrachten. Man sucht also dasjenige trigonometrische Polynom n-ter Ordnung, für welches das Integral (4) möglichst klein ist.

Man kann nun dieses Integral mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (2) und der Gleichungen (3) in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx-\alpha_0 a_0-2(\alpha_1 a_1+\beta_1 b_1)-\cdots-2(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)\\&+\frac{\alpha_0^2}{2}+(\alpha_1^2+\beta_1^2)+\cdots+(\alpha_n^2+\beta_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx+\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}\\&+(\alpha_1-a_1)^2+(\beta_1-b_1)^2+\cdots+(\alpha_n-a_n)^2+(\beta_n-b_n)^2-\frac{a_0^2}{2}\\&-(a_1^2+b_1^2)-\cdots-(a_n^2+b_n^2).\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Aus dieser Darstellung folgt, daß das gesuchte Minimum dann und nur dann eintritt, wenn $\alpha_0=a_0$, $\alpha_1=a_1$, $\beta_1=b_1, \cdots, \alpha_n=a_n$, $\beta_n=b_n$ ist, d. h. wenn $T_n(x)$ mit der n-ten Partialsumme $s_n(x)$ der zu $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe übereinstimmt. Man hat nach (5)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{2}\\&\quad-(a_1^2+b_1^2)-\cdots-(a_n^2+b_n^2).\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Daraus folgt u. a. die sogenannte Besselsche Ungleichheit

$$\frac{a_0^2}{2}+(a_1^2+b_1^2)+\cdots+(a_n^2+b_n^2)\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx\quad(n=1,2,3,\ldots). \tag{7}$$

Eine wichtige Folgerung derselben ist, daß die Reihe

$$\frac{a_0^2}{2}+(a_1^2+b_1^2)+\cdots+(a_n^2+b_n^2)+\cdots$$

konvergiert, insbesondere daß für die Fourierschen Koeffizienten a_n, b_n stets

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0 \tag{8}$$

gilt. Wie man übrigens für stetige Funktionen leicht zeigt (vgl. § 6, 2) ist die Summe der letzten Reihe gleich $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx$. Also hat man

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx=0. \tag{9}$$

Dieser Grenzwertsatz gilt aber nicht nur für stetige $f(x)$, sondern, viel allgemeiner, für jede samt ihrem Quadrat in Lebesgueschem Sinne integrable Funktion. Er besagt, daß die Partialsummen der Fourierschen Reihe von $f(x)$ „im Mittel" gegen $f(x)$ konvergieren (vgl. VIII, § 1, 2).

4. Dirichletsche Bedingung. Darstellung willkürlicher Funktionen. Es sei $f(x)$ eine in $0\leqq x\leqq 2\pi$ beschränkte und integrable Funktion, (1) ihre durch die Formeln (3) definierte Fouriersche Reihe. Man kann die n-te Partialsumme von (1) folgendermaßen schreiben:

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\cos(u-x)+\cos 2(u-x)+\cdots+\cos n(u-x)\right]du.$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck läßt sich nach III, § 1, 2 in geschlossener Form darstellen. Es ist

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}\,du. \tag{10}$$

Diese Darstellung der Partialsummen der Fourierschen Reihe rührt von Dirichlet her. Es ist bemerkenswert, daß die Fouriersche Reihe einer stetigen Funktion nicht zu konvergieren braucht[1]). Dagegen konvergiert die Reihe, d. h. die Folge der Integrale (10), wie wir jetzt zeigen wollen, stets, wenn $f(x)$ der in § 3, 1 formulierten Dirichletschen Bedingung genügt; und zwar gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{11}$$

---

[1]) P. du Bois Reymond, Abhandlungen der Bayrischen Akademie der Wissenschaften 12 (1876). Besonders einfache Beispiele findet der Leser bei L. Fejér, Journ. f. Math. 137 (1910), S. 1—5.

Das Integral (10) kann nämlich, indem man die Integration von $x-\pi$ bis $x+\pi$ erstreckt (dies ist wegen der Periodizität des Integranden erlaubt) und nachher $(u-x)/2=t$ als neue Integrationsveränderliche einführt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$(10')\quad \begin{cases} s_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t) \\ \left(\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}\right)\sin(2n+1)t\,dt+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt. \end{cases}$$

Die Funktion $\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ ist integrabel. Folglich konvergiert das erste Integral wegen (8) gegen 0. Das zweite Integral konvergiert mit Rücksicht auf § 3, (6) gegen den Grenzwert (11), woraus die Behauptung folgt.

An jeder Stetigkeitsstelle erhalten wir somit $f(x)$ als Summe, an jeder Unstetigkeitsstelle das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte. Es läßt sich zeigen, daß in jedem Intervall, in welchem $f(x)$ mit Einschluß der Endpunkte stetig ist, die Konvergenz gleichmäßig stattfindet.

Daraus folgen, mit Hinsicht auf die obigen Beispiele, die Formeln

$$(12')\qquad \frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots\qquad (0<x<2\pi),$$

$$(12'')\qquad |\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\frac{\cos 2x}{2^2-1}-\cdots-\frac{4}{\pi}\frac{\cos 2\nu x}{(2\nu)^2-1}-\cdots(0\leqq x\leqq 2\pi),$$

$$(12''')\qquad \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{12}+\frac{\cos x}{1^2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n^2}+\cdots\qquad (0\leqq x\leqq 2\pi).$$

Aus (12') ergibt sich z. B. für $x=\pi/2$ die bekannte Formel

$$(13)\qquad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

und für $x=\pi/4$ mit Berücksichtigung von (13)

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots;$$

(12''') liefert für $x=0$

$$(14)\qquad \frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

Die Fouriersche Reihe eignet sich zur Darstellung von Funktionen, welche nicht durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck, sondern

sozusagen durch „willkürliche“ Festsetzungen definiert sind. Solche Funktionen können in einem Teilintervall miteinander übereinstimmen, ohne außerhalb desselben in irgendeiner Beziehung zueinander zu stehen. Aus der Tatsache, daß zwei Fouriersche Reihen in einem Teilintervall übereinstimmen, folgt also nicht, daß sie außerhalb dieses Intervalls übereinstimmen. Dies ist ein prinzipieller Unterschied gegenüber den Potenzreihen. (Vgl. § 2, 1.)

Während die Fouriersche Reihe einer stetigen Funktion, wie wir oben erwähnt haben, nicht notwendig konvergiert, kann sie mit Hilfe der beiden in § 1, 5 geschilderten Verfahren „summiert“ werden.

Die arithmetischen Mittel lassen sich in Form des Fejérschen Integrals

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} f(u)\left(\frac{\sin(n+1)\frac{u-x}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}\right)^2 du \tag{15}$$

darstellen. Sie konvergieren für $n\to\infty$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $f(x)$ [1].

Die Abelsche Summation der Fourierschen Reihe führt auf das Poissonsche Integral

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

dessen Konvergenz in XVI, § 1, 2 untersucht wird.

5. Mehrere Veränderliche. Analoge Betrachtungen gelten für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Eine Funktion $f(x, y)$ z. B., die im Quadrat $0\leqq x<2\pi$, $0\leqq y<2\pi$ definiert ist, läßt sich in eine Fouriersche Doppelreihe von folgender Form entwickeln:

$$\left\{\begin{aligned}f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}&(a_{mn}^{(1)}\cos mx\cos ny+a_{mn}^{(2)}\cos mx\sin ny\\&+a_{mn}^{(3)}\sin mx\cos ny+a_{mn}^{(4)}\sin mx\sin ny),\end{aligned}\right. \tag{17}$$

wobei für die Koeffizienten $a_{mn}^{(\nu)}$ ähnliche Integralformeln wie (3) und für die Konvergenz ähnliche Bedingungen wie die oben dargelegten gelten. In diesem Falle bietet die „komplexe Schreibweise“ [vgl. (1')]

[1] L. Fejér, Math. Ann. 58 (1904), S. 51—69.

entschiedene Vorteile. Die Fouriersche Doppelreihe sieht z. B. in dieser Schreibweise folgendermaßen aus:

$$(17') \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

wobei

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy$$

ist.

§ 5. Singuläre Integrale. Fastperiodische Funktionen

1. Singuläre Integrale. Die Integrale (10), (15) und (16) von § 4 sind von der Form

$$(1) \qquad \int_a^b f(u)\, K_n(u, x)\, du \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

wo der „Kern" $K_n(u, x)$ eine von $f(u)$ unabhängige stetige Funktion von u und x ist. (In diesen Beispielen hängt K_n nur von $u-x$ ab.) Auf derartige Integrale — sie werden häufig singuläre Integrale genannt — wird man u. a. bei der Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(x)$ nach gegebenen Orthogonalfunktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... (VIII, § 1, 1) geführt. In der Tat kann die n-te Partialsumme einer solchen Entwicklung in der Form

$$(2) \qquad \int_a^b f(u)\, (\varphi_0(u)\, \varphi_0(x) + \varphi_1(u)\, \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(u)\, \varphi_n(x))\, du$$

geschrieben werden. Hierher gehört auch die Fouriersche Reihe, sowie mehrere weiter unten (IX, §§ 1, 2) zu untersuchende Reihenentwicklungen.

Nehmen wir nun an, daß der Kern K_n den folgenden Bedingungen genügt:

1. $K_n(u, x)$ ist für alle u und für alle x nichtnegativ.
2. Es gilt für alle x

$$(3) \qquad \int_a^b K_n(u, x)\, du = 1.$$

3. Wenn $a < x_0 < b$ ist, so hat man

$$(4) \qquad \lim_{n \to \infty} K_n(u, x_0) = 0,$$

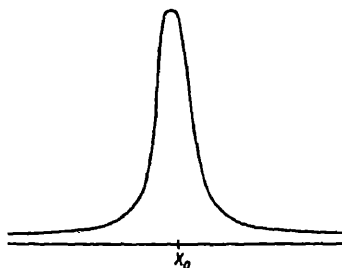
und zwar gleichmäßig in den Intervallen $a \leqq u \leqq x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta \leqq u \leqq b$ für alle genügend kleinen positiven Werte von δ.

[Ein derartiger Kern $y = K_n(u, x_0)$ hat die Form einer „Zacken funktion", vgl. Fig. 28.]

Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn $f(x)$ eine in a, b be schränkte und integrable, für $x = x_0$ stetige Funktion bezeichnet

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(u) K_n(u, x_0)\, du = f(x_0).$$

Gilt die Bedingung (4) gleichmäßig für $\alpha \leqq x_0 \leqq \beta$, wobei das Intervall α, β ganz im Innern von a, b liegt, so besteht die Grenzwertgleichung (5) gleichmäßig für $\alpha \leqq x_0 \leqq \beta$, vorausgesetzt, daß $f(x)$ in α, β stetig ist.

Fig. 28

Das Dirichletsche Integral (10) von § 4 erfüllt nicht die obigen Bedingungen, wohl aber die Integrale (15) und (16) von § 4, wobei in dem Poissonschen Integral $r = 1 - \varepsilon_n$ (ε_n eine positive Nullfolge) zu setzen ist. Der in XVI, § 1, 2 gegebene Beweis für die Konvergenz dieses Integrals kann ohne Schwierigkeit auf den Beweis der allgemeinen Gl. (5) übertragen werden.

2. Fastperiodische Funktionen. Anschließend an die Arbeiten von P. Bohl und E. Esclangon hat H. Bohr in einer Reihe von Abhandlungen die Theorie der periodischen Funktionen bzw. der Fourierschen Reihen auf eine tiefsinnige Weise verallgemeinert [1]). Die von ihm eingeführten „fastperiodischen Funktionen" $f(x)$ sind für alle reellen x definiert und stetig; sie besitzen ferner die folgende Eigenschaft: Wenn ε eine beliebige positive Zahl ist, so gibt es eine positive Zahl $l(\varepsilon)$ derart, daß jedes Intervall von der Länge $l(\varepsilon)$ mindestens eine zu ε gehörige „Verschiebungszahl" $\tau(\varepsilon) = \tau$ enthält; wir sagen dabei, daß τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl ist, wenn für alle x

$$(6) \qquad |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt.

Die periodischen Funktionen bilden offenbar einen Spezialfall.

---

[1]) Acta Mathematica 45 bis 47 (1924/25). Eine besonders einfache Begründung der Theorie stammt von H. Weyl, Math. Ann. 97 (1926), S. 338—356.

Zu jeder solchen fastperiodischen Funktion gehört eine wohlbestimmte Folge von „Fourierschen Exponenten“:

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots; \tag{7}$$

das sind diejenigen Werte von λ, für welche die stets existierenden Mittelwerte

$$c(\lambda) = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \tag{8}$$

von 0 verschieden ausfallen. Unter der „Fourierschen Reihe“ von $f(x)$ versteht man die formale Bildung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(\lambda_n)\, e^{i\lambda_n x} \tag{9}$$

Für den Fall einer periodischen Funktion ist (9) die gewöhnliche Fouriersche Reihe in der komplexen Schreibweise (1′) von § 4.

Es ist in Analogie zu § 4, **3**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c(\lambda_n)|^2 = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(x)|^2\, dx. \tag{10}$$

Eine beliebige fastperiodische Funktion $f(x)$ kann durch endliche Exponentialausdrücke

$$\gamma_0^{(n)} e^{i\lambda_0^{(n)} x} + \gamma_1^{(n)} e^{i\lambda_1^{(n)} x} + \gamma_2^{(n)} e^{i\lambda_2^{(n)} x} + \cdots + \gamma_n^{(n)} e^{i\lambda_n^{(n)} x}$$

gleichmäßig für alle x und mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden. (Umgekehrt ist eine derartige Funktion stets fastperiodisch.) Man kann sogar die Exponenten $\lambda_\nu^{(n)}$ stets der zu $f(x)$ gehörigen Exponentenfolge (7) entnehmen.

Für den Fall einer periodischen Funktion reduziert sich der letzte Satz auf einen klassischen Satz von Weierstrass, den wir in § 6, **2** beweisen wollen.

§ 6. Approximation stetiger Funktionen

1. Weierstrassscher Satz. Weierstrass hat im Jahre 1885 [1]) den folgenden wichtigen Satz bewiesen:

I. Ist $f(x)$ eine im endlichen Intervall a, b stetige Funktion, dann läßt sich zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε ein Polynom $P(x)$ finden, derart, daß in a, b gleichmäßig

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

ist.

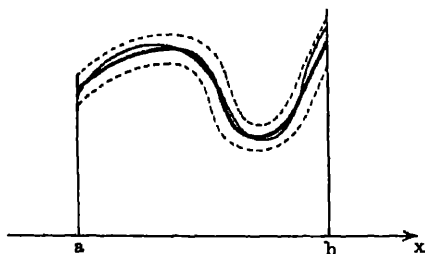
[1]) Werke 3 (1903), S. 1—37

Die geometrische Bedeutung dieses Satzes liegt auf der Hand. Wenn $y = f(x)$ eine stetige Kurve ist, so liegt in einem beliebig schmalen, diese Kurve enthaltenden Streifen (vgl. Fig. 29) eine Kurve mit der Gleichung $y = P(x)$, wobei $P(x)$ eine ganze rationale Funktion bezeichnet, d. h. eine sogenannte Parabel höherer Ordnung.

Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ eine gegen 0 konvergierende Folge von positiven Zahlen und $P_n(x)$ ein Polynom, für welches in a, b die Ungleichung $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$ gilt, dann ist offenbar gleichmäßig $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$. Mit anderen Worten, die unendliche Reihe

$$(2) \quad P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \cdots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \cdots$$

konvergiert gleichmäßig in a, b und stellt dort $f(x)$ dar. Somit ist I gleichbedeutend mit: I'. Jede stetige Funktion läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickeln.

Fig. 29

Um I zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß man jede stetige Kurve gleichmäßig durch Polygone approximieren kann. Es genügt daher, den Satz für solche Funktionen $f(x)$ zu beweisen, deren geometrisches Bild ein Polygon ist, die also stückweise linear sind. Ist $y = f(x)$ eine solche Funktion und sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Stellen, an denen $f'(x)$ einen Sprung erleidet, so ist $f(x)$ linear an jeder Stelle x, die nicht mit einer Stelle x_ν zusammenfällt. Wir betrachten nun die Funktion $f_1(x) = c_1 |x - x_1|$. Es ist klar, daß bis auf den Punkt x_1 auch diese überall linear ist. Es ist ferner $f_1'(x_1 - 0) = -c_1$, $f_1'(x_1 + 0) = c_1$. Wir können daher c_1 derart wählen, daß die Funktion $f(x) - f_1(x)$ im Punkte $x = x_1$ eine stetige Ableitung besitzt. Dazu genügt es, $f'(x_1 - 0) + c_1 = f'(x_1 + 0) - c_1$, d. h. $c_1 = {}^1/_2 [f'(x_1 + 0) - f'(x_1 - 0)]$ zu nehmen. Die so gebildete Funktion ist, abgesehen eventuell von den Stellen $x_2, x_3, \ldots, x_n$, überall linear, so daß auf diese Weise eine Unstetigkeitsstelle der Ableitung aufgehoben wird. Dieses Verfahren führt auf die Darstellung des Polygonzuges in der Form

$$(3) \quad f(x) = c_1 |x - x_1| + c_2 |x - x_2| + \cdots + c_n |x - x_n| + \text{lineare Funktion},$$

und daraus folgt, daß es genügt, sich mit der Approximation der Funktion $|x - x_0|$ selbst, oder mit der von $|x|$ zu befassen. Wir dürfen ferner voraussetzen, daß $-1 \leqq x \leqq 1$ ist. (Sonst wende

man die Substitution $y = x/c$ an.) Um die Funktion $|x|$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ anzunähern, schreiben wir $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$. Nach der Binomialformel ist

$$(4) \quad |x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2.4}(1-x^2)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}(1-x^2)^3 - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert für $x = 0$ (§ 2, 3), sie konvergiert also gleichmäßig für $-1 \leqq x \leqq 1$, und ein genügend hoher Abschnitt von ihr liefert die gewünschte Approximation für $|x|$ [1]).

2. Zusammenhang mit den trigonometrischen Reihen. Ein Gegenstück zum obigen Satze bildet der folgende, welcher ebenfalls von Weierstrass stammt:

II. Ist $g(\theta)$ eine für jedes θ definierte stetige und periodische Funktion mit der Periode 2π, so gibt es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε ein trigonometrisches Polynom $T(\theta)$, derart, daß für jedes θ

$$(5) \qquad |g(\theta) - T(\theta)| < \varepsilon$$

ist.

Dieser Satz läßt sich leicht aus I folgern. Es ist zunächst $g(\theta)$ immer die Summe einer geraden und ungeraden Funktion:

$$g(\theta) = \frac{g(\theta)+g(-\theta)}{2} + \frac{g(\theta)-g(-\theta)}{2} = g_1(\theta) + g_2(\theta).$$

Die Funktion $g_1(\theta)$ kann offensichtlich in der Form $g_1(\theta) = f(\cos\theta)$ geschrieben werden, wo $f(x)$ in $(-1, 1)$ stetig ist. Nach I gibt es also zu jedem ε ein Polynom $P(x)$, so daß $|f(\cos\theta) - P(\cos\theta)| < \varepsilon$ ist. Hier ist $P(\cos\theta)$ ein trigonometrisches Polynom (Kosinuspolynom), welches $g_1(\theta)$ mit der Genauigkeit ε approximiert.

Um auch $g_2(\theta)$ zu approximieren, berücksichtigen wir zunächst, daß $g_2(0) = g_2(\pi) = 0$ ist. Es sei $\delta > 0$ derart gewählt, daß für $0 \leqq \theta \leqq \delta$ und $\pi - \delta \leqq \theta \leqq \pi$: $|g_2(\theta)| < \varepsilon$ ist. Wir betrachten dann die stetige Funktion $\gamma(\theta)$, welche im Intervall $\delta \leqq \theta \leqq \pi - \delta$ durch die Festsetzung $\gamma(\theta) = \dfrac{g_2(\theta)}{\sin\theta}$ bestimmt ist, für welche ferner $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$ ist, die sich endlich in den Intervallen $(0, \delta)$ und $(\pi - \delta, \pi)$ linear ändert. Es sei außerdem $\gamma(-\theta) = \gamma(\theta)$. Nun existiert nach dem eben Bewiesenen ein Polynom $Q(\cos\theta)$ von $\cos\theta$, so daß $|\gamma(\theta) - Q(\cos\theta)| < \varepsilon$ gilt für jedes θ.

[1]) Der hier gegebene Beweis des Weierstrassschen Satzes rührt von H. Lebesgue her, Bulletin des sciences math. **22** (1898), S. 278.

Hieraus folgt im Intervall $(0, \delta)$ bzw. $(\pi - \delta, \pi)$

$$|Q(\cos\theta)| < \varepsilon + |\gamma(\theta)| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sin\delta}.$$

Ich behaupte nun, daß das trigonometrische Polynom $\sin\theta\, Q(\cos\theta)$ eine Approximation von $g_2(\theta)$ liefert, deren Fehler höchstens 3ε beträgt. Es ist nämlich für $0 \leqq \theta \leqq \delta$ oder $\pi - \delta \leqq \theta \leqq \pi$

$$|g_2(\theta) - \sin\theta\, Q(\cos\theta)| \leqq |g_2(\theta)| + \sin\theta\,|Q(\cos\theta)| < \varepsilon + \varepsilon\sin\theta + \varepsilon\frac{\sin\theta}{\sin\delta} \leqq 3\varepsilon.$$

Man hat ferner für $\delta \leqq \theta \leqq \pi - \delta$

$$|g_2(\theta) - \sin\theta\, Q(\cos\theta)| = \sin\theta\,|\gamma(\theta) - Q(\cos\theta)| < \varepsilon < 3\varepsilon.$$

Aus Satz II folgt: Es sei $f(x)$ eine stetige und periodische Funktion mit der Periode 2π; man kann das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x) - T_n(x)]^2\,dx \tag{6}$$

durch passende Wahl des trigonometrischen Polynoms $T_n(x)$ kleiner machen als eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl ε. Es ist daher nach § 4, **3** erst recht

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x) - s_n(x)]^2\,dx \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x) - T_n(x)]^2\,dx < \varepsilon, \tag{7}$$

wobei $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Fourierschen Reihe von $f(x)$ ist. Daraus folgt — für stetige Funktionen — die in § 4 ausgesprochene Limesgleichung (9).

Die beiden Weierstrassschen Sätze gelten übrigens auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 7. Unendliche Produkte

1. Konvergenz. Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen. Um die Konvergenz des unendlichen Produktes

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)\ldots \tag{1}$$

zu definieren, betrachten wir die Folge der „Partialprodukte":

$$\begin{cases} p_1 = 1 + a_1, \quad p_2 = (1 + a_1)(1 + a_2), \ldots, \\ p_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n), \cdots \end{cases} \tag{2}$$

Konvergiert diese Folge gegen einen von 0 verschiedenen endlichen Grenzwert p, so sagen wir, daß (1) konvergiert und gleich p ist. Es muß natürlich jedes a_n von -1 verschieden sein.

Die so definierte Konvergenz von (1) ist mit der Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\log(1+a_1)+\log(1+a_2)+\cdots+\log(1+a_n)+\cdots \tag{3}$$

gleichbedeutend. Eine notwendige Bedingung der Konvergenz von (1) ist somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Um praktisch brauchbare hinreichende Bedingungen zu gewinnen, machen wir die Voraussetzung, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. (Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.) Mit Hilfe des Taylorschen Satzes erhalten wir

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2}\,\frac{1}{(1+\vartheta_n a_n)^2} \qquad (0<\vartheta_n<1). \tag{4}$$

Nun konvergiert gemäß der Voraussetzung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2}\,\frac{1}{(1+\vartheta_n a_n)^2}$, so daß (3) dann und nur dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Es gilt somit der Satz: *Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent, so ist das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ gleichzeitig mit der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und divergent.* Das Produkt (1) ist z. B. konvergent, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. (Dann ist nämlich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ erst recht konvergent.)

2. Beispiele. Das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n x)$ ist konvergent oder divergent, je nachdem $|q|<1$ bzw. $|q|\geqq 1$ ist, vorausgesetzt, daß $x \neq 0$ ist. Ebenso ist $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ für jedes x konvergent[1]) und stellt bekanntlich $\frac{\sin x}{x}$ dar. Das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)$ ist für jedes

[1]) Eine Ausnahme bilden die Werte $x = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann sind alle Partialprodukte von genügend hohem Index, also auch ihr Grenzwert gleich 0.

$x \neq 0$ divergent; es wird konvergent, wenn man zu $1 + \frac{x}{n}$ den Faktor $e^{-\frac{x}{n}}$ hinzufügt. Es gilt, wie aus der nachstehend bewiesenen Gl. (7) mit Benutzung von (11) hervorgeht:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx}\, x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \tag{5}$$

3. Über die Gammafunktion. In I, § 2, 3 haben wir mit Hilfe des für $x > 0$ konvergenten Integrals

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \tag{6}$$

die Gammafunktion eingeführt. Wir wollen jetzt die Gleichung

$$\Gamma(1 + x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x\, n!}{(1 + x)(2 + x) \ldots (n + x)} \tag{7}$$

beweisen. Diese Form der Gammafunktion ist von Gauß als Ausgangspunkt ihrer Theorie gewählt worden.

Betrachten wir das Integral

$$J_s = \int_0^1 y^{x+s}(1 - y)^{n-s}\, dy,$$

wobei s ein Parameter ist. Durch partielle Integration folgt $J_s : J_{s+1} = (n - s) : (s + 1 + x)$, ferner $J_n = (n + 1 + x)^{-1}$, also

$$J_0 = \frac{J_0}{J_1}\, \frac{J_1}{J_2} \cdots \frac{J_{n-1}}{J_n}\, J_n = \frac{n!}{(1 + x)(2 + x) \ldots (n + 1 + x)}.$$

Es ist somit

$$\frac{n^x\, n!}{(1 + x)(2 + x) \ldots (n + x)} = n^x (n + 1 + x) \int_0^1 y^x (1 - y)^n\, dy$$

$$= \frac{n + 1 + x}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\, dt.$$

Es handelt sich also nur um den Beweis der Grenzwertgleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\, dt = \Gamma(1 + x).$$

Nun ist einerseits, wenn ω eine feste positive Zahl bezeichnet, für $n > \omega$

$$\int_0^\omega \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\,dt < \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\,dt,$$

also

$$\int_0^\omega e^{-t} t^x\,dt \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\,dt. \tag{8}$$

Diese Ungleichung gilt für jedes ω, also auch für $\lim \omega = \infty$; die linke Seite kann somit durch $\Gamma(1 + x)$ ersetzt werden. Andererseits folgt aus der bekannten Ungleichung $1 + h \leqq e^h$ für $h = -\frac{t}{n}$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqq e^{-t}.$$

Es ist somit

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\,dt \leqq \int_0^n e^{-t} t^x\,dt,$$

woraus

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\,dt \leqq \int_0^\infty e^{-t} t^x\,dt = \Gamma(1 + x) \tag{8'}$$

folgt. Durch Vergleichung der Resultate (8), (8′) folgt die behauptete Gl. (7).

Die Bedeutung von Gl. (7) gegenüber der ursprünglichen Eulerschen Definition (6) der Gammafunktion besteht hauptsächlich darin, daß, wie man leicht zeigt, der Limes (7) für jeden reellen und komplexen Wert von x existiert und eine reguläre analytische Funktion von x (III, § 1, **3**) darstellt, während die Integralformel (6) nur für solche (reelle oder komplexe) x einen Sinn hat, deren reeller Teil positiv ist. Der Ausdruck (7) stellt somit die analytische Fortsetzung (III, § 3, **7**) der Gammafunktion in der ganzen komplexen Ebene dar. Die einzige Ausnahme bilden hierbei die Stellen $x = -1$, -2, $-3, \ldots$, an denen $\Gamma(1 + x)$ unendlich wird.

Auf Grund von (7) läßt sich die in I, § 2, **3** bewiesene Formel

$$\Gamma(1 + x) = x\,\Gamma(x) \tag{9}$$

leicht nachweisen. Sie gilt bei beliebigem x, $x \neq 0, -1, -2, -3, \cdots$.

Für die von Gauß eingeführte Funktion

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}, \tag{10}$$

der in der Theorie der Besselschen Funktionen (vgl. VIII, § 3. 2) eine Rolle zukommt, gilt nach Gl. (7) die Darstellung

$$\Psi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\log\operatorname{nat} n - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \cdots - \frac{1}{n+x}\right). \tag{10'}$$

Mit Rücksicht auf I, § 4, Gl. (38) folgt hieraus

$$\begin{cases} \Psi(0) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\log\operatorname{nat} n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right) \\ = -C = -0{,}577\,215\,66\ldots, \end{cases} \tag{11}$$

das heißt

$$\Psi(n) = -C + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{11'}$$

Schließlich sei noch eine wichtige Beziehung zwischen der Gammafunktion und der trigonometrischen Sinusfunktion erwähnt. Aus (5) folgt, wenn x keine ganze Zahl ist,

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\,\frac{1}{\Gamma(-x)} = -x^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = -x^2\,\frac{\sin\pi x}{\pi x} = -x\,\frac{\sin\pi x}{\pi},$$

also wegen $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{12}$$

Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man hieraus die bereits in I, § 4, 2 bewiesene Formel $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. Wallissche Formel. Als wichtigste Folgerung aus der Gl. (7) heben wir die Wallissche Formel hervor, die eine Darstellung von π in Form eines unendlichen Produkts liefert.

Wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ schließt man aus (7)

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{n!}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2\,.\,4\ldots 2n}{1\,.\,3\ldots(2n-1)}. \tag{13}$$

Hieraus folgt, daß man die Zahl π in der folgenden Form darstellen kann:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \quad \text{(Wallissche Formel)} \tag{14}$$

In der Tat ist hier das n-te Partialprodukt gleich

$$\frac{[2.4.6\ldots n]^2}{[1.3.5\ldots(n-1)]^2(n+1)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{[2.4.6\ldots(n-1)]^2(n+1)}{[1.3.5\ldots n]^2},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Beide Ausdrücke konvergieren für $\lim n = \infty$ wegen Gl. (13) gegen $\pi/2$.

Lehrbücher

Außer den am Schluß von I erwähnten Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, in denen man auch das Notwendigste über unendliche Reihen und Produkte findet, seien noch genannt:

1. K. Knopp, Lehrbuch der unendlichen Reihen. Berlin (Springer). 2. Aufl., 1924.
2. T. J. l'A. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series. London (Macmillan). 2. Aufl., 1926.
3. H. S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat. London (Macmillan). 2. Aufl., 1921.
4. L. Tonelli, Serie trigonometriche. Bologna (Zanichelli), 1928.

Fünftes Kapitel

Variationsrechnung

Die Kenntnis der in diesem Kapitel dargestellten Grundzüge der Variationsrechnung ist für das Verständnis der Hauptabschnitte des Buches nicht unbedingt erforderlich. Andererseits stehen zahlreiche Fragestellungen der Mechanik und Physik in unmittelbarem Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Variationsrechnung. Die hier folgenden Ausführungen haben vor allem die Anwendungen in der analytischen Mechanik im Auge, auf die der zweite Band näher eingeht. Über die Beziehungen zwischen der Variationsrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen gibt das letzte Kapitel des vorliegenden Bandes einigen Aufschluß, wo auch eine etwas anders gerichtete Darstellung der Elemente der Variationsrechnung mit aufgenommen ist.

§ 1. Stellung des Problems. Erste Variation

1. Das Linienintegral. Wir betrachten in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_{n+1}$ mit den Koordinaten

$$x_1, \ldots, x_n, t$$

ein Kurvenstück, das zwei Punkte, P' und P'', dieses Raumes verbindet. Diese Kurve wird durch n Funktionen

$$(1) \qquad x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt, von denen wir annehmen, daß sie beliebig oft differenzierbar seien. Bezeichnet man mit x_i', t' bzw. x_i'', t'' die Koordinaten der Punkte P' und P'', so müssen nach Voraussetzung die Gleichungen

$$x_i' = x_i(t'), \quad x_i'' = x_i(t''),$$

die man durch Einsetzen dieser Werte in (1) erhält, erfüllt sein.

Zweitens betrachten wir eine positive analytische Funktion

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

von $(2n + 1)$ Veränderlichen x_i, $\dot{x}_i$, t.

Wir setzen in (2) für x_i die Funktionen (1) und für $\dot{x}_i$ die Ableitungen dieser Funktionen nach t ein, also

$$\dot{x}_i = \frac{d\,x_i(t)}{d\,t}; \tag{3}$$

nach dieser Substitution wird aus der Funktion $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ eine Funktion von t allein, die wir über t integrieren können. Das Integral

$$J = \int_{t'}^{t''} L(x_i, \dot{x}_i, t)\,d\,t \tag{4}$$

nennen wir das längs des Kurvenstückes (1) über die Funktion L genommene Linienintegral.

Ersetzt man das Kurvenstück (1) durch ein anderes, welches dieselben Endpunkte P' und P'' besitzt, so wird außer in ganz speziellen Fällen (siehe 6) der Wert des Linienintegrals (4) sich verändern.

Die Aufgabe, die man sich in der Variationsrechnung stellt, besteht darin, zu untersuchen, ob es Kurvenstücke gibt, für welche der Wert des Linienintegrals (4) kleiner ist als für jede andere Kurve, die P' mit P'' verbindet und in einer gewissen Umgebung der ersten liegt, und gegebenenfalls die Kurven, für welche dieser Minimalwert erreicht wird, und die man Extremalen nennt, zu bestimmen.

2. Beispiele. In der Differentialrechnung wird gezeigt, daß man die Bogenlänge einer Kurve in der Ebene mit den Koordinaten x, t durch das Linienintegral

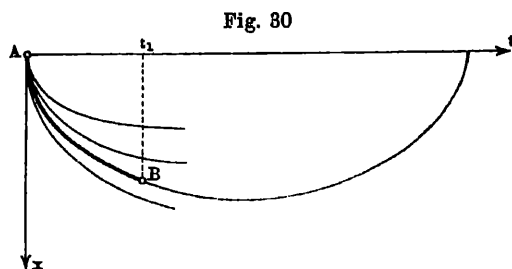
$$\int_{t'}^{t''} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\,d\,t \tag{5}$$

darstellen kann. Das Problem, die kürzeste Linie zu bestimmen, die zwei Punkte P' und P'' der Ebene verbindet, ist also ein Problem der Variationsrechnung, für welches $L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ zu setzen ist. Die Antwort auf diese allereinfachste Frage der Variations-

rechnung wurde schon im Altertum gegeben; sie besteht in dem Satze, daß die **geradlinige** Strecke die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten ist. Dieser Satz ist eine Folge des Theorems, daß jede Seite eines Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Das älteste Problem der Variationsrechnung, das nicht mit elementargeometrischen Methoden gelöst werden kann, wurde im Jahre 1696 von Johann Bernoulli gestellt; es ist das Problem der Brachistochrone:

Es sollen zwei Punkte A und B, die in einer vertikalen Ebene liegen, durch eine Kurve derart verbunden werden,

Fig. 30

daß ein materieller Punkt, der unter der Einwirkung der Schwere von A aus längs der Kurve fällt, in möglichst kurzer Zeit von A nach B gelangt.

Bezeichnet man mit s die Bogenlänge, mit τ die Zeit und mit v die Geschwindigkeit des Körpers, so ist in jedem Punkte der Bahnkurve $v = ds/d\tau$ und daher die Zeit, die der Körper braucht, um von A nach B zu gelangen,

$$\int_0^T d\tau = \int_0^S \frac{ds}{v} = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt}{v}.$$

Nach den Gesetzen des freien Falls ist aber v^2 der Ordinate x proportional, so daß man ein Variationsproblem vor sich hat, in dem

$$L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{\frac{1+\dot{x}^2}{x}} \tag{6}$$

zu setzen ist.

Es gibt viele andere interessante Fragen, die auf Variationsprobleme führen; die große Bedeutung dieser Disziplin rührt aber hauptsächlich daher, daß man ein Lehrgebäude der Mechanik auf den Begriffsbildungen der Variationsrechnung aufbauen kann.

3. Die erste Variation. Nachdem die Brüder Johann (1667—1748) und Jacob (1654—1705) Bernoulli sowie L. Euler (1707—1783) sich verschiedentlich mit Fragen der Variationsrechnung beschäftigt hatten, hat im Jahre 1760 J. L. Lagrange (1736—1813) folgende allgemeine Methode ersonnen, um Variationsprobleme zu behandeln.

Wir betrachten eine einparametrige Schar von Kurven des $(n+1)$-dimensionalen Raumes der x_i, t, die die Kurve (1) enthält; sind also

$$x_i = x_i(t, \alpha) \tag{7}$$

die Gleichungen, durch die unsere Kurvenschar dargestellt wird, so sollen z. B. die Gleichungen $x_i(t) = x_i(t, 0)$ gelten, d. h. es soll die Kurve (1) dem Parameterwert $\alpha = 0$ entsprechen. Dann wird das Linienintegral

$$J(\alpha) = \int_{t'}^{t''} L\left(x_i(t, \alpha), \frac{\partial x_i(t, \alpha)}{\partial t}, t\right) dt$$

eine Funktion von α sein. Nach den Differentiationsregeln der bestimmten Integrale hat man nun, wenn wir die partiellen Ableitungen von L durch beigesetzte Indizes bezeichnen:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t'}^{t''} \sum_i \left(L_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + L_{\dot{x}_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \alpha}\right) dt. \tag{8}$$

Nun bemerke man, daß

$$\frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right) = L_{\dot{x}_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} + \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$$

und daß andererseits

$$\int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt}\left(L_{\dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right) dt = \left[L_{\dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right]_{t'}^{t''}$$

ist. Statt der Gl. (8) kann man also schreiben:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \left[\sum_i L_{\dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right]_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} \sum_i \left[\left(L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right] dt. \tag{9}$$

Wählt man nun die Kurvenschar $x_i(t, \alpha)$ derart, daß sämtliche Kurven der Schar durch die Punkte P' und P'' hindurchgehen, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i(t'', \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial x_i(t', \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

und Gl. (9) reduziert sich auf

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t'}^{t''} \sum_i \left[\left(L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right] dt. \tag{10}$$

In dieser letzten Gleichung setzen wir nun $\alpha = 0$; falls wir die Bezeichnung

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha, \quad \delta x_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

benutzen, die Lagrange in die Variationsrechnung eingeführt hat und die seitdem üblich ist, erhalten wir schließlich

$$\delta J = \int_{t'}^{t''} \sum_i \left[\left(L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}\right) \delta x_i\right] dt. \tag{11}$$

Der Ausdruck δJ heißt die erste Variation des Integrals (4). In der Gl. (11) hängen die Klammerausdrücke $\left(L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}\right)$ nach unseren Voraussetzungen ausschließlich von der Kurve (1) ab, nicht aber von der Wahl der Kurvenschar (7), in die wir diese Kurve eingebettet haben. Die Größen δx_i hängen dagegen von der Kurvenschar (7) ab; ist es nun möglich, diese Kurvenschar so zu bestimmen, daß δJ in (11) oder, was dasselbe ist, $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$ in (10) nicht verschwindet, so gibt es sicher Kurven, die P' mit P'' verbinden und für welche das Integral (4) einen kleineren Wert besitzt als für die Kurve (2). Denn derartige Kurven sind schon in unserer Schar enthalten, weil die Funktion $J(\alpha)$ für $\alpha = 0$ kein Minimum besitzt.

Die einzigen Kurven, unter welchen die Lösungen unseres Problems zu suchen sind, sind also diejenigen, für die bei jeder möglichen Wahl der δx_i stets $\delta J = 0$ ist. Dies ist nun nach (11) sicher der Fall, falls die Kurve (1) eine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen ist:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} - L_{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Man kann aber auch umgekehrt, wenn auch mit einiger Mühe, zeigen, daß, wenn die Kurve (1) keine Lösung des Gleichungssystems (12) ist, die δx_i so gewählt werden können, daß δJ von Null verschieden ist; hieraus folgt das Resultat: die einzigen Kurven, die eine Lösung des in 1 gestellten Problems liefern, genügen dem System von Differentialgleichungen (12).

Die Differentialgleichungen (12) sind zuerst von Euler aufgestellt worden und heißen die Eulerschen Differentialgleichungen des Variationsproblems (4); die Kurven aber, welche diesen Differentialgleichungen genügen, nennt man Extremalen des Variationsproblems.

Wir wollen die Konstruktion der δx_i, für welche $\delta J \neq 0$, falls die zu untersuchende Kurve keine Extremale ist, nicht durchführen und auch sonst die obige Schlußweise, die auf Lagrange zurückgeht, nicht in allen ihren Einzelheiten verfolgen. Durch sie wird nämlich nur ein Teil unseres Problems gelöst: Sie erlaubt uns zwar Kurven zu bestimmen, unter welchen die Lösung zu suchen ist; wir können aber nicht mit ihrer Hilfe entscheiden, in welchen Fällen ein gegebenes Linienstück, das die Punkte P' und P'' verbindet und die Gl. (12) befriedigt, wirklich eine Lösung unseres Problems liefert. Wir werden im folgenden eine direktere Methode benutzen, durch welche das Problem vollständig gelöst wird.

Es ist dagegen wichtig zu betonen, daß bei vielen Problemen der mathematischen Physik die Frage nach dem Minimum eines Integrals, wie wir sie unter 1 gestellt haben, hinter der anderen zurücktritt, in der man bloß diejenigen Kurven sucht, für welche die erste Variation verschwindet. Dies ist auch der Grund, weshalb wir hier die erste Variation unseres Linienintegrals, die wir im folgenden nicht mehr benutzen werden, angeführt haben.

4. Integration der Eulerschen Differentialgleichungen durch Quadraturen in speziellen Fällen. In den Fällen, in denen die Funktion $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ nur von den $\dot{x}_i$ und t, nicht aber von den x_i abhängt, lassen sich die Differentialgleichungen (12) sofort durch n Differentialgleichungen erster Ordnung mit n willkürlichen Integrationskonstanten α_i, nämlich durch

$$L_{\dot{x}_i} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

ersetzen. Ist außerdem noch $n = 1$, und löst man die Gleichung

$$L_{\dot{x}}(\dot{x}, t) = \alpha \tag{14}$$

nach $\dot{x}$ auf, so erhält man eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = \varphi(t, \alpha), \tag{15}$$

die man nunmehr durch eine Quadratur integrieren kann. Das allgemeine Integral der Extremalen lautet dann

$$x = \beta + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, \alpha)\, dt. \tag{16}$$

Die Eulerschen Differentialgleichungen lassen sich ebenfalls mittels Quadraturen integrieren, falls $n = 1$ und die Funktion L nicht von t abhängt. Setzt man nämlich

$$K(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) - \dot{x} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}), \tag{17}$$

so ist

$$\frac{dK}{dt} = L_x \dot{x} + L_{\dot{x}} \ddot{x} - \ddot{x} L_{\dot{x}} - \dot{x} \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}$$

$$= \dot{x}\left(L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}\right),$$

und wegen (12)

$$\frac{dK}{dt} = 0.$$

Man hat also ein erstes Integral der Eulerschen Differentialgleichung von der Gestalt

$$L(x, \dot{x}) - \dot{x} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = \alpha, \tag{18}$$

wobei α eine Integrationskonstante bedeutet. Löst man diese letzte Gleichung nach $\dot{x}$ auf, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x, \alpha),$$

und diese führt zum allgemeinen Integral der Eulerschen Differentialgleichung

$$t = \beta + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\psi(x, \alpha)}$$

mit den beiden Integrationskonstanten α und β.

5. Beispiele. a) Das Problem, die kürzeste Linie zu bestimmen, die zwei Punkte P' und P'' der Ebene verbindet, führt, wie wir unter 2 gesehen haben, zu der Funktion

$$L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2};$$

hier haben wir nach (14)

$$L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \alpha,$$

und nach (15)

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Das allgemeine Integral der Extremalen lautet also

$$x = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + \beta$$

und stellt, wie vorauszusehen war, lauter Geraden dar. Die K
stanten α und β können hier eindeutig als Funktionen der Koo
naten x', t' und x'', t'' der vorgeschriebenen Endpunkte P' und
der betrachteten Extremale berechnet werden. Man findet, f
$t'' > t'$ ist,

$$\alpha = \frac{x'' - x'}{\sqrt{(x''-x')^2 + (t''-t')^2}}, \qquad \beta = \frac{x' t'' - x'' t'}{t'' - t'}.$$

b) Das Problem der **Brachistochrone** liefert nach (6) und (

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\dot{x}^2} - \dot{x}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = \alpha$$

oder, falls man $1:\alpha^2 = 2a$ setzt,

$$x(1+\dot{x}^2) = 2a. \tag{19}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, führen wir einen Parameter ein und setzen

$$x = 2a\sin^2\frac{u}{2} = a(1-\cos u). \tag{20}$$

Durch Differentiation nach t erhalten wir dann

$$\dot{x} = a\sin u\,\dot{u}. \tag{21}$$

Wir setzen diese Werte in (19) ein und erhalten

$$\sin^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}a^2\sin^2 u\,\dot{u}^2 = 1$$

oder

$$4a^2\sin^4\frac{u}{2}\dot{u}^2 = 1,$$

und schließlich

$$a(1-\cos u)\,\dot{u} = \pm 1. \tag{22}$$

Diese letzte Gleichung läßt sich nun sofort integrieren und liefer

$$\pm(t-t_0) = a(u - \sin u). \tag{23}$$

Die durch die Gleichungen (20) und (23) dargestellte Kurv
ist eine Zykloide, die die Achse $x = 0$ als Leitlinie besitzt. Wil
man nun zwei Punkte A und B, von denen der erste auf der Ge
raden $x = 0$ liegt, durch eine Extremale verbinden, so bemerke
wir zunächst, daß der Punkt A mit einer Spitze unserer Zykloide zu
sammenfallen muß. Liegt A, wie in der Fig. 30, S. 229, im Anfangspunk
der Koordinaten, so können wir in (23) die Konstante $t_0 = 0$ setzen
Die Gleichungen der Extremalen lauten jetzt, falls wir bemerken

daß das doppelte Vorzeichen der Gl. (23) unnötig ist, da die rechte Seite dieser Gleichung mit u das Vorzeichen wechselt,

$$(24) \qquad x = a(1 - \cos u), \qquad t = a(u - \sin u).$$

Läßt man nun u von -2π bis 2π variieren und a alle positiven Werte durchlaufen, so erhalten wir eine Schar von Extremalen, die die ganze Halbebene $x > 0$ (mit einziger Ausnahme der vertikalen Geraden $t = 0$) einfach überdeckt. Die betrachteten Zykloidenbogen entstehen nämlich alle, wie die Gl. (24) zeigen, aus einem unter ihnen durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitszentrum A, und jede von den Achsen verschiedene Gerade, die durch A hindurchgeht, begegnet jedem dieser Zykloidenbogen nur noch in einem einzigen von A verschiedenen Punkte. Hieraus folgt, daß es nur eine einzige Extremale gibt, die A mit B verbindet.

c) Rotationsfläche kleinsten Inhalts. Es sollen zwei Punkte P' und P'' der Halbebene $x > 0$ durch eine in dieser Halbebene liegende Kurve verbunden werden, so daß die Fläche, die durch Rotation dieser Kurve um die Achse $x = 0$ entsteht, einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitze. Bezeichnet man mit F den Flächeninhalt unserer Rotationsfläche, so besteht die Beziehung

$$F = 2\pi \int_{t'}^{t''} x \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt;$$

man muß also hier

$$(25) \qquad L(x, \dot{x}) = x\sqrt{1 + \dot{x}^2}$$

und nach (17)

$$K(x, \dot{x}) = \frac{x}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

setzen. Wir schreiben für das erste Integral (18) der Eulerschen Differentialgleichung $K(x, \dot{x}) = a$ und lösen diese Gleichung nach $\dot{x}^2$ auf, wir erhalten auf diese Weise zunächst die Gleichung

$$(26) \qquad \dot{x}^2 = \frac{x^2 - a^2}{a^2}.$$

Führen wir nun eine Hilfsvariable u durch die Gleichung

$$(27) \qquad x = \frac{a}{2}(e^u + e^{-u})$$

ein, so haben wir einerseits

$$x^2 - a^2 = \frac{a^2}{4}(e^u - e^{-u})^2$$

und andererseits

$$\dot{x} = \frac{a}{2}(e^u - e^{-u})\, \dot{u}.$$

Durch Einsetzen dieser letzten Werte in (26) findet man

$$a^2 \dot{u}^2 = 1 \tag{28}$$

und hieraus

$$\pm u = \frac{t - t_0}{a}.$$

Die Gleichungen der Extremalen lauten also

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t-t_0}{a}} + e^{-\frac{t-t_0}{a}}\right),$$

und diese Kurven sind Kettenlinien, die die Achse $x = 0$ als Leitlinie besitzen.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten ist aber hier viel komplizierter als in den früheren Fällen; es kann je nach der Lage der Punkte P' und P'' mehrere oder auch überhaupt keine Extremalen geben, die die beiden Punkte verbinden[1]).

d) Ein Problem, bei welchem ebenfalls nicht jedes Punktepaar durch einen Extremalenbogen verbunden werden kann, in dem aber die Verhältnisse viel übersichtlicher sind, ist folgendes: man setze $L = e^t \sqrt{1 + \dot{x}^2}$, dann wird nach (14) durch die Gleichung

$$L_{\dot{x}} = e^t \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \alpha \tag{29}$$

ein erstes Integral der Eulerschen Differentialgleichung gegeben. Ist $\alpha = 0$, so ist die Extremale eine Parallele zur Achse $x = 0$; ist $\alpha \neq 0$, so setze man, je nach dem Vorzeichen von $\dot{x}$, die Konstante $\alpha = \pm e^{t_0}$. Löst man dann die Gl. (29) nach $\dot{x}$ auf, so erhält man die Gleichung

$$\pm \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{e^{2(t-t_0)} - 1}}. \tag{30}$$

Wir führen jetzt einen Parameter v ein durch die Relation

$$\cos v = e^{-(t-t_0)}.$$

Durch Differentiation nach t erhält man dann

$$\sin v \cdot \dot{v} = e^{-(t-t_0)}$$

und hieraus

$$\dot{v} = \frac{1}{\sqrt{e^{2(t-t_0)} - 1}}.$$

---

[1]) Siehe O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig und Berlin, 1908/09. Beispiel 1, S. 79.

Der Vergleich dieser letzten Gleichung mit (30) zeigt, daß $\dot{v} = \pm \dot{x}$ oder $v = \pm(x - x_0)$ ist. Die Gleichung für die nicht geradlinigen Extremalen kann demnach geschrieben werden:

$$e^{(t-t_0)} \cos(x - x_0) = 1. \tag{31}$$

Diese Gleichung zeigt, daß sämtliche Extremalen unseres Problems aus einer beliebigen unter ihnen durch Parallelverschiebungen erzeugt werden können, und daß jede dieser Kurven innerhalb eines zur t-Achse parallelen Streifens von der Breite 2π verläuft. Zwei Punkte P' und P'', deren Ordinaten x' und x'' um mehr als 2π verschieden sind, können also niemals durch eine Extremale verbunden werden, und das Variationsproblem hat in diesem Falle, wie eine eingehendere Untersuchung zeigt, tatsächlich keine Lösung[1]).

6. Variationsprobleme mit willkürlichen Extremalen. Wir untersuchen schließlich die Bedingungen, denen die Funktion $L(x_i, \dot{x}_i, t)$. genügen muß, damit jede willkürliche Kurve eine Lösung der Gl. (12) sei. Diese Gleichungen lauten, wenn man sie entwickelt und $\frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ setzt,

$$\sum_j (L_{x_j \dot{x}_i} \dot{x}_j + L_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \ddot{x}_j) + L_{t\dot{x}_i} - L_{x_i} = 0. \tag{32}$$

Nach Voraussetzung müssen sie auch gelten, wenn die Funktionen $x_i(t)$ beliebige lineare Funktionen von t sind; hieraus folgt, da dann $\ddot{x}_j = 0$ ist, daß für jedes beliebige Linienelement des $(n+1)$-dimensionalen Raumes die Gleichungen

$$\sum_j L_{x_j \dot{x}_i} \dot{x}_j + L_{t\dot{x}_i} - L_{x_i} = 0 \tag{33}$$

erfüllt sein müssen. Diese letzten Gleichungen müssen also auch für jede beliebige Kurve gelten; zieht man sie von den früheren ab, so folgt, daß ebenfalls

$$\sum_j L_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \ddot{x}_j = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

identisch erfüllt sein muß. Hieraus folgt nun das identische Verschwinden der Funktionen $L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}$ für alle i und j; wäre nämlich eine dieser Größen für irgendein Linienelement des Raumes $\neq 0$, so würde man leicht eine Kurve angeben können, für welche die Gl. (34) nicht alle bestehen. Wir sehen also, daß $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ eine lineare Funktion in den $\dot{x}_i$ sein muß von der Gestalt

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \sum_k A_k \dot{x}_k + A_t,$$

[1]) C. Carathéodory, Sui Campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio. Bollet. dell' Unione Matem. Italiana II, No. 1, 2,3 (1923).

wo die A_k und A_t Funktionen von x_i und t allein sind. Setzt man diesen Wert von L in (33) ein, so erhält man die Gleichung

$$\sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\dot{x}_k - \frac{\partial A_t}{\partial x_i} = 0$$

oder

$$\sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\dot{x}_j + \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dafür, daß diese Gleichung für jedes Linienelement des $(n+1)$-dimensionalen Raumes erfüllt sei, ist notwendig und hinreichend, daß folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\partial A_t}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

dieses ist aber bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn eine Funktion $\varphi(x_i, t)$ existiert, so daß

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad A_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ist. Dann hat aber Ldt die Form eines vollständigen Differentials

$$Ldt = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt, \tag{35}$$

und der Wert des Integrals (4) hängt tatsächlich nur von den Endpunkten P' und P'' des betrachteten Kurvenstückes ab. Es ist selbstverständlich, daß in diesem Falle die Extremalen ganz willkürlich sind.

§ 2. Die vollständigen Figuren des Variationsproblems

1. Vorbemerkung. Wir betrachten in unserem $\mathfrak{R}_{n+1}$ eine beliebige Flächenschar, die ein Gebiet $\mathfrak{G}$ dieses Raumes eindeutig überdeckt und durch die Gleichung

$$S(x_1, \ldots, x_n, t) = \lambda \tag{1}$$

definiert wird. Es ist für spätere Zwecke nützlich, zu bemerken, daß, wenn $\varphi(u)$ eine monotone Funktion von u ist, die Flächenschar (1) auch durch die Funktion

$$\overline{S}(x_1, \ldots, x_n, t) = \varphi[S(x_i, t)] = \overline{\lambda} \tag{2}$$

dargestellt wird; insbesondere können wir $\overline{S} = -S$ setzen.

Nun sei durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

eine Kurve definiert, welche die Schar (1) durchsetzt. Wir können diese letzte Eigenschaft zum Ausdruck bringen, indem wir voraussetzen, daß die Funktion

$$\lambda(t) = S[x_i(t), t], \tag{4}$$

die man durch Einsetzen der Werte (3) von x_i in (1) erhält, eine monotone Funktion von t sei. Wir können sogar ohne Beschränkung der Allgemeinheit verlangen — indem wir nötigenfalls unsere Schar durch die Funktion $\overline{S} = -S$ darstellen —, daß $\lambda(t)$ monoton wachsend sei. Mit der Bezeichnung

$$\Delta = \sum_i S_{x_i} \dot{x}_i + S_t \tag{5}$$

wird dies durch die Relation

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Delta \geqq 0 \tag{6}$$

ausgedrückt. Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß unsere Kurve (3) in keinem ihrer Punkte eine Fläche unserer Schar berührt, was durch die Bedingung $\Delta \neq 0$ ausgedrückt wird. In der Tat besagt diese Bedingung, daß die Normale einer Fläche unserer Schar, deren Fußpunkt P auf der Kurve (3) liegt, die Tangente der Kurve in diesem Punkte nicht senkrecht schneidet. Es muß also nach (6) längs unseres Kurvenstückes $\Delta > 0$ sein, und man kann dann mit Hilfe unserer Gl. (4) die Größe t als monoton wachsende Funktion von λ berechnen.

2. Geodätisches Gefälle. Das Kurvenintegral

$$J(t) = \int_{t'}^{t} L(x_i, \dot{x}_i, t)\, dt, \tag{7}$$

genommen längs der Kurve (3), zwischen einem festen Anfangspunkt P' und einem mit t variierenden Punkte P, ist eine Funktion von t, die man nach der letzten Bemerkung auch als Funktion von λ auffassen kann. Man hat dann, wegen (6) und (7),

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{dJ}{dt} : \frac{d\lambda}{dt} = L : \Delta.$$

Für alle Kurven $x_i(t)$, die durch einen festen Punkt P innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ gehen, hängt $\frac{dJ}{d\lambda}$ noch von den $\dot{x}_i$, d. h. von der Richtung der betrachteten Kurve in P ab.

Wir führen nun folgende **Definition** ein:

Die Richtung, für welche in einem Punkte P des Raumes die positive Größe $L:\Delta$ ihren kleinsten Wert annimmt, soll

die **Richtung des geodätischen Gefälles** der Flächenschar $S(x_i$,
der Wert aber, den $L:\varDelta$ für diese Richtung annimmt, d
Betrag des geodätischen Gefälles im Punkte P genannt werd

Das geodätische Gefälle ist also ein Vektor, dessen Komponent den Größen $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$, 1 proportional sind, wobei — nach der Theo der gewöhnlichen Maxima und Minima — die Größen $\dot{x}_i$ Werte l sitzen, für welche die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{L}{\varDelta}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen.

Entwickelt man diese Gleichungen und berücksichtigt die D finition (5) von $\varDelta$, sowie die Bedingung $\varDelta > 0$, so erhält man d Relationen

$$\varDelta L_{\dot{x}_i} - L S_{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

3. Geodätische Gefällkurven. Hat man in einem Punkte P d Raumes die Größen $\dot{x}_i$ so bestimmt, daß die Gl. (8) erfüllt sind, un ist die Funktionaldeterminante der linken Seiten dieses Gleichung systems nach den $\dot{x}_i$ von Null verschieden, so kann man (8) nac den $\dot{x}_i$ auflösen und erhält ein System von Differentialgleichunge erster Ordnung:

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

deren Integralkurven die geodätischen Gefällkurven de Flächenschar $S = \lambda$ heißen sollen.

Das Gefälle und die Gefällkurven haben wir „geodätisch" ge nannt, um zum Ausdruck zu bringen, daß sie in Beziehung zu de Funktion $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ stehen, die unser Variationsproblem bestimmt.

Bemerkung. Wenn man, der Gl. (2) folgend, unsere Flächenschar durch die Funktion $\overline{S} = \varphi(S)$ darstellt, und

$$\overline{\varDelta} = \sum_i \overline{S}_{x_i} \dot{x}_i + \overline{S}_t$$

setzt, so folgen aus den Gleichungen

$$\overline{S}_{x_i} = \varphi'(S) S_{x_i}, \quad \overline{S}_t = \varphi'(S) S_t$$

die Relationen

$$\overline{\varDelta} = \varphi'(S) . \varDelta, \quad \overline{\varDelta}_{\dot{x}_i} = \varphi'(S) \varDelta_{\dot{x}_i}.$$

Hieraus entnimmt man, daß die Richtung des geodätischen Gefälles unserer Flächenschar (und daher auch die Gefällkurven) unabhängig sind von der Darstellung dieser Flächenschar durch die

eine oder andere Funktion $\overline{S}$. Der Betrag des geodätischen Gefälles ändert sich dagegen mit der Wahl $\overline{S}$, denn man hat

$$\frac{L}{\overline{\Delta}} = \frac{1}{\varphi'(S)} \cdot \frac{L}{\Delta}. \tag{9}$$

4. Die Weierstrasssche E-Funktion. Wir wollen jetzt untersuchen, in welchen Fällen den Richtungen $\dot{x}_i$, die durch das Gleichungssystem (8) geliefert werden, wirklich ein Minimum der Funktion $L:\Delta$ entspricht. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn für jede andere Richtung mit den Koordinaten x_i', für welche die Größe

$$\Delta' = \sum_i S_{x_i} x_i' + S_t > 0$$

ist, die Relation

$$\frac{L'}{\Delta'} - \frac{L}{\Delta} \geqq 0 \tag{10}$$

erfüllt ist; hierbei bedeutet L' eine Abkürzung für die Größe $L(x_i, x_i', t)$. Wegen der Bedingung $\Delta' > 0$ kann die letzte Relation, wie man sofort verifiziert, geschrieben werden

$$L' - L - \frac{L}{\Delta}(\Delta' - \Delta) \geqq 0. \tag{11}$$

Nun ist aber nach Definition

$$\Delta' - \Delta = \sum_i S_{x_i}(x_i' - \dot{x}_i),$$

und daher ist mit Berücksichtigung von (8)

$$\frac{L}{\Delta}(\Delta' - \Delta) = \sum_i L_{\dot{x}_i}(x_i' - \dot{x}_i).$$

Setzt man diesen Ausdruck in (11) ein, so sehen wir, daß mit der Bezeichnung

$$E(x_i, x_i', \dot{x}_i, t) = L' - L - \sum_i L_{\dot{x}_i}(x_i' - \dot{x}_i) \tag{12}$$

die Bedingung (10) durch folgende ersetzt werden kann:

$$E(x_i, x_i', \dot{x}_i, t) \geqq 0. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswert, daß die Funktion S in ihm nicht mehr explizite auftritt.

Die Funktion $E(x_i, x_i', \dot{x}_i, t)$ ist durch Weierstrass (1815—1897) in die Variationsrechnung eingeführt worden; sie ist nichts anderes als der Rest der Taylorschen Reihe von $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ als Funktion der $\dot{x}_i$ allein, wenn man diese Reihe nach den Differenzen $(x_i' - \dot{x}_i)$ entwickelt und die linearen Glieder allein berücksichtigt.

Für diesen Rest werden in den Lehrbüchern der Differenti' rechnung verschiedene Abschätzungen entwickelt, von denen die ei fachste die Gestalt hat:

$$E(x_i, x'_i, \dot{x}_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{L}_{\dot{x}_i \dot{x}_j} (x'_i - \dot{x}_i)(x'_j - \dot{x}_j). \tag{14}$$

Hierbei ist $\tilde{L}_{\dot{x}_i \dot{x}_j}$ eine abgekürzte Bezeichnung für die Funktic

$$\frac{\partial^2 L(x_k, \dot{x}_k, t)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j},$$

in der man statt der $\dot{x}_k$ die Werte $\vartheta x'_k + (1 - \vartheta) \dot{x}_k$ eingesetzt ha wobei ϑ eine gewisse Zahl zwischen Null und Eins bedeutet.

Das Vorzeichen der Weierstrassschen E-Funktion ist eng mi dem Verhalten der quadratischen Form

$$Q(\xi_i) = \sum_{ij} L_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \xi_i \xi_j, \tag{15}$$

deren Koeffizienten von den x_i und $\dot{x}_i$ abhängen, verknüpft. Ist, wie wir im folgenden stets annehmen wollen, die quadratische Form Q für alle möglichen Werte von x_i und $\dot{x}_i$ durchweg positiv definit, so zeigt die Gl. (14), daß die Funktion $E(x_i, x'_i, \dot{x}_i, t)$ ebenfalls immer positiv ist und nur dann verschwindet, wenn die beiden Richtungen $\dot{x}_i$ und x'_i zusammenfallen. Der Fall, daß die Form Q positiv definit ist, ist besonders wichtig, weil er in der Mechanik allein vorkommt. Nach einem bekannten Satze der Algebra ist dann auch stets die Determinante

$$D = |L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}| \neq 0; \tag{16}$$

wäre nämlich $D = 0$, so würden Systeme von nicht durchweg verschwindenden ξ_i existieren, für welche $Q = 0$ wäre, und Q wäre nicht definit.

5. Scharen geodätisch äquidistanter Flächen. Der in 2 definierte Betrag $L : \Delta$ des geodätischen Gefälles einer beliebigen Flächenschar ist in unserem $\mathfrak{R}_{n+1}$ eine Funktion des Ortes.

Die Flächen der Schar (1) sollen **geodätisch äquidistant** heißen, falls diese Funktion eine Funktion von λ allein ist. Man hat in diesem Falle

$$\frac{L}{\Delta} = \psi(\lambda) = \psi(S(x, \ldots, x_n, t)),$$

wobei $\psi(\lambda)$ nach unseren früheren Voraussetzungen positiv ist. Die Eigenschaft einer Flächenschar, aus geodätisch äquidistanten Flächen zu bestehen, ist unabhängig von ihrer Darstellung durch die eine

oder andere Funktion $\bar{S}$. Nach der Gl. (9) hat man in der Tat, wenn man $\bar{S} = \varphi(S)$ setzt,

$$\frac{L}{\bar{\varDelta}} = \frac{1}{\varphi'(S)} \frac{L}{\varDelta} = \frac{\psi(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

Hieraus folgt, daß man bei geeigneter Wahl der Funktion φ die Eigenschaft der geodätischen Äquidistanz besonders einfach darstellen kann. Wir setzen hierzu $\varphi'(\lambda) = \psi(\lambda)$ oder, was dasselbe ist:

$$\varphi(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Mit dieser Wahl der Funktion $\bar{S}$, die für jede geodätisch äquidistante Flächenschar nur auf einer einzigen Weise erfolgen kann, ist der Betrag des Gefälles konstant gleich Eins.

Wir können also von vornherein jede beliebige Schar geodätisch äquidistanter Flächen darstellen, indem wir verlangen, daß die Gleichung $L = \varDelta$ für diejenigen Werte der $\dot{x}_i$ erfüllt ist, die den Gl. (8) genügen.

Diese Gleichungen selbst vereinfachen sich in diesem Falle und lauten $S_{x_i} = L_{\dot{x}_i}$, und wir sehen, daß die geodätisch äquidistanten Flächen durch folgendes Gleichungssystem dargestellt werden:

$$(17) \qquad \begin{cases} S_{x_i} = L_{\dot{x}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ S_t + \sum\limits_k S_{x_k} \dot{x}_k = L(x_i, \dot{x}_i, t). \end{cases}$$

Die Relation (16) zeigt uns ferner, daß man die ersten n Gleichungen (17) nach den $\dot{x}_i$ auflösen kann. Setzt man die so gefundenen Werte in die letzte Gleichung ein, so erhält man für S eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Die Integration dieser Gleichung, die man die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung nennt, wird uns erst später beschäftigen.

6. Die vollständigen Figuren der Variationsrechnung. Ist in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ des Raumes der x_i, t eine Schar geodätisch äquidistanter Flächen

$$(18) \qquad S(x_i, \ldots, x_n, t) = \lambda$$

gegeben, für welche das Gleichungssystem (17) gilt, und die das Gebiet $\mathfrak{G}$ einfach überdecken, so bilden diese, zusammen mit ihren Gefällkurven, ein geometrisches Gebilde, das eine vollständige Figur unseres Variationsproblems genannt werden soll. Wir betrachten eine willkürliche Kurve

$$(19) \qquad x_i = \bar{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

welche die Schar (18) durchsetzt, und schreiben zur Abkürzung

$$\frac{d\overline{x}_i}{dt} = \overline{x}_i', \qquad \overline{L} = L(x_i, \overline{x}_i', t),$$

$$(20) \qquad \overline{\Delta} = \sum_i S_{x_i} \overline{x}_i' + S_t = \frac{d}{dt} S(\overline{x}_i, t).$$

Dann ist, wenn man die Gl. (17) benutzt,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} &= L(x_i, \dot{x}_i, t) + \sum_i S_{x_i}(\overline{x}_i' - \dot{x}_i)\\ &= L(x_i, \dot{x}_i, t) + \sum_i L_{\dot{x}_i}(\overline{x}_i' - \dot{x}_i),\end{aligned}$$

und mit Hilfe der Definitionsgleichung (12) für die E-Funktion, indem man unsere jetzigen Bezeichnungen berücksichtigt,

$$(21) \qquad \overline{\Delta} = \overline{L} - E(x_i, \overline{x}_i', \dot{x}_i; t).$$

Das Kurvenintegral über L längs der Kurve (19) zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 des Raumes, in denen die Funktion S die Werte S_1 bzw. S_2 annimmt, lautet

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \overline{L}\, dt.$$

Andererseits kann man wegen (20) schreiben

$$S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dS(\overline{x}_i, t)}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\Delta}\, dt,$$

und aus den zwei letzten Gleichungen folgt mit Hilfe von (21)

$$(22) \qquad J - (S_2 - S_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{L} - \overline{\Delta})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} E(x_i, \overline{x}_i'; \dot{x}_i, t)\, dt.$$

7. Lösung des Variationsproblems. Die Funktion unter dem Integral ist nach unseren Annahmen stets positiv und nur dann gleich Null, wenn für alle i die Größen $(\overline{x}_i' - \dot{x}_i)$ verschwinden, d. h. wenn die Tangente der Kurve (19) im betrachteten Punkte die Richtung des Gefälles besitzt.

Insbesondere ist für eine Gefällkurve, längs der ganzen Kurve, $E = 0$ und es besteht die Gleichung

$$(23) \qquad J = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = S_2 - S_1,$$

wenn S_1 und S_2 die Werte von S in den Endpunkten P_1 und P_2 des betrachteten Kurvenstückes bedeuten. Für jede Kurve mit stückweise

stetiger Tangente, die keine Gefällkurve ist, gibt es mindestens ein Teilintervall des Intervalls $t_1 < t < t_2$, in welchem die E-Funktion unter dem letzten Integral der Relation (22) nicht verschwindet; da nun im ganzen Intervall $t_1 < t < t_2$ die Funktion $E \geqq 0$ ist, hat man in diesem Falle

$$\int_{t_1}^{t_2} E\,dt > 0$$

und daher

$$J > (S_2 - S_1). \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt nun, daß das Integral über L längs einer Gefällkurve unserer vollständigen Figur, welche die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet, kleiner ist als das Integral über jede andere Kurve, die zwischen denselben Punkten im Innern unserer vollständigen Figur verläuft. Das am Ende des § 1 gestellte Problem ist also für die Punktepaare, die auf derselben Gefällkurve einer vollständigen Figur liegen, gelöst, und das Problem selbst auf das andere zurückgeführt, eine vollständige Figur zu konstruieren, derart, daß eine ihrer Gefällkurven zwei gegegebene Punkte des Raumes verbindet.

Diese Eigenschaft der Gefällkurven einer Schar geodätisch äquidistanter Flächen läßt vermuten, daß diese Kurven nicht willkürlich sein können; wir werden bald sehen, daß sie in der Tat Lösungen der Eulerschen Differentialgleichungen § 1, (12) sein müssen.

§ 3. Kanonische Koordinaten

1. Einführung. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, die Linienelemente unseres $\mathfrak{R}_{n+1}$, die wir bisher durch die Größen $x_i, \dot{x}_i, t$ ausgedrückt haben, durch $(2n+1)$ neue Koordinaten x_i, y_i, t darzustellen, die man kanonisch nennt; die systematische Einführung der kanonischen Koordinaten, die in der Mechanik eine hervorragende Rolle spielen, verdankt man Hamilton[1]).

Es sei wieder $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ eine analytische Funktion, für welche die Determinante

$$|L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}| \neq 0 \tag{1}$$

ist. Wir setzen

$$y_i = L_{\dot{x}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

[1]) W. R. Hamilton (1805—1865), Theory of systems of rays (Irish Transactions **15**—**17**, 1828—1830).

Wegen (1) können wir die Gl. (2) nach den $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ auflösen und erhalten

(3) $$\dot{x}_k = \varphi_k(x_i, y_i, t).$$

Nun setzen wir

(4) $$H(x_i, y_i, t) = -L(x_k, \varphi_k, t) + \sum_j y_j \varphi_j.$$

Wenn wir die Gl. (4) partiell nach den x_i differenzieren, so erhalten wir

$$H_{x_i} = -L_{x_i} - \sum_j (L_{\dot{x}_j} - y_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

oder wegen (2)

(5) $$H_{x_i} = -L_{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und genau ebenso bekommt man

(6) $$H_t = -L_t.$$

Differenzieren wir aber (4) partiell nach y_i, so erhält man:

$$H_{y_i} = -\sum_j (L_{\dot{x}_j} - y_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} + \varphi_i$$

oder wegen (2) und (3)

(7) $$\dot{x}_i = H_{y_i}.$$

2. Vertauschbarkeit von H und L. Die Gl. (4) kann man symmetrischer schreiben

(8) $$H + L = \sum_j y_j \dot{x}_j$$

und hierauf bemerken, daß das Gleichungssystem, daß aus den Gl. (2) und (5) bis (8) besteht, unverändert bleibt, wenn man in diesen Gleichungen H mit L und die $\dot{x}_j$ mit den y_j vertauscht.

Man kann also eine beliebige Funktion $H(x_i, y_i, t)$ angeben, von der wir zunächst nur verlangen, daß die Determinante

(9) $$|H_{y_i y_j}| \neq 0$$

ist und hierauf die $\dot{x}_i$ durch die Gl. (7) definieren; löst man dann diese Gleichungen nach den $y_1, \ldots, y_n$ auf — eine Operation, die wegen (9) stets möglich ist —, so kann man aus (8) den Wert von $L(x_i, \dot{x}_i, t)$ berechnen, und es werden dann sämtliche Gleichungen des Systems (2) bis (8) erfüllt sein.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingungen (1) und (9) jede aus der anderen folgt. Dazu differenzieren wir die Identität

$$y_i = L_{\dot{x}_i}(x_k, H_{y_k}, t),$$

die aus (2) und (7) folgt, partiell nach y_j; man erhält, wenn man mit δ_{ij} eine Zahl bezeichnet, die für $i = j$ gleich Eins ist und für $i \neq j$ gleich Null:

$$\delta_{ij} = \sum_k L_{\dot{x}_i \dot{x}_k} H_{y_k y_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt nun mit Hilfe des Multiplikationstheorems der Determinanten

$$1 = |L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}| \cdot |H_{y_i y_j}|, \tag{11}$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

3. Positiver Charakter der Form K. In § 2, 4 hatten wir vorausgesetzt, daß die dort mit Hilfe von L gebildete quadratische Form (15) positiv definit sein mußte. Die Funktion $H(x_i, y_i, t)$, von der wir jetzt ausgehen, muß dann auch einer analogen Bedingung genügen.

Setzt man nämlich in die Gleichung

$$E(x_i, \overline{x}'_i, \dot{x}_i, t) = \overline{L} - L - \sum_k L_{\dot{x}_k}(\overline{x}'_k - \dot{x}_k)$$

nach den Formeln (8) und (2)

$$\overline{L} = -\overline{H} + \sum_j \overline{y}_i \overline{x}'_j, \quad L = -H + \sum_j y_j \dot{x}_j, \quad L_{\dot{x}_k} = y_k$$

und hierauf nach (7): $\overline{x}'_k = \overline{H}_{y_k}$, so erhält man die Relation

$$E = H - \overline{H} - \sum_k \overline{H}_{y_k}(y_k - \overline{y}_k). \tag{12}$$

Der letzte Ausdruck für die E-Funktion in kanonischen Koordinaten ist also genau so gebaut, wie der ursprüngliche Ausdruck (12) des § 2, 4. Ganz analoge Betrachtungen wie diejenigen des § 2, 4 zeigen uns, daß unsere Bedingung für L erfüllt ist, falls die quadratische Form

$$K = \sum_{ij} H_{y_i y_j} \eta_i \eta_j, \tag{13}$$

deren Koeffizienten von den x_k und den y_k abhängen, stets positiv definit ist. Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß die quadratische Form K durch eine lineare homogene Transformation der Veränderlichen ξ_k aus unserer früheren quadratischen Form Q [§ 2, (15)] entspringt. Setzt man nämlich

$$\xi_k = \sum_i H_{y_i y_k} \eta_i,$$

so folgt aus der Gl. (15) des § 2

$$Q = \sum_{i,j,k,l} L_{\dot{x}_k \dot{x}_l} H_{y_i y_k} \eta_i H_{y_j y_l} \eta_j = \sum_{i,j,k,l} H_{y_i y_k} \eta_i \eta_j (L_{\dot{x}_k \dot{x}_l} H_{y_j y_l})$$

oder, wenn man die Relationen (10) benutzt,

$$Q = \sum_{i,j,k} H_{y_i y_k} \eta_i \eta_j \delta_{kj} = \sum_{ij} H_{y_i y_j} \eta_i \eta_j,$$

also schließlich $Q = K$.

4. Darstellung des geodätischen Gefälles einer Flächenschar in kanonischen Koordinaten. Ist eine Flächenschar $S(x_i, t) = \lambda$ gegeben, so erhält man ihr geodätisches Gefälle mit Hilfe der Gl. (5) und (8) von § 2. Die zweite dieser Relationen kann mit Hilfe von (2) geschrieben werden

$$LS_{x_i} = \varDelta y_i. \tag{14}$$

Multipliziert man aber die erste dieser Gleichungen mit L und berücksichtigt (14), so bekommt man die Relation

$$L\varDelta = \varDelta \sum_i y_i \dot{x}_i + LS_t$$

oder wegen (8)

$$0 = \varDelta H + L . S_t. \tag{15}$$

Die Werte der kanonischen Veränderlichen y_i, die dem geodätischen Gefälle entsprechen, werden also durch das Gleichungssystem

$$H(x_k, y_k, t) S_{x_i} + y_i S_t = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

bestimmt, daß durch Elimination von L und $\varDelta$ aus (14) und (15) entsteht. Den absoluten Betrag des geodätischen Gefälles kann man aus der Gleichung (15) berechnen, außer im Falle, daß S_t — und dann auch H — verschwindet; die Gleichung lautet

$$\frac{L}{\varDelta} = -\frac{H(x_k, y_k, t)}{S_t(x_k, t)}. \tag{17}$$

5. Die Gleichungen für die geodätische Äquidistanz in kanonischer Gestalt. Eine Schar geodätisch äquidistanter Flächen wird nach dem § 2, 5 dadurch definiert, daß wir den absoluten Betrag des geodätischen Gefälles gleich Eins setzen. Aus (15) folgt also für eine derartige Schar

$$S_t(x_k, t) + H(x_k, y_k, t) = 0, \tag{18}$$

und die Gleichungen (16) haben dann die Gestalt

$$y_i = S_{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung, die wir am Ende von § 2, 5 erwähnt haben, lautet also nach (18) und (19)

$$S_t + H(x_1, \ldots, x_n, S_{x_1}, \ldots, S_{x_n}, t) = 0. \tag{20}$$

Die Konstruktion einer vollständigen Figur unseres Variationsproblems ist hierdurch auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (20) zurückgeführt. Ist in der Tat $S(x_1, \ldots, x_n, t)$ eine Lösung von (20), so besteht die Flächenschar $S = \lambda$ nach vorigem aus lauter geodätisch äquidistanten Flächen. Die Gefällkurven dieser Schar gewinnt man durch Integration eines gewöhnlichen Systems von Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man in (7) für y_i die Werte (19) einsetzt. Zusammenfassend kann man also sagen, daß die Gleichungen für die vollständigen Figuren unseres Variationsproblems durch folgendes System geliefert werden:

$$S_t + H = 0, \quad \dot{y}_i = S_{x_i}, \quad \dot{x}_i = H_{y_i}. \tag{21}$$

6. Die Eulerschen Differentialgleichungen. Für jede Lösung $S(x_k, t)$ der partiellen Differentialgleichung (20) stellt dieser Ausdruck eine Identität dar, die man partiell nach x_i differenzieren kann. Man erhält so eine Relation, die mit Hilfe der letzten Gl. (21) in

$$S_{x_i t} + \sum_j S_{x_i x_j} \dot{x}_j = - H_{x_i} \tag{22}$$

übergeht. Setzt man andererseits in die rechte Seite von (19) diejenigen Funktionen $x_i(t)$ von t ein, durch welche die geodätischen Gefällkurven der durch S definierten vollständigen Figur dargestellt werden, und differenziert nach t, so erhält man

$$\dot{y}_i = S_{x_i t} + \sum_j S_{x_i x_j} \dot{x}_j. \tag{23}$$

Aus den beiden letzten Relationen folgt nun $\dot{y}_i = - H_{x_i}$, eine Gleichung, die in Verbindung der letzten Gl. (21) zeigt, daß die betrachteten Gefällkurven mit den Lösungen des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x}_i = H_{y_i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t) \\ \dot{y}_i = - H_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

identisch sind. Diese Gleichungen sind nichts anderes als die Eulerschen Differentialgleichungen (12) des § 1 in kanonischer Form. Denn mit Benutzung von (2) und (5) geht (24) über in

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} - L_{x_i} = 0. \tag{25}$$

Jede Lösung des Gleichungssystems (24) projiziert sich also in den $\mathfrak{R}_{n+1}$ der (x_i, t) als Extremale des Variationsproblems, und die Gefällkurven einer vollständigen Figur werden, wie wir es am Ende des § 2 angekündigt haben, aus lauter Extremalen gebildet.

7. Integration der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung. Ist $S(x_i, t)$ irgendeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (20) und setzt man $S_{x_i} = y_i(x_j, t)$, so besteht zwischen den $(n+1)$ Funktionen S, y_i die Identität

$$dS = \sum_j y_j\, dx_j - H(x_i, y_i, t)\, dt. \tag{26}$$

Hat man umgekehrt Funktionen $S, y_1, \ldots, y_n$ von (x_i, t) gefunden, für welche (26) identisch gilt, so muß nicht nur $y_i = S_{x_i}$ sein, sondern es ist außerdem S notwendig eine Lösung von (20). Die Relationen (20) und (26) sind also einander äquivalent; die zweite besitzt aber vor der ersten den Vorzug, bei Änderung der Veränderlichen invariant zu bleiben. Setzt man z. B.

$$x_i = \xi_i(t, u_1, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

und führt man die Bezeichnungen ein

$$y_i(\xi_j, t) = \eta_i(t, u_1, \ldots, u_n), \tag{28}$$

$$S(\xi_j, t) = \sigma(t, u_1, \ldots, u_n), \tag{29}$$

wobei y_i und S dieselben Funktionen wie früher bedeuten, so geht (26) identisch in

$$d\sigma = \sum_j \eta_j\, d\xi_j - H(\xi_i, \eta_i, t)\, dt \tag{30}$$

über. Hat man umgekehrt auf irgendeine Weise Funktionen $\xi_i(t, u_j)$, $\eta_i(t, u_j)$ und $\sigma(t, u_j)$ gefunden, für welche die Relation (30) identisch gilt, und kann man die Gl. (27) nach den u_j auflösen, also z. B. schreiben

$$u_j = \alpha_j(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{31}$$

so genügen die Funktionen

$$y_i(x_j, t) = \eta_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{32}$$

$$S(x_i, t) = \sigma(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{33}$$

der Relation (26), und es ist also S eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (20).

Die vorigen Überlegungen werden wir nun dazu benutzen, um das allgemeinste Integral der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung (20) aufzustellen; wir werden eine Funktion $S(x_i, t)$ bestimmen, die (20) befriedigt und auf einer beliebig gegebenen Hyperfläche

$$t = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{34}$$

des Raumes der (x_i, t) irgendwelche vorgegebene Werte $s(x_1, \ldots, x_n)$ annimmt, d. h. der Identität

$$S(x_i, \tau(x_j)) = s(x_1, \ldots, x_n) \tag{35}$$

genügt.

Die gesuchte Lösung $S(x_i, t)$ von (20) würde, wenn man sie längs einer Gefällkurve, die von ihr bestimmt wird, nach t differenziert, der Gleichung

$$\dot{S} = \sum_j S_{x_j} \dot{x}_j + S_t$$

genügen, die man wegen (21) auch schreiben kann

$$S = \sum_j y_j H_{y_j} - H(x_i, y_i, t). \tag{36}$$

Wir bestimmen nun eine Lösung des Systems der $(2n+1)$ Differentialgleichungen (24) und (36), für x_i, y_i und S, die von n Parametern $(u_1, \ldots, u_n)$ abhängt. Die Funktionen

$$x_i = \xi_i(t, u_j), \quad y_i = \eta_i(t, u_j), \quad S = \sigma(t, u_i), \tag{37}$$

die diese Lösung darstellen, werden hierbei, nach dem allgemeinen Existenzsatz der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (s. VI, § 1, 6), eindeutig definiert sein, wenn man die Anfangswerte von x_i, y_i und S für $t = \tau(u_1, \ldots, u_n)$ als Funktionen von $(u_1, \ldots, u_n)$ gibt. Diese Anfangsbedingungen sollen nun folgendermaßen lauten:

$$\xi_i(\tau(u_1, \ldots, u_n), u_j) = u_i, \tag{38}$$

$$\eta_i(\tau(u_1, \ldots, u_n), u_j) = \beta_i(u_1, \ldots, u_n), \tag{39}$$

$$\sigma(\tau(u_1, \ldots, u_n), u_j) = s(u_1, \ldots, u_n); \tag{40}$$

hierbei haben die Funktionen $\tau(u_j)$ und $s(u_j)$ dieselbe Bedeutung, wie in (34) und (35), dagegen sollen die $\beta_i(u_j)$ erst später festgelegt werden.

Nach unseren Voraussetzungen über ξ_i, η_i und σ bestehen, wegen (24) und (36), die folgenden Identitäten:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial t} = H_{y_j}(\xi_k, \eta_k, t), \quad \dfrac{\partial \eta_i}{\partial t} = -H_{x_i}(\xi_k, \eta_k, t), \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_j \eta_j H_{y_j}(\xi_k, \eta_k, t) - H(\xi_i, \eta_i, t), \end{cases} \tag{41}$$

oder auch

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_j \eta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial t} - H(\xi_i, \eta_i, t). \tag{42}$$

Differenziert man diese letzte Gleichung partiell nach u_k und berücksichtigt man hierbei die Gl. (41), so erhält man

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_k \partial t} = \sum_j \eta_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial u_k \partial t} + \frac{\partial \eta_j}{\partial t} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}.$$

Diese letzte Gleichung kann aber geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_k} - \sum_j \eta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}\right) = 0; \tag{43}$$

sie besagt, daß die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_k} - \sum_j \eta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} = \lambda_k \tag{44}$$

definierten Funktionen λ_k nur von den $(u_1, \ldots, u_n)$, nicht aber von t abhängen. Wir können sie also berechnen, indem wir $t = \tau(u_1, \ldots, u_n)$ in die linke Seite von (44) einsetzen, und werden gleich sehen, daß man im allgemeinen die noch willkürlich gelassenen Funktionen $\beta_i(u_1, \ldots, u_n)$ so wählen kann, daß sämtliche $\lambda_k = 0$ sind. Unter diesen Umständen transformiert sich aber (44) in

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_k} = \sum_j \eta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}, \tag{45}$$

und falls wir diese Gleichung mit du_k multiplizieren, über k summieren und das Resultat dieser Operation zu der mit dt multiplizierten Gl. (42) hinzufügen, erhalten wir die Relation (30). Wir haben nun gesehen, wie, unter Voraussetzung der Gültigkeit von (30), durch Auflösung der $\xi_j(t, u_k) = x_j$ nach den u_k und Einsetzen der gefundenen Werte in σ eine Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung gefunden werden kann. Es zeigt sich nun, daß diese Lösung den geforderten Anfangsbedingungen (35) genügt. Nach der Definition der Funktionen α_j, die wir in (31) eingeführt haben, folgen nämlich die Identitäten in (t, u_k)

$$u_j = \alpha_j(\xi_i(t, u_k), t).$$

Setzen wir in diese Gleichungen $t = \tau(u_k)$ und berücksichtigen (38), so folgt

$$u_j = \alpha_j(u_i, \tau(u_k)),$$

oder, indem wir lediglich die Bezeichnung ändern,

$$\alpha_j(x_i, \tau(x_1, \ldots, x_n)) = x_j. \tag{46}$$

Setzen wir nun $t = \tau(x_k)$ in (32) und (33) ein, und berücksichtigen (39) und (40), so erhalten wir

$$y_i(x_j, \tau(x_1, \ldots, x_n)) = \eta_i(\tau(x_k), x_j) = \beta_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{47}$$

$$S(x_j, \tau(x_1, \ldots, x_n)) = \sigma(\tau(x_k), x_j) = s(x_1, \ldots, x_n). \tag{48}$$

Die letzte Gleichung ist eine Bestätigung von (36), die vorletzte zeigt, daß die β_i so berechnet werden müssen, daß sie der Bedingung

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_n) = S_{x_i}(x_j, \tau(x_1, \ldots, x_n)) \tag{49}$$

genügen.

8. Bestimmung der Integrationskonstanten. Die obigen Schlüsse sind nur unter den Voraussetzungen gemacht worden, daß einmal alle λ_k in (44) zum Verschwinden gebracht werden können und daß zweitens die Gl. (27) nach den u_k auflösbar sind. Es ist sehr bemerkenswert, daß beide Voraussetzungen immer dann erfüllt werden können, wenn eine und dieselbe, jetzt aufzustellende Bedingung besteht.

Um zunächst die λ_k bei beliebiger Wahl der β_i zu berechnen, bemerken wir, daß (42) nach (38) und (39) für $t = \tau(u_k)$ in

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_j \beta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial t} - H(u_i, \beta_i, \tau) \tag{50}$$

übergeht. Differenziert man nun (38) und (40) partiell nach u_k und bezeichnet man mit δ_{jk} eine Zahl, die für $j \neq k$ gleich Null und für $j = k$ gleich Eins ist, so erhält man die Relationen

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t} \tau_{u_k} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} = \delta_{jk}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tau_{u_k} + \frac{\partial \sigma}{\partial u_k} = s_{u_k}. \tag{52}$$

Andererseits folgt für $t = \tau(u_k)$ aus (44) und (39)

$$\lambda_k = \frac{\partial \sigma}{\partial u_k} - \sum_j \beta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}.$$

Multipliziert man also die Gl. (51) mit $-\beta_j$, summiert über j und addiert man das Resultat gliedweise zu (52), so erhält man unter Berücksichtigung von (50)

$$\lambda_k = s_{u_k} - \beta_k + \tau_{u_k} \cdot H(u_i, \beta_i, \tau). \tag{53}$$

Die Bedingungen für das Verschwinden aller λ_k lauten demnach

$$\beta_k = s_{u_k} + \tau_{u_k} H(u_i, \beta_i, \tau), \tag{54}$$

oder mit Einführung eines Hilfsparameters ϱ

$$\beta_k = s_{u_k} + \varrho\, \tau_{u_k}, \tag{55}$$

$$\varrho = H(u_i, s_{u_i} + \varrho\, \tau_{u_i}, \tau). \tag{56}$$

Diese letzte Gleichung erlaubt ϱ als Funktion der u_i in einem gewissen Bereich zu bestimmen, falls für ein System von Werten $(u_i^0 \varrho^0)$, das (56) befriedigt,

$$1 - \sum_j H^0_{y_j} \tau^0_{u_j} \neq 0 \tag{57}$$

ist. Ist nun ϱ bestimmt, so erhält man die β_k aus den linearen Gl. (55) und hierauf die Richtung der Gefällkurven in den entsprechenden Punkten von $t = \tau$ durch die letzte Gl. (21). Hieraus folgt, daß man (57) auch schreiben kann

$$1 - \sum_j \tau_{x_j} \dot{x}_j \neq 0. \tag{58}$$

Die zweite Bedingung, die wir zu verifizieren haben, die in der Auflösbarkeit des Gleichungssystems (27) nach den u_j besteht, ist immer erfüllt, wenn im betrachteten Punkte von $t = \tau$ die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} \right| \neq 0$$

ist. Nach (51) kann aber diese Funktionaldeterminante geschrieben werden

$$\left| \delta_{ij} - \dot{x}_i \tau_{x_j} \right| \neq 0,$$

und dies ist eine Bedingung, die man durch ganz einfache Determinantentransformationen auf die Form (58) zurückführen kann.

Die Relation (58) besagt, daß die Extremalen unserer Schar die Fläche $t = \tau$ nicht berühren sollen, denn für eine Kurve, die auf dieser Fläche verläuft, ist

$$1 - \sum_j \tau_{x_j} \dot{x}_j = 0.$$

Die Bedingung (58) ist natürlich erfüllt, wenn alle $\tau_{x_j} = 0$ sind, d. h. wenn τ eine Konstante ist; sie sind es aber auch, wenn alle $s_{u_k} = 0$ sind, d. h. wenn die gesuchte Lösung S auf der Fläche $t = \tau$ einen konstanten Wert erhalten soll. Unter dieser Voraussetzung folgt nämlich aus dem Vergleich von (47) mit (54)

$$y_i = \tau_{x_k} \cdot H(x_i, y_i, \tau(x_j)),$$

und wenn man noch (8) heranzieht:

$$H + L = \sum y_i \dot{x}_i = H \cdot \sum \tau_{x_k} \dot{x}_k.$$

Dies kann aber auch geschrieben werden

$$H(1 - \sum_k \tau_{x_k} \dot{x}_k) = -L, \tag{59}$$

und da $L > 0$ angenommen wurde, muß auch die Relation (58) bestehen.

9. Felder von Extremalen. Der Malussche Satz. Wir gehen von folgender Definition aus:

Definition. Eine n-parametrige Schar von Extremalen, die Gefällkurven einer vollständigen Figur sind, nennt man ein **Feld** von Extremalen.

Spezialisiert man die Konstruktion des vorigen Paragraphen dahin, daß man τ konstant, z. B. $\tau = t_0$ setzt, so berechnen sich die β_k nach (54) durch die Gleichungen

$$\beta_i = \frac{\partial s}{\partial u_i}; \tag{60}$$

hieraus folgt, daß die β_i nur für $n = 1$ ganz beliebig gewählt werden können. Für $n > 1$ müssen sie den Bedingungen

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial u_i} = 0 \tag{61}$$

genügen, die für jede Wahl von s aus (60) folgen. Gibt man sich nun durch Gleichungen der Form (37) eine n-parametrige Schar von Extremalen, und genügen die Funktionen $\eta_i(t_0, u_j) = \beta_i(u_j)$ dem Gleichungssystem (61), so kann man bekanntlich eine Funktion $s(u_1, \ldots, u_n)$ finden, für welche das Gleichungssystem (60) befriedigt wird. Die betrachtete Schar von Extremalen bildet dann infolge unserer früheren Ausführungen ein Feld.

Man kann ganz ähnliche Überlegungen für den Fall machen, daß die Funktion $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ nicht konstant ist; die den Gl. (61) entsprechenden Relationen, die man mit Hilfe von (54) ableitet, sind aber dann viel komplizierter.

Wir sehen demnach, daß eine n-parametrige Schar von Extremalen, die ein Stück des Raumes der (x_i, t) einfach überdecken, nur dann ein Feld bilden kann, wenn auf einer Fläche $t = \tau(x_i)$, die die Schar durchsetzt, eine gewisse Bedingung erfüllt ist. Die Integrationstheorie von 7, 8 zeigt nun, daß, wenn die betreffende Bedingung auf einer einzigen Fläche $t = \tau$ gilt, sie auch auf jeder anderen analogen Fläche bestehen muß.

Dieser sehr merkwürdige Satz bildet die naturgemäße Verallgemeinerung auf beliebige Variationsprobleme einer Eigenschaft der Bündel von Lichtstrahlen, die ein optisches Instrument durchsetzen, die E. L. Malus (1775—1812) vor mehr als 120 Jahren in seinem Traité d'optique (1808) aufgestellt hat. Der Malussche Satz besagt, daß, wenn in einem homogenen isotropen Medium ein Bündel von Lichtstrahlen eine Fläche orthogonal schneidet, eine ganze

Schar von Flächen existiert, die dieselbe Eigenschaft besitzen, und zweitens besagt er, daß diese Eigenschaft beim Durchgang des Lichtbündels durch das Instrument erhalten bleibt.

10. Konstruktion eines Feldes, das eine gegebene Extremale enthält. Eine Lösung der kanonischen Differentialgleichungen (24), die durch einen Punkt P^0 hindurchgeht, ist durch die kanonischen Koordinaten x_i^0, t^0, y_i^0 des Linienelements der betrachteten Extremalen, das den Punkt P^0 enthält, eindeutig bestimmt.

Wir berechnen nun $(n+1)$ Konstanten ϱ^0 und α_i durch die Relationen

$$\varrho^0 = H(x_1^0, y_i^0, t^0), \quad y_i^0 = \varrho^0 \alpha_i, \tag{62}$$

und definieren die Funktionen $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ und $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ durch die Gleichungen

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = t^0 + \sum_i \alpha_i (x_i - x_i^0), \quad \sigma(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Wenn wir mit Hilfe dieser Funktionen τ und σ ein Feld von Extremalen nach der Methode **7, 8** konstruieren, so wird dieses Feld die gegebene Extremale in einer gewissen Umgebung des Punktes P^0 enthalten. Denn die Gl. (55) und (56) gehen hier in folgende über:

$$\beta_i = \varrho \alpha_i, \quad \varrho = H(x_i, \varrho \alpha_i, \tau). \tag{63}$$

Die Vergleichung dieser letzten Gleichungen mit (62) zeigt, daß sie im Punkte P^0 durch die Werte

$$\varrho = \varrho^0, \quad \beta_i = y_i^0$$

verifiziert werden, womit, falls wir noch die Schlußbemerkung von **8** berücksichtigen, unsere Behauptung bewiesen ist.

Das so konstruierte Feld ist natürlich nicht das einzige, das unser Extremalenstück enthält: wir hätten z. B. statt $\sigma = 0$ ein beliebiges σ nehmen können, das die Relationen

$$\sigma_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$$

verifiziert.

Es ist sehr wichtig zu bemerken, daß unsere Konstruktion nur in einer gewissen Umgebung von P^0 gültig zu sein braucht: es kann nämlich vorkommen, und kommt auch in vielen Fällen tatsächlich vor, daß, wenn man die Extremalen, die man konstruiert, nicht rechtzeitig abschneidet, sie das Gebiet des Raumes, in welchem sie sich befinden, nicht mehr einfach überdecken.

11. Lösung des Variationsproblems. Die Frage, die wir am Ende des § 1, **1** gestellt haben, kann nunmehr folgendermaßen beantwortet werden:

Erstens konstruieren wir im Raume der $x_1, \ldots, x_n, t$ eine Extremale e_0, die die beiden gegebenen Punkte P' und P'' enthält. Dieses „Randwertproblem" hat in der Regel eine Lösung, denn das allgemeine Integral der kanonischen Differentialgleichungen enthält $2n$ Konstanten, d. h. ebenso viele, wie es Gleichungen zu befriedigen gibt, damit die Extremale die gewünschten Eigenschaften besitzt. Es kann aber vorkommen, wenn z. B. die beiden Punkte P' und P'' nicht nahe genug aneinander sind, daß keine Extremale existiert, die die beiden Punkte verbindet. [Vgl. die Beispiele des § 1, 5 unter c) und d).]

Ist das Randwertproblem gelöst, so müssen wir zweitens versuchen, ein Feld von Extremalen zu konstruieren, das die P' mit P'' verbindende Extremale e_0 sowie die beiden Punkte P' und P'' in seinem Innern enthält. In 7 haben wir ein Feld von Extremalen konstruiert, das eine gegebene Extremale, z. B. e_0, in der Umgebung eines Punktes, z. B. P', enthält. Falls das so konstruierte Feld auch den zweiten Punkt P'' enthält, so haben wir das erreicht, was wir brauchen. Denn unsere Überlegungen des § 2, 7 zeigen uns, daß in diesem Falle das gestellte Problem vollständig gelöst ist.

Die geschilderte Konstruktion ist aber nicht immer ausführbar. In vielen Fällen gibt es auf jeder Extremalen zu jedem Punkte P (in der Richtung der wachsenden t) einen Punkt P_1, den man den ersten konjugierten Punkt von P nennt. Ist nun P_1' der erste konjugierte Punkt von P' auf e_0, so gibt es in der Regel dann, und nur dann, ein Feld von Extremalen, das das Extremalenstück zwischen P' und P'' in seinem Innern enthält, wenn P'' zwischen P' und seinen ersten konjugierten Punkt P_1' fällt. Wenn aber P_1' zwischen P' und P'' enthalten ist, so zeigt man, daß das Extremalenstück e_0 keine Lösung unseres Problems liefert.

Für die Theorie der konjugierten Punkte, die außerhalb des Rahmens dieser Darstellung fällt, verweisen wir auf die Lehrbücher der Variationsrechnung.

§ 4. Einführung krummliniger Koordinaten. Kanonische Transformationen

1. Krummlinige Koordinatentransformation. Es seien

$$x_k = \hat{x}_k(x_1', \ldots, x_n', t'), \quad t = \hat{t}(x_1', \ldots, x_n', t') \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

$(n + 1)$ Funktionen von je $(n + 1)$ Veränderlichen $x_1', \ldots, x_n', t'$, deren Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \hat{t})}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n', t')} \neq 0 \tag{2}$$

ist, wenn der Punkt (x_i', t') in einem gewissen Gebiete des $(n+1)$-dimensionalen Raumes variiert. Durch die Gl. (1) wird dann ein Gebiet G' des Raumes der (x_i', t') auf ein Gebiet G des Raumes der (x_i, t) eineindeutig und stetig abgebildet. Jedes Kurven- oder Flächenstück des einen Raumes wird innerhalb dieser Gebiete auf ein Kurven- oder Flächenstück des anderen abgebildet. Es sei im Raume des (x_i, t) ein Kurvenintegral

$$\int L(x_\varkappa, \dot{x}_\varkappa, t)\, dt \tag{3}$$

gegeben; man kann dann auf direktem Wege eine Funktion $\Lambda(x_\varkappa', \dot{x}_\varkappa', t')$ berechnen, so daß das Kurvenintegral (3) und das Kurvenintegral

$$\int \Lambda(x_\varkappa', \dot{x}_\varkappa', t)\, dt', \tag{4}$$

über entsprechende Kurvenstücke genommen, stets denselben Wert besitzen. In der Formel (4) und in allen folgenden soll hierbei $\dot{x}_i'$ eine Abkürzung für $\frac{dx_i'}{dt'}$ bedeuten.

Man kann sich nun die ziemlich verwickelten Rechnungen, die die Transformation von (3) in (4) erfordert, dadurch ersparen, daß man kanonische Koordinaten benutzt.

Wir betrachten die Hamiltonsche Funktion $H(x_i, y_i, t)$, die zu dem Kurvenintegral (3) gehört, und suchen die Hamiltonsche Funktion $H'(x_i', y_i', t')$ zu bestimmen, die dem Kurvenintegral (4) zugeordnet ist.

Da nach Voraussetzung die beiden Kurvenintegrale auf entsprechenden Kurvenstücken denselben Wert haben sollen, muß jede Schar von Flächen $S(x_i, t) = \lambda$, die für das erste Integral geodätisch äquidistant sind, durch die Transformation (1) in eine Schar $S'(x_i', t') = \lambda$ ebensolcher Flächen für das zweite Integral übergehen. Für die soeben betrachteten Funktionen besteht also die Identität

$$S'(x_i', t') = S(\hat{x}_j, \hat{t}). \tag{5}$$

Nun hat man aber [§ 3, 7, Gl. (26)]

$$dS = \sum_j y_j\, dx_j - H(x_i, y_i, t)\, dt \tag{6}$$

und in den neuen Koordinaten

$$dS' = \sum_j y_j'\, dx_j' - H'(x_i', y_i', t')\, dt'. \tag{7}$$

Aus (5) folgt nun $dS' = dS$, und die beiden letzten Gleichungen liefern hierauf die Relation

$$\sum_j y_j\, dx_j - H(x_i, y_i, t)\, dt = \sum_j y_j'\, dx_j' - H'(x_i'\, y_i', t')\, dt'. \tag{8}$$

Die Gleichung (8) ist allerdings unter der Voraussetzung abgeleitet, daß $y_i = S_{x_i}$ und $y'_i = S'_{x'_i}$ gesetzt wird. Da man aber nach unseren früheren Resultaten die $y_i = S_{x_i}$ in einem vorgegebenen Punkte (x_i^0, t^0) beliebig vorschreiben kann, und immer noch geodätisch äquidistante Flächenscharen finden kann, die in diesem Punkte die gewünschten Werte der S_{x_i} besitzen, muß (8) ganz allgemein gelten.

2. Ausführung der Rechnungen. Die Gl. (8) erlaubt, sowohl $H'(x'_j, y'_j, t')$ als auch die y_i als Funktionen von (x'_j, y'_j, t') zu berechnen.

Hierzu lösen wir die Gl. (1) nach x'_i und t' auf und betrachten die ersten partiellen Differentialquotienten der Funktionen von (x_i, t), die man so erhält, nach den verschiedenen Veränderlichen. In jedem dieser Differentialquotienten ersetze man die Veränderlichen (x_k, t) durch die Funktionen $\hat{x}_k(x'_j, t')$, $\hat{t}(x'_j, t')$. Man erhält auf diese Weise Gleichungen folgender Art:

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \varphi_{ji}(x'_k, t'), \quad \frac{\partial x'_j}{\partial t} = \psi_j(x'_k, t'), \tag{9}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x_i} = \chi_i(x'_k, t'), \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \tau(x'_k, t'). \tag{10}$$

Nimmt man nun in der linken Seite von (8) alle Differentiale bis auf einen gleich Null und berücksichtigt (9) und (10), so erhält man die folgenden Relationen:

$$y_i = \sum_j y'_j \varphi_{ji}(x'_k, t') - H' \cdot \chi_i(x'_k, t'), \tag{11}$$

$$H(\hat{x}_i, y_i, \hat{t}) = -\sum_j y'_j \psi_j(x'_k, t') + H' \cdot \tau(x'_k, t'). \tag{12}$$

Wir setzen die Werte (11) der y_i in die linke Seite von (12) ein und erhalten eine Gleichung, aus der man $H'(x'_i, y'_i, t')$ berechnen kann. Dieser Wert von H', in (11) eingesetzt, liefert endlich die Funktionen $\hat{y}_i(x'_k, y'_k, t')$. Hat man H' berechnet, so kann man mit Hilfe einer Legendreschen Transformation $\Lambda(x'_i, \dot{x}'_i, t')$ finden, indem man setzt:

$$\dot{x}'_i = H'_{y'_i}, \quad \Lambda = -H' + \sum_j y'_j \dot{x}'_j. \tag{13}$$

Diese Rechnungen vereinfachen sich außerordentlich im speziellen Falle, in welchem erstens die Funktionen $\hat{x}_k$ in (1) von t' unabhängig sind und zweitens $t = t'$ ist. In (9) und (10) sind dann die φ_{ij} unabhängig von t', und man hat außerdem

$$\psi_j = 0, \quad \chi_i = 0, \quad \tau = 1. \tag{14}$$

Statt (11) und (12) gelten hier die Gleichungen

$$y_i = \sum_j y'_j \varphi_{ji}(x'_k), \tag{15}$$

$$H(\hat{x}_i, y_i, \hat{t}) = H'(x'_j, y'_j, t); \tag{16}$$

man kann also hier H' berechnen, indem man die Werte (15) der y_i in die linke Seite von (16) einsetzt. Die direkte Berechnung von $\Lambda(x'_k \dot{x}'_k t)$ ist aber jetzt ebenfalls sehr leicht, und man findet

$$\Lambda = L\left(\hat{x}_i, \sum_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x'_j} \dot{x}'_j, t\right). \tag{17}$$

Durch die Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten kann man die Behandlung vieler Probleme der Variationsrechnung und der Mechanik wesentlich vereinfachen, und dies würde schon die letzte Rechnung rechtfertigen. Es zeigt sich aber, daß unsere Überlegungen eine viel größere Tragweite besitzen.

Es ist nämlich eine selbstverständliche Folge unserer Überlegungen, daß die Extremalen der Linienintegrale (3) und (4) durch die Transformation (1) ineinander übergeführt werden. Also werden auch, falls die Gl. (1), (11) und (12) gelten, die Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen $\dot{x}_i = H_{y_i}$, $\dot{y}_i = -H_{x_i}$ in die Lösungen der kanonischen Gleichungen $\dot{x}'_i = H'_{y'_i}$, $\dot{y}'_i = -H'_{x'_i}$ übergehen. Es wird sich nun zeigen, daß diese letzte Eigenschaft eine direkte Folge der Gl. (8) ist, und daß infolgedessen viel allgemeinere Transformationen existieren, die dasselbe leisten, und die man deshalb **kanonisch** nennt.

3. Kanonische Transformationen. Die kanonischen Transformationen werden folgendermaßen definiert: Durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x_i = \hat{x}_i(x'_j, y'_j, t'), \quad y_i = \hat{y}_i(x'_j, y'_j, t'), \quad t = \hat{t}(x'_j, y'_j, t') \\ \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{18}$$

sei eine Transformation des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der x'_j, y'_j, t' in den $(2n+1)$-dimensionalen Raum der x_i, y_i, t gegeben. Diese Transformation soll **kanonisch** heißen, wenn erstens ihre Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_i, y_i, t)}{\partial(x'_j, y'_j, t')} \neq 0 \tag{19}$$

ist, und wenn zweitens drei Funktionen:

$$H'(x'_j, y'_j, t'), \quad H(x_i, y_i, t), \quad \Psi(x_i, y_i, t),$$

existieren, für welche der Ausdruck

$$\sum_j y'_j dx'_j - H'dt' = \sum_i y_i dx_i - H dt + d\Psi \tag{20}$$

vermöge (18) identisch erfüllt ist.

Diese letzte Bedingung bedeutet, daß, wenn man in der rechten Seite von (20) die Differentiale dx_i, dt, $d\Psi$ mit Hilfe von (18) als Funktionen von dx'_j, dy'_j, dt' ausrechnet und überall x_i, y_i, t durch $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{t}$ ersetzt, die Koeffizienten der gleichnamigen Differentiale auf der rechten und der linken Seite von (20) einander gleich sind. Die Gl. (20) stellt also $(2n+1)$ Gleichungen für die ersten partiellen Ableitungen von $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{t}$ nach den x'_j, y'_j, t' dar.

Wir wollen nun zeigen, daß, wenn (18) eine kanonische Transformation ist, jedes Linienelement des Raumes der x_i, y_i, t mit den Koordinaten

$$x_i, y_i, t, \quad dx_i = H_{y_i} dt, \quad dy_i = -H_{x_i} dt$$

vermöge der Transformation in ein Linienelement des zweiten Raumes mit den Koordinaten

$$x'_j, y'_j, t', \quad dx'_j = H'_{y'_j} dt', \quad dy'_j = -H'_{x'_j} dt'$$

übergeht.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die x'_j, y'_j, t' als Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen u, v. Durch die Gl. (18) werden dann die x_i, y_i und t ebenfalls als Funktionen derselben Größen definiert. Ferner führen wir folgende Bezeichnung ein: Ist $f(u, v)$ eine beliebige Funktion der beiden Parameter u und v, so soll

$$\frac{\partial f}{\partial u} du = df \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v} dv = \delta f$$

gesetzt werden. Insbesondere ist dann

$$d\delta f = \delta d f = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du\, dv.$$

Wir betrachten nun zunächst den Differentialausdruck

$$dA = \sum_i y_i dx_i - H dt, \tag{21}$$

wobei zu bemerken ist, daß dA einfach eine symbolische Bezeichnung für die rechte Seite von (21) ist und also im allgemeinen kein totales Differential einer Funktion bedeutet. Auf diesen Ausdruck üben wir die Operation δ aus und erhalten

$$\delta d A = \sum_i (\delta y_i d x_i - H_{x_i} \delta x_i dt - H_{y_i} \delta y_i dt + \cdots); \tag{22}$$

hierbei haben wir diejenigen Glieder nicht hingeschrieben, die, wie $y_i \delta d x_i$ oder $H_t \delta t\, dt$, bei Vertauschung der beiden Symbole d und δ ihren Wert nicht ändern. Vertauschen wir nun in (22) die Symbole d und δ und ziehen die so erhaltene neue Gleichung von der ersten ab, so können wir schreiben:

$$\delta d A - d \delta A = \sum_i \{(\delta y_i d x_i - d y_i \delta x_i) - H_{x_i}(\delta x_i dt - d x_i \delta t) \\ - H_{y_i}(\delta y_i dt - d y_i \delta t)\},$$

und durch Umstellung der Glieder:

$$(23) \quad \begin{cases} \delta d A - d \delta A = \sum_i \{\delta y_i (d x_i - H_{y_i} dt) - \delta x_i (d y_i + H_{x_i} dt) \\ \qquad + \delta t (H_{x_i} d x_i + H_{y_i} d y_i)\}. \end{cases}$$

Wir bemerken nun, daß wir schreiben können:

$$(H_{x_i} d x_i + H_{y_i} d y_i) = \frac{1}{dt}(H_{x_i} d x_i dt + H_{y_i} d y_i dt)$$

oder weiter

$$(H_{x_i} d x_i + H_{y_i} d y_i) = \frac{1}{dt}(H_{x_i} d x_i dt + H_{y_i} d y_i dt + d x_i d y_i - d x_i d y_i) \\ = \frac{d x_i}{dt}(d y_i + H_{x_i} dt) - \frac{d y_i}{dt}(d x_i - H_{y_i} dt).$$

Statt der Relation (23) können wir also schreiben:

$$\delta d A - d \delta A = \sum_i \left\{\left(\delta y_i - \frac{d y_i}{dt}\delta t\right)(d x_i - H_{y_i} dt) \\ - \left(\delta x_i - \frac{d x_i}{dt}\delta t\right)(d y_i + H_{x_i} dt)\right\}.$$

Üben wir genau dieselbe Umformung auf den Ausdruck

$$d A' = \sum_j y'_j d x'_j - H' dt$$

aus und bemerken, daß, weil $d\Psi$ ein totales Differential ist, $\delta d \Psi - d \delta \Psi = 0$ sein muß, so erhalten wir schließlich als Folge der Gl. (20)

$$(24) \quad \begin{cases} \sum_j \left(\delta y'_j - \frac{d y'_j}{dt'}\delta t'\right)(d x'_j - H'_{y'_j} dt') - \left(\delta x'_j - \frac{d x'_j}{dt'}\delta t'\right)(d y'_j + H'_{x'_j} dt') \\ = \sum_i \left(\delta y_i - \frac{d y_i}{dt}\delta t\right)(d x_i - H_{y_i} dt) - \left(\delta x_i - \frac{d x_i}{dt}\delta t\right)(d y_i + H_{x_i} dt), \end{cases}$$

d. h. eine Relation, die die Funktion Ψ nicht mehr enthält.

4. Ausführung der Gleichungen. Die Gl. (24) gilt allgemein, wenn man für die x_j', y_j', t' beliebige Funktionen von u und v einsetzt; demnach ist sie nur eine Abkürzung für die $(2n+1)$ Relationen, die man erhält, wenn man unter den Größen

$$\delta y_j', \quad \delta x_j', \quad \delta t'$$

nur eine beibehält und alle übrigen verschwinden läßt. Auf diese Weise bekommen wir nacheinander die Gleichungen

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} dx_j' - H'_{y_j'}\,dt' &= \sum_i \left\{\left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial y_j'} - \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial y_j'}\right)(dx_i - H_{y_i}\,dt)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y_j'} - \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial y_j'}\right)(dy_i + H_{x_i}\,dt)\right\}, \\ dy_j' + H'_{x_j'}\,dt' &= \sum_i \left\{-\left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x_j'} - \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial x_j'}\right)(dx_i - H_{y_i}\,dt)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j'} - \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial x_j'}\right)(dy_i + H_{x_i}\,dt)\right\} \end{aligned}\right.$$

und zuletzt

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_j (H_{x_j'}\,dx_j' + H_{y_j'}\,dy_j') &= \sum_i \left\{\left(\frac{\partial \hat{y}_i}{dt'} - \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial t'}\right)(dx_i - H_{y_i}\,dt)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t'} - \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \hat{t}}{\partial t'}\right)(dy_i + H_{x_i}\,dt)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Diese letzte Gleichung ist aber eine Folge der früheren; multipliziert man in der Tat die erste Gl. (25) mit dy_j', die zweite dieser Gleichungen mit $-dx_j'$, addiert die Ergebnisse, summiert über j und addiert zu dieser Summe die mit dt' multiplizierte Gl. (26), so erhält man eine Identität. Hieraus folgt, daß man die Relation (24) schon aus den Gl. (25) allein ableiten kann.

Aus den Gl. (25) folgt nun die Behauptung von **3**, daß bei einer kanonischen Transformation die kanonischen Gleichungen

$$(27)\qquad \dot{x}_i = H_{y_i}, \qquad \dot{y}_i = -H_{x_i}$$

wieder in kanonische Differentialgleichungen, nämlich in

$$(28)\qquad \dot{x}_i' = H'_{y_i'}, \qquad \dot{y}_i' = -H'_{x_i'},$$

transformiert werden. Wenn nämlich die Gl. (27) gelten, so verschwinden die rechten Seiten von (25), und diese Gleichungen besagen dann, daß die Relationen (28) erfüllt sind.

Bemerkung. Die Relation (24) oder, was dasselbe ist, die Gl. (25) kann ebensogut wie (20) als Definition der kanonischen Transformation angesehen werden. Setzt man nämlich rein formal

$$d\Psi = \sum_j y'_j dx'_j - H' dt' - \sum_i y_i dx_i + H dt$$

und bildet wie früher den Ausdruck $(\delta d\Psi - d\delta\Psi)$, so muß dieser Ausdruck verschwinden, weil die Gl. (24) erfüllt ist. Die Bedingung $\delta d\Psi = d\delta\Psi$ besagt aber, daß der Ausdruck $d\Psi$ ein vollständiges Differential ist.

5. Geometrische Betrachtung. In § 3, 1 hatten wir die Punkte des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der x_i, t, y_i den Linienelementen x_i, t, $\dot{x}_i$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten x_i, t mit Hilfe der Gleichungen $\dot{x}_i = H_{y_i}$ einander zugeordnet. Ebenso können wir, indem wir die Gleichungen $\dot{x}'_i = H'_{y'_i}$ hinzuziehen, jedem Punkte des Raumes der x'_i, t', y'_i ein Linienelement des $(n+1)$-dimensionalen Raumes der x'_i, t' entsprechen lassen.

Eine kanonische Transformation kann dann aufgefaßt werden als eine Transformation der Linienelemente des Raumes der x_i, t in die Linienelemente des Raumes der x'_i, t'.

Wir betrachten nun einparametrige Scharen von Linienelementen, die durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(u), \qquad t = t(u), \qquad \dot{x}_i = \dot{x}_i(u)$$

definiert werden, wobei der Parameter durch u bezeichnet wird. Eine derartige Schar nennt man einen Elementverein, wenn die Gleichungen

$$\frac{dx_i}{du} = \dot{x}_i(u)\frac{dt}{du} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{29}$$

sämtlich erfüllt sind. Die Gesamtheit der Linienelemente, die eine Kurve berühren oder durch einen festen Punkt des Raumes gehen, bilden Elementvereine.

Wir suchen nun nach denjenigen Elementvereinen des ersten Raumes, die bei unserer kanonischen Transformation wieder in Elementvereine transformiert werden.

Wir haben nach (29) diejenigen Linienelemente zu bestimmen, für welche, vermöge der gegebenen kanonischen Transformation, die Relationen

$$dx'_j - H'_{y'_j} dt' = 0 \quad \text{und} \quad dx_i - H_{y_i} dt = 0 \tag{30}$$

gleichzeitig alle gelten.

Nach der ersten der Gl. (25) müssen dann die Relationen

$$(31)\qquad \sum_i \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y_j'} - H_{y_i}\frac{\partial \hat{t}}{\partial y_j'}\right)(dy_i + H_{x_i}dt) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sein. Im allgemeinen Falle, in dem die $(n+1)$-reihige Determinante

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial y_j'} & H_{y_i} \\ \dfrac{\partial \hat{t}}{\partial y_j'} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, folgen aus (31) die Relationen $dy_i + H_{x_i}dt = 0$. Dies besagt, daß die Extremalen die einzigen Elementvereine sind, die allgemein in ebensolche übergeführt werden.

Nur in speziellen Fällen ist eine kanonische Transformation, wenn man sie als Transformation von Linienelementen des $\mathfrak{R}_{n+1}$ auffaßt, eine solche, die jeden Elementverein wieder in einen Elementverein transformiert.

Dies ist z. B. der Fall für die kanonische Transformation, die wir in 1, 2 studiert haben[1]).

6. Spezielle kanonische Transformationen. Wir legen uns die Frage vor, ob es feste Transformationen des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der x_i, y_i, t in den Raum der x_i', y_j', t' gibt, die für jede beliebige Wahl der Funktion $H(x_i, y_i, t)$ bei geeigneter Wahl von $H'(x_j', y_j', t')$ und von Ψ der Bedingung (20) genügen. Falls wir Ψ als Funktion der Veränderlichen x_j', y_j', t' mit Ψ' bezeichnen, so ist die Gl. (20) nur eine Abkürzung für die $(2n+1)$ folgenden Gleichungen:

$$(33)\qquad \begin{cases} y_j' = \sum_i y_i \dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j'} - H\dfrac{\partial \hat{t}}{\partial x_j'} + \dfrac{\partial \Psi'}{\partial x_j'}, \\ 0 = \sum_i y_i \dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial y_j'} - H\dfrac{\partial \hat{t}}{\partial y_j'} + \dfrac{\partial \Psi'}{\partial y_j'} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

und

$$(34)\qquad -H' = \sum_i y_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t'} - H\frac{\partial \hat{t}}{\partial t'} + \frac{\partial \Psi'}{\partial t'}.$$

Nach Voraussetzung muß, wenn y_i, x_i, t vorgegebene Funktionen von x_j', y_j', t' sind, zu jeder Funktion H eine Funktion Ψ' gefunden

---

[1]) Dies folgt nicht nur aus unseren damaligen Rechnungen, sondern auch sofort aus der ersten der Gl. (25), deren rechte Seite identisch verschwindet; denn die Funktionen $\hat{x}_i(x_j' y_j' t')$, $\hat{t}(x_j', y_j', t')$ hängen in diesem Falle nicht von den y_j' ab.

werden können, für welche die Gl. (33) erfüllt sind. Die Gleichungen müssen also erfüllt bleiben, wenn man H durch $H + \lambda(x'_j, y'_j, t')$ ersetzt und Ψ' in geeigneter Weise modifiziert — z. B. durch $\Psi' + \mu$ ersetzt. Dann müssen aber die Gleichungen

$$\lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial x'_j} = \frac{\partial \mu}{\partial x'_j}, \quad \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y'_j} = \frac{\partial \mu}{\partial y'_j}$$

alle erfüllt sein. Aus diesen Gleichungen folgt insbesondere, wenn man μ durch Differentiation eliminiert,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x'_p} \frac{\partial \hat{t}}{\partial y'_q} = \frac{\partial \lambda}{\partial y'_q} \frac{\partial \hat{t}}{\partial x'_p} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

für alle p, q und für jede Funktion λ. Setzt man nun der Reihe nach in diese Gleichungen $\lambda = x'_p$, $\lambda = y'_q$ und $p, q = 1, 2, \ldots, n$, so sieht man, daß alle Ableitungen $\frac{\partial \hat{t}}{\partial x'_j}$ und $\frac{\partial \hat{t}}{\partial y'_j}$ verschwinden müssen.

Ist dies aber umgekehrt der Fall, so kann man die Gl. (33) durch folgende Relation ersetzen:

$$(35) \qquad \sum_j y'_j\, dx'_j = \sum_i y_i \left(d x_i - \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t'} dt'\right) + \left(d\Psi' - \frac{\partial \Psi'}{\partial t'} dt'\right),$$

und es ist dann in der Tat für jedes H die Relation (20) erfüllt, falls man H' durch die Gl. (34) definiert.

Ein speziellerer, aber in den Anwendungen immer wiederkehrender Fall ist der, in dem die kanonische Transformation sich nicht auf die Variable t erstreckt. In diesem Falle hat man $2n$ Funktionen $\hat{x}_i(x'_j, y'_j)$, $\hat{y}_i(x'_j, y'_j)$, die der aus (35) entspringenden Gleichung

$$(36) \qquad \sum_j y'_j\, dx'_j = \sum_i y_i\, dx_i + d\Psi$$

genügen; statt (34) hat man dann einfach zu schreiben

$$(37) \qquad H'(x'_j, y'_j, t) = H(x_i, y_i, t).$$

7. Beispiele. a) Wir setzen $n = 1$ und suchen nach einer kanonischen Transformation von der Form $x = x'^{\alpha} \cos \beta y'$, $y = x'^{\alpha} \sin \beta y'$, in der α und β Konstanten bedeuten. Wir erhalten zunächst die Relation

$$y\,dx - y'\,dx' = \left(\frac{\alpha}{2} x'^{2\alpha - 1} \sin 2\beta y' - y'\right) dx' + \frac{\beta}{2} x'^{2\alpha} (\cos 2\beta y' - 1)\, dy'.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist dann und nur dann ein totales Differential, wenn die Gleichung

$$\alpha\beta x'^{2\alpha - 1} \cos 2\beta y' - 1 = \alpha\beta x'^{2\alpha - 1} (\cos 2\beta y' - 1)$$

oder kürzer $\alpha\beta x'^{2\alpha-1} = 1$ identisch erfüllt ist; dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 2$ ist.

Wir bekommen auf diese Weise die kanonische Transformation

$$x = \sqrt{x'} \cos 2y', \qquad y = \sqrt{x'} \sin 2y', \tag{38}$$

die H. Poincaré (1854—1912) gefunden und wiederholt in der Himmelsmechanik benutzt hat.

b) Setzt man in (36)

$$\Psi = \sum_j (y'_j x'_j - y_j x_j) - \Omega(x_i, y_i),$$

so transformiert sich diese Gleichung in folgende:

$$\sum_j x'_j dy'_j = \sum_i x_i dy_i + d\Omega, \tag{39}$$

die ebenfalls eine kanonische Transformation darstellt, bei welcher die Relation (37) weiterhin gilt. Jede kanonische Transformation (36) kann auf die Form (39) gebracht werden.

c) Um in der Himmelsmechanik die Singularitäten zu behandeln, die bei einem Zusammenstoß der sich anziehenden Körper entstehen würden, oder auch nur um die Bewegungen dieser Körper zu meistern, falls sie sehr nahe aneinanderrücken und die Geschwindigkeiten groß werden, hat neuerdings T. Levi-Civita folgende kanonische Transformation eingeführt:

Wir setzen

$$y_i = \frac{y'_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y'^2_i} \tag{40}$$

und suchen die x_i als Funktionen der x'_i, y'_i so zu bestimmen, daß die Gl. (39), in der wir die willkürliche Funktion $\Omega \equiv 0$ setzen, erfüllt sei. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Gleichungen

$$x_i = \sum_j x'_j \frac{\partial y'_j}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{41}$$

erfüllt sind.

Nun stellt aber (40) eine Transformation durch reziproke Radien des n-dimensionalen Raumes der y_i dar. Setzen wir also

$$R = \sum_i y_i^2, \qquad R' = \sum_j y'^2_j, \tag{42}$$

so folgt aus (40):

$$RR' = 1, \qquad y'_j = \frac{y_j}{R}. \tag{43}$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir nun, falls wir mit δ_{ij} eine Zahl darstellen, die für $i \neq j$ verschwindet und für $i = j$ gleich Eins ist:

$$\frac{\partial y'_j}{\partial y_i} = \frac{1}{R}\delta_{ij} - \frac{y_j}{R^2} 2 y_i,$$

oder mit Benutzung von (43)

$$\frac{\partial y'_j}{\partial y_i} = R'\delta_{ij} - 2 y'_j y'_i.$$

Diese letzte Gleichung liefert, in (41) eingesetzt, mit der Bezeichnung

$$S' = \sum_j x'_j y'_j, \tag{44}$$

die Relation

$$x_i = x'_i R' - 2 y'_i S'. \tag{45}$$

Die Gl. (40) und (45) bestimmen unsere kanonische Transformation, die birational und vollständig symmetrisch ist. Setzt man nämlich

$$S = \sum_i x_i y_i, \tag{46}$$

so folgt aus (45) mit Benutzung von (43)

$$\begin{aligned} S &= R' \sum_i x'_i y_i - 2 S' \sum_i y'_i y_i, \\ &= R' . R S' - 2 S', \\ &= - S'. \end{aligned}$$

Aus (45) folgt ferner

$$\begin{aligned} R . x_i &= x'_i R R' - 2 R y'_i S', \\ &= x'_i + 2 y_i S, \end{aligned}$$

und daher

$$x'_i = x_i . R - 2 y_i S, \tag{47}$$

d. h. eine Gleichung, die genau dieselbe Gestalt hat wie die Gl. (45).

8. Spezieller Fall. Für den Fall, daß die kanonische Transformation die spezielle Gestalt (36) besitzt, ist die Bedingung (19), daß die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x'_j} & \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y'_j} \\ \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x'_j} & \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial y'_j} \end{vmatrix} \tag{48}$$

von Null verschieden ist, von selbst erfüllt. Man kann nämlich leicht zeigen, daß in diesem Falle stets $D^2 = 1$ ist[1]). Dazu bemerken wir, daß die Gl. (25) sich hier außerordentlich vereinfachen: erstens weil die Gleichungen

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial y'_j} = 0, \quad \frac{\partial \hat{t}}{\partial x'_j} = 0$$

gelten, zweitens weil $dt = dt'$ ist und endlich, weil aus (37) folgt:

$$H'_{y'_j} = \sum_i H_{x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y'_j} + H_{y_i} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial y'_j},$$

$$H'_{x'_j} = \sum_i H_{x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x'_j} + H_{y_i} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x'_j}.$$

Statt (25) kann man also einfach schreiben

$$(49) \quad dx'_j = \sum_i \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial y'_j} dx_i - \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y'_j} dy_i, \quad dy'_j = \sum_i - \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x'_j} dx_i + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x'_j} dy_i.$$

Die Determinante dieser linearen Gleichungen ist aber nach den Eigenschaften der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial (x'_j, y'_j)}{\partial (x_i, y_i)} = \frac{1}{D};$$

und man hat also

$$(50) \qquad \frac{1}{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial y'_j}, & -\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial y'_j} \\ -\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x'_j}, & \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x'_j} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante rechter Hand bleibt unverändert, wenn man sie an der Hauptdiagonale spiegelt und ihre n letzten Zeilen und hierauf ihre n letzten Kolonnen mit -1 multipliziert. Ebenso bleibt die modifizierte Determinante unverändert, wenn man die n letzten Kolonnen mit den n ersten und die n letzten Zeilen mit den n ersten vertauscht. Hieraus folgt aber, wenn man vorher (50) mit (48) vergleicht,

$$\frac{1}{D} = D,$$

d. h. die Relation, die wir beweisen wollten.

Der Wert der kanonischen Transformationen liegt darin, daß man in vielen Fällen die kanonischen Differentialgleichungen des

---

[1]) Es ist sogar möglich, zu beweisen, daß $D = 1$ ist; der Beweis dieser letzten Tatsache ist aber komplizierter.

transformierten Problems leichter integriert als die des ursprünglich gegebenen. Hat man aber dies getan, so kann man leicht mit Hilfe der Transformation auf die ursprünglichen Koordinaten zurückkommen. Die erste und berühmteste Anwendung der kanonischen Transformationen ist die Integrationsmethode von K. G. Jacobi (1804—1851), die wir jetzt auseinandersetzen wollen.

9. Jacobische Integrationsmethode. In § 3, 7 haben wir gesehen, wie man die Integration der Jacobi-Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung auf die Integration der kanonischen Differentialgleichungen zurückführen kann. Jacobi hat nun umgekehrt gezeigt, daß man die Kenntnis einer n-parametrigen Schar von Lösungen der partiellen Differentialgleichung $S_t + H(x_i, S_{x_i}, t) = 0$ oder auch der allgemeineren partiellen Differentialgleichung $S_t + H(x_i, S_{x_i}, t) =$ konst. benutzen kann, um die kanonischen Differentialgleichungen zu integrieren.

Wir nehmen an, daß wir eine Funktion $S(x_i, t, \alpha_j)$ von $(n+1)$ Veränderlichen x_i, t und von n Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kennen, die folgende beiden Eigenschaften besitzt:

1. Funktionaldeterminante

$$|S_{x_i \alpha_j}| \neq 0. \tag{51}$$

2. Die gegebene Funktion S genügt identisch der partiellen Differentialgleichung

$$S_t + H(x_i, S_{x_i}, t) = \varphi(\alpha_j), \tag{52}$$

in der $\varphi(\alpha_j)$ eine beliebige Funktion der α_j allein bedeutet, die eventuell auch identisch Null sein kann.

Das totale Differential von S lautet nun

$$dS = \sum_{i,j} (S_{x_i} dx_i + S_{\alpha_j} d\alpha_j) + S_t dt$$

oder, wegen (52),

$$dS = \sum_{i,j} (S_{x_i} dx_i + S_{\alpha_j} d\alpha_j) + [\varphi(\alpha_k) - H] dt. \tag{53}$$

Nun betrachten wir die Transformation, die aus den Gleichungen

$$y_i = S_{x_i}, \quad y'_j = -S_{\alpha_j}, \quad x'_j = \alpha_j, \quad H' = \varphi(\alpha_k), \quad t' = t \tag{54}$$

entsteht. Diese Transformation ist kanonisch; denn erstens kann man, wegen (51), mit Hilfe der drei ersten Gl. (54) sowohl die x_i, y_i, t als Funktionen von x'_j, y'_j, t' als auch diese letzten Größen als Funktionen der ersten berechnen. Die Funktionaldeterminante der Transformation ist also von Null verschieden, was man übrigens auch

durch eine direkte Rechnung verifizieren kann. Und zweitens folgt aus (53) und (54)

$$dS = \left(\sum_i y_i dx_i - H dt\right) - \left(\sum_j y'_j dx'_j - H' dt'\right), \tag{55}$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nach **3, 4** werden also die kanonischen Differentialgleichungen $\dot{x}_i = H_{y_i}$, $\dot{y}_i = -H_{x_i}$ in den neuen Veränderlichen folgendermaßen lauten:

$$\dot{x}'_j = H'_{y'_j}, \quad \dot{y}'_j = -H'_{x'_j}; \tag{56}$$

nun ist aber H' Funktion der x'_j allein. Die ersten Gl. (56) lauten also $\dot{x}'_j = 0$, oder integriert

$$x'_j = \alpha_j,$$

wo jetzt die α_j Konstanten bedeuten. Und die zweite Gleichung lautet $\dot{y}'_j = -\varphi_{\alpha_j} =$ konst., oder integriert

$$y'_j = -\varphi_{\alpha_j} \cdot t + \beta_j, \tag{57}$$

wobei die β_j neue Konstanten bedeuten.

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen kanonischen Differentialgleichungen als Funktion von t und von $2n$ Konstanten α_j, β_j erhält man also mit Hilfe der Gl. (54), indem man erstens die x_i als Funktionen dieser Größen aus den Gleichungen

$$S_{\alpha_j}(x_i, \alpha_k, t) - \varphi_{\alpha_j} \cdot t + \beta_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{58}$$

berechnet und zweitens die so berechneten Werte von x_i in die Gleichungen

$$y_i = S_{x_i}(x_j, \alpha_k, t) \tag{59}$$

einsetzt.

10. Das Prinzip der Berechnung der Störungen der Planetenbahnen. Wir nehmen an, daß die Hamiltonsche Funktion die Gestalt habe

$$H(x_i, y_i, t) + \lambda H_1(x_i, y_i, t); \tag{60}$$

ferner nehmen wir an, daß wir die Jacobische Integrationsmethode des letzten Paragraphen auf das Problem anwenden können, das entsteht, wenn wir in (60) den Parameter $\lambda = 0$ setzen.

Wir wenden die kanonische Transformation (54) auf unsere Hamiltonsche Funktion (60) an. Falls wir mit Hilfe dieser Transformation H_1 als Funktion der neuen Veränderlichen berechnen und mit $H'_1(x'_j, y'_j, t')$ bezeichnen, so können wir statt (55) schreiben:

$$dS = \left(\sum_i y_i dx_i - (H + \lambda H_1) dt\right) - \left(\sum_j y'_j dx'_j - (H' + \lambda H'_1) dt'\right),$$

und unsere kanonischen Differentialgleichungen lauten in den neuen Koordinaten, wenn man bemerkt, daß sämtliche $H'_{y'_i} = 0$ sind,

$$(61) \qquad \dot{x}'_j = \lambda \frac{\partial H'_1}{\partial y'_j}, \quad \dot{y}'_j = \varphi_{\alpha_j}(x'_i) - \lambda \frac{\partial H'_1}{\partial x'_j}.$$

Wenn man nun in diese Gleichungen die Größen x'_j und y'_j als Potenzreihen in λ ansetzt,

$$(62) \qquad \begin{cases} x'_j = \alpha_j + \lambda x'_{j_1} + \lambda^2 x'_{j_2} + \cdots, \\ y'_j = \beta_j - t \cdot \varphi_{\alpha_j} + \lambda y'_{j_1} + \lambda^2 y'_{j_2} + \cdots, \end{cases}$$

und auf beiden Seiten die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von λ einander gleichsetzt, so entsteht eine Folge von Differentialgleichungen, die man nacheinander mit Hilfe von Quadraturen integrieren kann.

Dies ist die Methode, die in der theoretischen Astronomie seit mehr als hundert Jahren benutzt wird, um die Störungen der Planeten zu berechnen. Die Funktion H_1 wird hierbei die Störungsfunktion genannt. Der große Erfolg, den dieser Ansatz in der Himmelsmechanik gehabt hat, rührt davon her, daß die Größenordnung von λ ungefähr die des Verhältnisses der Planeten- zur Sonnenmasse ist, also etwa 10^{-3} für den größten der Planeten, Jupiter. Wegen der Kleinheit des Parameters λ genügt dann schon die Berechnung der ersten zwei oder drei Glieder der Reihen (62), um die tatsächliche Bewegung der Himmelskörper mit großer Genauigkeit darzustellen.

§ 5. Variationsprobleme von Doppelintegralen

1. Stellung des Problems. Variationsprobleme, in welchen mehrfache Integrale vorkommen, können entweder mit der Methode des § 1 oder auch mit einer Methode, die der des § 2 nachgebildet ist, behandelt werden. Wir wollen diese letzte Methode für den einfachsten Fall eines Doppelintegrals im dreidimensionalen Raume kurz besprechen.

Es seien (x, y, z) die rechtwinkligen Koordinaten des Raumes. Ist eine Fläche

$$(1) \qquad z = z(x, y)$$

gegeben, so wird die Richtung der Flächennormale in jedem Punkte der betrachteten Fläche durch einen Vektor mit den Komponenten $(p, q, -1)$ gegeben, der durch die Gleichungen

$$(2) \qquad p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

definiert wird.

Geben wir uns nun eine positive Funktion von fünf Veränderlichen $L(x, y, z, p, q)$, so wird durch das über ein Gebiet G der xy-Ebene genommene Doppelintegral

$$J = \iint_G L(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \tag{3}$$

wenn wir für z, p, q die Werte aus (1) und (2) einsetzen, jeder Fläche (1) ein bestimmter Wert zugeordnet. Wir halten nun G fest und betrachten die Gesamtheit der z. B. analytischen Flächen (1), die eine feste Raumkurve enthalten, die sich auf dem Rande γ von G projiziert. Es wird gefragt, ob unter diesen Flächen mindestens eine existiert, für welche J einen möglichst kleinen Wert besitzt.

Wir werden eine etwas anders geartete Fragestellung untersuchen, deren Beantwortung in hinreichend allgemeinen Fällen die Lösung des oben gestellten Problems enthält. Es wird sich nämlich zeigen, daß unter gewissen, sehr allgemeinen Voraussetzungen Flächen $z = z(x, y)$ existieren, die für alle Punkte (x, y), die innerhalb eines Gebietes H der xy-Ebene liegen, definiert sind und folgende Eigenschaft besitzen: es sei G ein Gebiet der xy-Ebene, das mit seinem Rande γ im Innern von H liegt; diese Kurve γ, von der wir annehmen, daß sie analytisch ist und keine Doppelpunkte enthält, ist die Projektion auf der xy-Ebene einer Kurve C, die auf der Fläche $z = z(x, y)$ liegt. Für jedes dieser Gebiete G hat dann das Integral (3) einen kleineren Wert für unsere Fläche $z = z(x, y)$ als für eine andere Fläche $z = \bar{z}(x, y)$, die ebenfalls von der Kurve C begrenzt wird.

2. Die Minimalflächen. Setzt man

$$L = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \tag{4}$$

so stellt das Integral (3) den Flächeninhalt eines Stückes der krummen Fläche $z = z(x, y)$ dar und die Flächen, die im vorliegenden Falle eine Lösung des zuletzt skizzierten Problems darstellen, werden **Minimalflächen** genannt. Wir denken uns ein Stück des Raumes der (x, y, z) mit einer zweiparametrigen Schar von Kurven einfach überdeckt. Wir nehmen nun an, daß diese Kurvenschar derart gewählt worden ist, daß, wenn man unendlich dünne Röhren betrachtet, deren Wände durch lauter Kurven der Schar gebildet werden, der senkrechte Querschnitt jeder dieser Röhren in allen Punkten der Röhre konstant bleibt. Außerdem soll ein Flächenstück F_0 existieren, das durch die Kurven unserer Schar senkrecht geschnitten wird. *Dann ist F_0 notwendig eine Minimalfläche.* Es sei nämlich C irgendeine geschlossene Kurve auf F_0, die keine Doppelpunkte besitzt, und F sei ein beliebiges Flächenstück, das durch C begrenzt wird und ganz in dem-

jenigen Teile des Raumes liegt, der durch unsere Kurvenschar überdeckt wird. Um die Betrachtungen zu vereinfachen, nehmen wir ferner an, daß die Kurven unserer Schar, die F treffen, diese Fläche durchsetzen, ohne sie zu berühren. Der Inhalt von F kann nun berechnet werden, indem man die Durchschnitte von F mit den unendlich dünnen Röhren konstanten Querschnitts betrachtet und die Integration über alle diese Durchschnitte vollzieht. Diese Durchschnitte können aber nie kleiner sein als die senkrechten Querschnitte der betrachteten Röhren; nun ist aber der Inhalt desjenigen Teiles von F_0, der durch C begrenzt wird, gerade gleich dem Integral über die senkrechten Querschnitte derselben Röhren, die F durchsetzen, und man sieht also, daß dieser Teil von F_0 eine kleinere Oberfläche besitzt als F. Die Fläche F_0 muß also eine Minimalfläche sein.

3. Kurvenscharen konstanten geodätischen Querschnitts. Wir wollen den soeben skizzierten Gedanken auf das Variationsproblem (3) übertragen, von dem ja das Problem der Bestimmung von Minimalflächen nur ein spezieller Fall ist. Eine beliebige zweiparametrige Kurvenschar des Raumes der (x, y, z) kann durch das Gleichungssystem

$$(5)\qquad \begin{cases} S(x,y,z) = \lambda, \\ T(x,y,z) = \mu \end{cases}$$

dargestellt werden. Wir schneiden dieses Kurvensystem durch eine Fläche

$$(6)\qquad z = z(x,y);$$

durch Einsetzen dieses Wertes von z in (5) erhält man

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda = S(x,y,z(x,y)) = \sigma(x,y), \\ \mu = T(x,y,z(x,y)) = \tau(x,y). \end{cases}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen berechnen wir die Funktionaldeterminante

$$(8)\qquad \Delta = \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} S_x + S_z z_x, & S_y + S_z z_y \\ T_x + T_z z_x, & T_y + T_z z_y \end{vmatrix};$$

wenn wir die Gl. (2) benutzen und noch die Bezeichnungen

$$(9)\qquad P = S_z T_y - S_y T_z, \quad Q = S_x T_z - S_z T_x, \quad R = S_y T_x - S_x T_y$$

einführen, kann man an Stelle von (8) schreiben:

$$(10)\qquad \Delta = P \cdot p + Qq - R.$$

Man übersieht leicht, daß, wenn in einem Punkte (x, y, z) der Ausdruck $\Delta = 0$ ist, dieses besagt, daß in diesem Punkte die Fläche (6) von einer Kurve unserer Schar berührt wird; wir können also wegen

unserer Annahme, daß das Kurvensystem unsere Fläche durchsetzt, $\varDelta \neq 0$ nehmen, und, indem wir eventuell S durch $-S$ ersetzen, sogar

$$\varDelta > 0 \tag{11}$$

wählen.

Das Doppelintegral (3), in welchem noch nach Voraussetzung die Funktion $L > 0$ sein soll, kann nun geschrieben werden, wenn wir (λ, μ) unter Benutzung von (7) als unabhängige Variablen einführen und mit Γ ein geeignetes Gebiet der $\lambda\mu$-Ebene bezeichnen:

$$J = \iint_\Gamma L \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)} d\lambda\, d\mu = \iint_\Gamma \frac{L}{\varDelta} d\lambda\, d\mu. \tag{12}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck $L(x, y, z, p, q) : \varDelta(x, y, z, p, q)$ bei festgehaltenen (x, y, z) als Funktion von p und q allein und sagen, daß die Fläche (6) durch unsere Kurvenschar (5) im betrachteten Punkte transversal geschnitten wird, wenn p und q so gewählt worden sind, daß $L : \varDelta$ ein Minimum ist. Die Werte von p, q, für welche dies stattfinden kann, werden durch die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{L}{\varDelta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q} \frac{L}{\varDelta} = 0,$$

oder wenn man noch den Ausdruck (10) von $\varDelta$ und die Relation (11) berücksichtigt, durch die Gleichungen

$$\varDelta . L_p - L . P = 0, \quad \varDelta L_q - L Q = 0 \tag{13}$$

berechnet. Sind für zwei Zahlen p_1, q_1 die Ausdrücke $|p_1 - p|$ und $|q_1 - q|$ hinreichend klein, so muß außerdem, mit den Bezeichnungen

$$L_1 = L(x, y, z, p_1, q_1), \quad \varDelta_1 = P . p_1 + Q q_1 - R, \tag{14}$$

die Relation

$$\frac{L_1}{\varDelta_1} - \frac{L}{\varDelta} \geqq 0 \tag{15}$$

bestehen. Da nun unter unseren Voraussetzungen $\varDelta_1 > 0$ ist, kann man (15) durch die Bedingung

$$L_1 - \frac{\varDelta_1}{\varDelta} L = L_1 - L - \frac{\varDelta_1 - \varDelta}{\varDelta} L \geqq 0$$

ersetzen und diese ganz ähnlich wie in § 2, 4 transformieren; man findet wieder, daß die E-Funktion

$$E(x, y, z, p, q, p_1, q_1) = L_1 - L - (p_1 - p) L_p - (q_1 - q) L_q \geqq 0 \tag{16}$$

sein muß.

Man sieht nun ganz ähnlich wie früher (vgl. § 2, 5), daß die unendlich dünnen Röhren, die durch die Kurven der Schar (5) gebildet werden, konstanten geodätischen Querschnitt haben, falls die Bedingung $L = \Delta$ gleichzeitig mit (13) erfüllt ist. Dies alles ergibt mit Berücksichtigung von (10) ein Gleichungssystem

$$(17) \qquad P = L_p, \quad Q = L_q, \quad R = -L + pL_p + qL_q,$$

das dem Gleichungssystem (17) des § 2 sehr ähnlich ist.

4. Nachweis der Minimumseigenschaft. Wir nehmen nun an, daß wir sieben Ortsfunktionen S, T, P, Q, R, p, q kennen, für welche die Gl. (9) und (17) sämtlich gelten. Wir betrachten ein ganz beliebiges Flächenstück $\mathfrak{F}_1$, das durch die Gleichung

$$(18) \qquad z = z_1(x, y)$$

definiert wird; wir setzen

$$(19) \qquad p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}, \quad L_1 = L(x, y, z_1, p_1, q_1)$$

und betrachten das Integral

$$(20) \qquad \mathfrak{J} = \iint\limits_G L_1\, dx\, dy,$$

wobei G die Projektion des Flächenstücks $\mathfrak{F}_1$ auf der xy-Ebene bedeutet. Die Kurven der Schar (5), die das Flächenstück $\mathfrak{F}_1$ durchsetzen, entsprechen Parameterwerten (λ, μ), die in der $\lambda\mu$-Ebene ein Gebiet Γ ausfüllen. Wir setzen nun

$$(21) \qquad A = \iint\limits_\Gamma d\lambda\, d\mu$$

und bemerken, daß der Wert von A nur von Γ abhängt, und daß dieses Gebiet Γ für alle Flächenstücke (18), die von derselben Randkurve C begrenzt werden, dasselbe sein muß. Andererseits kann man (21) umformen, indem man (x, y) als unabhängige Veränderliche einführt. Die Gl. (8) bis (10), in welche man z_1, p_1, q_1 statt z, p, q setzt, zeigen, daß man

$$(22) \qquad A = \iint\limits_G \big(P(x, y, z_1)\, p_1 + Q(x, y, z_1)\, q_1 - R(x, y, z_1)\big)\, dx\, dy$$

setzen muß. Endlich folgt, falls man (22) von (20) abzieht und die Gl. (17) und die Definition (16) der E-Funktion beachtet,

$$(23) \qquad \mathfrak{J} - A = \iint\limits_G E\, dx\, dy.$$

Die Kurvenschar (5) braucht nun keineswegs ein Flächenstück transversal zu schneiden. Für den Fall aber, daß ein Flächenstück $\mathfrak{F}_0$

existiert, für welches dies zutrifft, so zeigt die vorige Überlegung, wenn man mit J den Wert von (3) längs $\mathfrak{F}_0$ bezeichnet, daß $J = A$ ist; denn in der der Gl. (23) entsprechenden Relation muß ja E identisch verschwinden. Es ist also auch

$$\mathfrak{J} - J = \iint_G E\,dx\,dy, \tag{24}$$

wobei E dieselbe Bedeutung wie in (23) besitzt. Aus $E \geqq 0$ folgt dann z. B. $\mathfrak{J} \geqq J$ für alle Flächen $\mathfrak{F}_1$, deren Begrenzung mit der von $\mathfrak{F}_0$ zusammenfällt. Es bleibt also noch zu zeigen, wie man $\mathfrak{F}_0$ und die Ortsfunktionen S, T, P, Q, R, p, q bestimmen kann.

5. Die Eulerschen Differentialgleichungen und das Extremalenfeld. Aus den Gl. (9) folgt durch Differentiation

$$P_x + Q_y + R_z = 0. \tag{25}$$

Dafür also, daß die Gl. (9) eine Lösung besitzen, ist notwendig, daß die Divergenz des Vektorfeldes, dessen Komponenten P, Q, R sind, verschwinde. Umgekehrt beweist man in der Vektorrechnung, daß die Bedingung (25) auch hinreichend ist dafür, daß die Gl. (9) eine gemeinsame Lösung in S, T besitzen.

Setzt man nun in (17) die Größen p und q als Ortsfunktionen von (x, y, z) ein, so hat man

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x} L_p, \quad Q_y = \frac{\partial}{\partial y} L_q, \quad R_z = -L_z + p\frac{\partial L_p}{\partial z} + q\frac{\partial L_q}{\partial z}; \tag{26}$$

hierbei sind L_p, L_q und L als Funktionen von (x, y, z) anzusehen. Auf einer Fläche $z = z(x, y)$, die von der Kurvenschar (5) transversal geschnitten wird, bestehen nun die Gleichungen

$$p = z_x(x, y), \quad q = z_y(x, y).$$

Setzt man diese Werte von z, p, q in L_p, L_q und L_z ein, so entstehen Funktionen von (x, y) allein, die wir mit (L_p), (L_q), (L_z) bezeichnen wollen. Man hat nun

$$\frac{\partial (L_p)}{\partial x} = \frac{\partial L_p}{\partial x} + p\frac{\partial L_p}{\partial z}, \quad \frac{\partial (L_q)}{\partial y} = \frac{\partial L_q}{\partial y} + q\frac{\partial L_q}{\partial z} \tag{27}$$

und $L_z = (L_z)$. Hieraus folgt, in Verbindung mit (25) und (26), für unsere Extremalfläche die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial (L_p)}{\partial x} + \frac{\partial (L_q)}{\partial y} - (L_z) = 0, \tag{28}$$

die die Eulersche Differentialgleichung des Problems genannt wird.

Hat man umgekehrt eine von einem Parameter α abhängende Schar von Extremalflächen

$$z = z(x, y, \alpha), \tag{29}$$

die ein Stück des Raumes der (x, y, z) einfach überdecken, so kann man mit Hilfe dieser letzten Gleichung, die man nach α auflöst,

$$p = z_x(x, y, \alpha), \quad q = z_y(x, y, \alpha)$$

als Funktionen von (x, y, z) berechnen. Setzt man diese Werte $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ in (17) ein, so erhält man P, Q, R als Funktionen von (x, y, z), und eine nicht sehr verwickelte Rechnung zeigt, unter Benutzung der Tatsache, daß (29) eine Lösung der Differentialgleichung (28) ist, daß die Divergenz (25) von P, Q, R verschwinden muß. Die Überlegungen von **4** können also in diesem Falle angewandt werden.

6. Beispiel der Minimalflächen. Für das Variationsproblem, das wir in **2** betrachten, dessen Extremalen Minimalflächen sind, lautet die partielle Differentialgleichung (28)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = 0,$$

oder in entwickelter Gestalt

$$(1 + z_y^2) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy} = 0.$$

In der Flächentheorie zeigt man, daß alle Flächen, die dieser Gleichung genügen, u. a. dadurch charakterisiert werden können, daß ihre mittlere Krümmung verschwindet, oder auch dadurch, daß die sphärische Abbildung durch parallele Normalen bis auf gewisse isolierte singuläre Punkte eine konforme Abbildung der Fläche liefert.

H. A. Schwarz hat gezeigt (Ges. Abh., Bd. I, S. 224), daß die Konstruktion eines Feldes von Extremalflächen immer in der Umgebung eines Stückes einer Minimalfläche möglich ist, dessen sphärisches Bild im Innern einer Halbkugel eingeschlossen werden kann.

Lehrbücher der Variationsrechnung

1. A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn A.-G.), 2. Aufl., 1925.
2. O. Bolza, Lectures on the calculus of variations. Chicago 1904.
3. Derselbe, Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1908/09.

4. J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Tome I. Paris (Hermann) 1910.
5. L. Tonelli, Fundamenti del calcolo delle variazioni. Bologna (Zanichelli), Vol. I, 1922, Vol. II, 1923.
6. G. A. Bliss, Calculus of variations. Chicago 1925.

Außerdem zur Theorie der kanonischen Transformation:

1. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (herausgegeben von A. Clebsch). 2. Aufl. Berlin 1884. (Supplementband zu Jacobis Werken.)
2. G. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des surfaces. Bd. II., Paris (Gauthier-Villars), 2. éd., 1915.
3. H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste. Paris, 2. éd., 1912.
4. E. T. Whittaker, A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge (University Press), 3. ed., 1927.
5. Derselbe, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Nach der 2. Aufl. übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten Scheid. Berlin (Springer) 1924.

II. Abschnitt

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sechstes Kapitel

Anfangswertprobleme

§ 1. Allgemeine Untersuchungen

1. Vorläufiger Überblick. Eine „gewöhnliche“ Differentialgleichung schreibt einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Ableitungen einer gesuchten Funktion, den Funktionswerten selbst und den unabhängigen Variablen vor; also z. B.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Eine Differentialgleichung, welche Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich enthält, heißt eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. Aufgabe einer Theorie der Differentialgleichungen ist es, die Werte und Eigenschaften der Funktionen zu bestimmen, die einer vorgelegten Differentialgleichung genügen.

Jede gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist einem System von n Differentialgleichungen erster Ordnung gleichwertig. Zum Beispiel ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

da man für y' eine neue Bezeichnung, etwa z, einführen kann, gleichbedeutend mit dem System der zwei Gleichungen

$$f(x, y, y', z') = 0, \quad y' - z = 0.$$

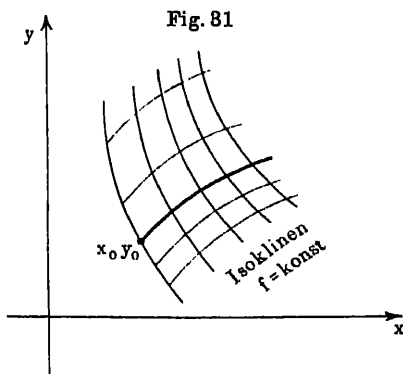
So wird man naturgemäß dazu geführt, auch Systeme von Gleichungen erster Ordnung der Betrachtung zu unterwerfen.

Die wichtige Frage nach den Bedingungen, unter welchen Differentialgleichungen überhaupt Lösungen besitzen, wollen wir hier nicht in voller Allgemeinheit erörtern, sondern uns damit begnügen, gewisse genügend allgemeine Bedingungen aufzusuchen, deren Zutreffen die Existenz von Lösungen sicherstellt.

Um über die voraussichtliche Fassung des zu beweisenden Satzes Klarheit zu gewinnen, geben wir zunächst eine geometrische Deutung der Differentialgleichungen erster Ordnung. Man wird x und y als rechtwinklige Cartesische Koordinaten und damit y' als Richtungstangens der Kurventangenten auffassen. Dann ordnet eine Differentialgleichung erster Ordnung, die wir in der Form

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

mit eindeutigem $f(x, y)$ schreiben dürfen[1]), jedem Punkte x, y die Richtung zu, unter der die gesuchte Lösungskurve diesen Punkt passieren soll (Richtungsfeld). Ein spezieller hierher gehöriger Fall ist schon von der Aufgabe der Integralrechnung, y aus $y' = f(x)$ zu bestimmen, geläufig. Ähnlich wie dort kann man sich leicht zeichnerisch eine vorläufige Vorstellung von dem Verlaufe der Lösungskurven von (1) machen. Man zeichnet dazu die „Isoklinen", das sind die Linien $f(x, y) = c =$ konst., deren Punkte also von jeder Integralkurve in der gleichen Richtung durchlaufen werden. (Bei $y' = f(x)$ sind die Isoklinen die Vertikalen $x =$ konst.)

Fig. 31

Diese Kurven bestimmt man für irgendeine Auswahl der Konstanten c und beginnt dann in einem bestimmten Punkte x_0, y_0 mit der Konstruktion, indem man durch diesen Punkt in der durch (1) vorgeschriebenen Richtung eine Gerade legt und diese bis zur nächsten Isokline verfolgt. Dort zieht man eine Gerade in der dort vorgeschriebenen Richtung und verfolgt diese wieder bis zur nächsten Isokline usw. (vgl. Fig. 31). Man gewinnt so die Vermutung, daß man bei Verfeinerung dieses Verfahrens, d. h. bei immer dichterer Wahl der benutzten Isoklinen, der wirklichen Lösung mit der Zeichnung beliebig nahe kommen könnte und daß demnach eine gewöhnliche Differentialgleichung durch jeden Punkt genau eine Lösung hindurchsendet.

Um diese Vermutung als richtig zu erweisen, müssen wir neben der schon genannten Stetigkeit der Funktion $f(x, y)$ noch die so-

---

[1]) Die etwa nötige Auflösung nach y' denken wir uns also bewerkstelligt und somit gegebenenfalls unter den verschiedenen, durch eine Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ einem Punkte (x, y) zugeordneten Richtungen eine ausgewählt. $f(x, y)$ werde als stetig angenommen.

genannte „Lipschitzbedingung“ als erfüllt voraussetzen: Es soll nämlich eine positive Zahl K geben, derart, daß für jedes Punktepaar (x, y_1), (x, y_2) des zugrunde gelegten Bereiches die Abschätzung

$$(2) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K|y_1 - y_2|$$

gilt. Das ist eine Bedingung, die im Falle der gewöhnlichen Quadratur von selbst erfüllt ist, weil hier f von y nicht abhängt. Die geometrische Bedeutung von (2) ist die: Denkt man sich die Fläche $z = f(x, y)$ parallel zur y, z-Ebene durch Ebenen geschnitten, so dürfen die Sehnenrichtungen dieser Schnittkurven nicht beliebig nahe an die z-Achse herankommen.

2. Existenz von Lösungen. Integration durch Näherungsfolgen. Wir wollen nun den besprochenen Existenzsatz genau formulieren und beweisen. **Hauptsatz.** In der Differentialgleichung (1) sei $f(x, y)$ in einem gegebenen beschränkten Bereich B der x, y-Ebene stetig und genüge für jedes dem Bereich angehörige Wertepaar (x, y_1) und (x, y_2) der Lipschitzschen Bedingung (2), wo K eine passende positive Zahl ist. In B gelte ferner

$$(3) \qquad |f(x, y)| < M;$$

es seien weiter x_0, y_0 Koordinaten eines in B gelegenen Punktes und das Rechteck

$$(4) \qquad |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b, \quad \text{wo} \quad b > aM,$$

gehöre noch dem Bereich B an; dann gibt es genau eine, samt ihrer ersten Ableitung in $|x - x_0| < a$ stetige Funktion $y = \varphi(x)$, die der Differentialgleichung (1) genügt, für die also $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$ gilt, und die zugleich durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, so daß $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

Zum Beweise dieses Satzes bedient man sich am besten der Methode der Näherungsfolgen (sukzessiven Approximationen), die in der Algebra vielfach verwendet wird.

Die Näherungsfolgen bilden, wie ihr Name sagt, eine schrittweise Annäherung an die gesuchte Lösung, so daß wir zugleich mit dem Existenzbeweis ein Verfahren zur tatsächlichen Lösung der Differentialgleichung auseinandersetzen. Der Verlauf des Verfahrens ist ein ganz ähnlicher wie bei der Auflösung algebraischer Gleichungen: Man betrachtet die Konstante $y = y_0$ als erste Annäherung an die gesuchte Lösung. Dann bestimmt man eine neue Näherung y_1 durch die Bedingung, daß

$$(5) \qquad \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0)$$

sein soll. Natürlich hat man y_1 überdies so zu bestimmen, daß $y_1(x_0) = y_0$ ist. Das liefert

$$(5') \qquad y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi.$$

Darauf bestimmt man eine neue Näherung y_2 aus

$$(6) \qquad y_2' = f(x, y_1), \quad \text{also} \quad y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1)\, d\xi.$$

So fährt man fort und bestimmt rekurrent y_n durch die Gleichung

$$(7) \qquad y_n' = f(x, y_{n-1}), \quad \text{also} \quad y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1})\, d\xi.$$

Wie wir gleich beweisen werden, konvergiert die so gefundene Funktionenfolge

$$(8) \qquad y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

in $|x - x_0| < a$ gleichmäßig gegen eine der Bedingung $|y - y_0| \leqq b$ genügende Grenzfunktion $y = \varphi(x)$, die ihrerseits der Differentialgleichung genügt. Der Nachweis der Einzigkeit dieser Lösung ergibt sich leicht hinterher.

Wir schreiten nun zum Konvergenzbeweis und schätzen zu diesem Zwecke die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Näherungen ab. Man findet aus (5') wegen (3) und (4)

$$(9) \qquad |y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi\right| \leqq M|x - x_0| < Ma < b.$$

Man kann daher wegen (4) das y_1 in $f(x, y)$ einsetzen und findet weiter

$$(10) \qquad \begin{cases} |y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, y_1) - f(\xi, y_0)]\, d\xi\right| < \left|\int_{x_0}^{x} K|y_1 - y_0|\, d\xi\right| \\ \qquad \leqq MK\left|\int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi\right| = \dfrac{MK|x - x_0|^2}{2}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus der zweiten Gl. (6)

$$(11) \qquad |y_2 - y_0| \leqq M|x - x_0| < Ma < b$$

und man darf somit y_2 in $f(x, y)$ einsetzen. So fortfahrend findet man allgemein

$$(12) \qquad \begin{cases} |y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, y_{n-1}) - f(\xi, y_{n-2})]\, d\xi\right| \\ \qquad < \left|\int_{x_0}^{x} K|y_{n-1} - y_{n-2}|\, d\xi\right| < M \cdot K^{n-1}\left|\int_{x_0}^{x} \dfrac{|\xi - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi\right| \\ \qquad = \dfrac{MK^{n-1}|x - x_0|^n}{n!} < \dfrac{M}{K}\,\dfrac{(Ka)^n}{n!}. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich allgemein aus der zweiten Gl. (7)

$$|y_n - y_0| < M|x - x_0| < Ma < b, \tag{13}$$

so daß man also y_n in $f(x, y)$ eintragen und das Verfahren weiter fortsetzen kann. Die Reihe

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots \tag{14}$$

konvergiert nun aber in $|x - x_0| < a$ absolut und gleichmäßig. Denn die absoluten Beträge der Reihenglieder sind ja nach (12) kleiner als die Glieder der konvergenten Reihe

$$|y_0| + \frac{M}{K} \cdot Ka + \frac{M}{K} \cdot \frac{K^2 a^2}{2!} + \cdots + \frac{M}{K} \cdot \frac{K^n a^n}{n!} + \cdots.$$

Da aber die Teilsummen der Reihe (14) gerade $y_0, y_1, y_2, \cdots$ sind, so existiert der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} y_n(x)$ in $|x - x_0| < a$ gleichmäßig und die Grenzfunktion $y = \varphi(x)$ ist eine stetige Funktion.

Nun bleibt noch zu beweisen, daß $\varphi(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Daß nämlich $\varphi(x_0) = y_0$ ist, geht schon aus unserer Konvergenzbetrachtung hervor. Aus

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = \varphi(x) \quad \text{folgt} \quad \lim_{n \to \infty} f[x, y_n(x)] = f[x, \varphi(x)] \tag{15}$$

und auch dieser Grenzübergang erfolgt gleichmäßig, wie sich ohne weiteres aus der Lipschitzschen Bedingung ergibt. Man hat daher

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f[\xi, y_n(\xi)]\, d\xi = \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi(\xi)]\, d\xi. \tag{16}$$

Aus

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, y_{n-1}(\xi)]\, d\xi \tag{17}$$

und (15) und (16) ergibt sich aber weiter

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi(\xi)]\, d\xi, \tag{18}$$

also

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]. \tag{19}$$

Daher ist $\varphi(x)$ wirklich die gesuchte Lösung. Der Hauptsatz ist damit bewiesen bis auf die Bemerkung, daß die gefundene Lösung die einzige ist, die an der Stelle x_0 den Wert y_0 annimmt.

Es seien $y(x)$ und $Y(x)$ zwei Lösungen, für die $y(x_0) = Y(x_0)$. Es sei μ das Maximum von $|y(x) - Y(x)|$ in $|x - x_0| \leqq \frac{1}{2K}$. Dieses werde bei $x = x_1$ angenommen. Nun ist

$$y(x_1) - Y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} (f(\xi, y) - f(\xi, Y))\, d\xi, \tag{20}$$

also

$$\mu = |y(x_1) - Y(x_1)| \leqq K \int_{x_0}^{x_1} |y - Y|\, d\xi \leqq \frac{\mu \cdot K}{2K} = \frac{\mu}{2}. \tag{21}$$

Aus $0 \leqq \mu \leqq \frac{\mu}{2}$ folgt aber $\mu = 0$. Also ist $y(x) = Y(x)$ in $|x - x_0| \leqq \frac{1}{2K}$. Mehrmalige Anwendung dieser Überlegung lehrt, daß in jedem Intervall $y(x) = Y(x)$ ist. Damit ist gezeigt, daß es nur eine Lösung zu gegebener Anfangsbedingung gibt.

Bemerkung 1. Die in den Voraussetzungen des Hauptsatzes genannte Lipschitzbedingung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn $f(x, y)$ in B eine stetige partielle Ableitung nach y besitzt. Denn in $|x - x_0| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$ liegt diese dem Betrag nach unter einer Schranke K. Der Mittelwertsatz lehrt alsdann, daß (2) gilt.

Bemerkung 2. Unsere Überlegung enthält gleichzeitig noch Aufschluß über die durch die Funktion $y = y_n(x)$ an $y = \varphi(x)$ erreichte Annäherung. Es ist nämlich

$$\left\{\begin{aligned} |\varphi(x) - y_n(x)| &\leqq |y_{n+1} - y_n| + |y_{n+2} - y_{n+1}| + \cdots \\ &\leqq \frac{M}{K} \frac{K^{n+1} a^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{M}{K} \frac{K^{n+2} a^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Diese Reihe schätzt man am besten mit Hilfe des Lagrangeschen Restgliedes der Taylorschen Reihe für $e^{Ka} M/K$ ab. So findet man

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leqq \frac{M}{K} \frac{(Ka)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta K a}, \tag{23}$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl ist. Daher hat man schließlich

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leqq \frac{M}{K} \cdot \frac{(Ka)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Ka}. \tag{24}$$

3. Komplexe Variable. Unser Satz gilt auf Grund des gegebenen Beweises nicht allein für reelle x und y, sondern auch im komplexen Gebiet. Dann lautet er so: Wenn $f(x, y)$ in (4) eine analytische Funktion (III, § 1, 3) der beiden komplexen Variablen x und y ist, wenn ferner in diesem Bereiche (3) gilt, dann gibt es

genau eine in $|x-x_0|<a$ analytische Funktion $y=\varphi(x)$, die für $x=x_0$ den Wert y_0 annimmt und die für $|x-x_0|<a$ der Differentialgleichung (1) genügt.

Um den in 2 dargelegten Beweis anwendbar zu machen, hat man nur zu überlegen, daß die Lipschitzsche Bedingung hier immer erfüllt ist. Dies folgt daraus, daß

$$\frac{f(x, y_1)-f(x, y_2)}{y_1-y_2}$$

eine für $|x-x_0|\leqq a$, $|y_1-y_0|\leqq b$, $|y_2-y_0|\leqq b$ analytische Funktion der drei Variablen x, y_1, y_2 ist, deren absoluter Betrag also in diesem Bereiche eine gewisse Schranke nicht übertrifft. Nun bleibt der ganze Beweisgang unverändert bestehen und er läßt auch die Einzigkeit der Lösung erkennen. Eines Zusatzes bedarf nur noch die neue Behauptung, die gefundene Lösung sei in $|x-x_0|<0$ analytisch. Das folgt aber einfach daraus, daß alle Näherungen $y_n(x)$ analytisch sind und daß eine gleichmäßig konvergente Reihe analytischer Funktionen eine analytische Funktion darstellt (vgl. S. 152). Nach bekannten Sätzen kann man diese in eine nach Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende, in $|x-x_0|<a$ konvergente Reihe entwickeln. Die Koeffizienten dieser Reihe kann man dann leicht nach der „Methode der unbestimmten Koeffizienten" berechnen. Ist z. B.

$$f(x,y)=\sum a_{\mu\nu}(x-x_0)^\mu(y-y_0)^\nu, \tag{25}$$

so setze man mit unbestimmten Koeffizienten an

$$Y(x)=y_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots. \tag{26}$$

Dann soll also sein:

$$\left\{\begin{aligned} c_1+2c_2(x-x_0)+\cdots &= a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(c_1(x-x_0)+\cdots) \\ &\qquad +a_{20}(x-x_0)^2+a_{11}(x-x_0)(c_1(x-x_0)+\cdots) \\ &\qquad +a_{02}(c_1(x-x_0)+\cdots)^2+\cdots \\ &= a_{00}+(x-x_0)(a_{10}+a_{01}c_1) \\ &\qquad +(x-x_0)^2(a_{01}c_2+a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2)+\cdots. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Der Koeffizient von $(x-x_0)^n$ ist hier eine ganze rationale Funktion von $c_1, c_2 \ldots c_n$, während auf der linken Seite $(n+1)\,c_{n+1}$ als Koeffizient von $(x-x_0)^n$ auftritt. Sollen die beiden Potenzreihen links und rechts übereinstimmen, so folgt $c_1=a_{00}$, $c_2=\frac{1}{2}(a_{10}+a_{01}c_1)$ und allgemein $c_{n+1}=$ ganze rationale Funktion von $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Daher lassen sich hiernach die unbestimmten Koeffizienten c_i rekurrent berechnen.

4. Stetigkeit der Lösung bei Änderung der Gleichung. Wir kehren zum reellen Gebiet zurück. Das Verfahren der Näherungsfolgen läßt auch leicht den Einfluß erkennen, den eine Abänderung der Differentialgleichung, also eine Änderung der Funktion $f(x, y)$ auf die Lösung besitzt. Man braucht dazu nur das Verfahren wieder durchzugehen und bei jedem einzelnen Schritt sich Rechenschaft von dem Einfluß der Änderung zu geben. Man findet so folgendes Ergebnis: Für zwei Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ mögen die im Hauptsatz S. 282 ausgesprochenen Annahmen erfüllt sein. Weiter sei in B $|f(x, y) - g(x, y)| < \delta$. Sind dann $y(x)$ und $Y(x)$ Lösungen von $y' = f(x, y)$ und $Y' = g(x, Y)$, für die $y(x_0) = Y(x_0)$ ist, so ist

$$|y(x) - Y(x)| < \delta |x - x_0| e^{K|x - x_0|}.$$

Es sei insbesondere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \tag{28}$$

vorgelegt. Dann hängt nach dem eben Gesagten die durch $y(x_0) = y_0$ fixierte Lösung stetig von μ ab, falls $f(x, y, \mu)$ stetig von μ abhängt. Aber noch mehr: Wenn in der Differentialgleichung (28) die rechte Seite eine stetige Funktion der drei Variablen x und y und μ ist, wenn sie außerdem stetige partielle Ableitung erster Ordnung nach diesen drei Variablen besitzt, solange x, y auf einen Bereich B, der Parameter μ auf ein Intervall (oder im Falle eines komplexen Parameters auf einen Kreis) $|\mu - \mu_0| < \varrho$ beschränkt bleibt, so ist die durch die Bedingung $\varphi(x_0) = y_0$ festgelegte Lösung der Differentialgleichung (28) eine stetige mit stetiger erster Ableitung nach μ versehene Funktion von μ.

Zum Beweis bilde man den nach μ genommenen Differenzenquotienten auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{dy(x, \mu)}{dx} = f[x, y(x, \mu), \mu]. \tag{29}$$

Man erhält

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x, \mu + \Delta\mu) - y(x, \mu)}{\Delta\mu}\right) = \frac{f[x, y(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu] - f[x, y(x, \mu)\,\mu]}{\Delta\mu}.$$

Dafür kann man kurz schreiben[1])

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu}\right) &= \frac{\partial f(x, y + \vartheta\Delta y, \mu + \vartheta\Delta\mu)}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta\mu} \\ &\quad + \frac{\partial f(x, y + \vartheta\Delta y, \mu + \vartheta\Delta\mu)}{\partial\mu} \quad (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

---

[1]) Im Falle eines komplexen Parameters entwickle man statt dessen nach Potenzen von Δy und $\Delta\mu$.

Das ist also eine Differentialgleichung für den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta \mu}$, eine Gleichung, deren Koeffizienten noch stetig von dem in die Lösung eingehenden Parameter $\Delta \mu$ abhängen. Für $\Delta \mu \to 0$ gehen die Koeffizienten der Differentialgleichung stetig in die der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y,\mu)}{\partial y} z + \frac{\partial f(x,y,\mu)}{\partial \mu} \tag{31}$$

über. Die Betrachtungen von S. 287 lehren daher, daß die bei $x = x_0$ verschwindende Lösung von (30) bei diesem Grenzübergang $\Delta \mu \to 0$ stetig in die bei $x = x_0$ verschwindende Lösung von (31) übergeht. Daher besitzt $\frac{\Delta y}{\Delta \mu}$ für $\Delta \mu \to 0$ einen Grenzwert und somit ist die bei $x = x_0$ der Bedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genügende Lösung von (28) eine differenzierbare Funktion von μ.

Aus unserem allgemeinen Stetigkeitssatz ergibt sich nun auch unmittelbar die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen. Wir vergleichen miteinander die beiden durch die Punkte (x_0, y_0) und $(x_0 + h, y_0 + k)$ gehenden Lösungen der Differentialgleichung (1). Ich führe in (1) durch die Substitution

$$x_1 = x - h, \quad y_1 = y - k \tag{32}$$

neue Variable x_1 und y_1 ein. Dadurch geht die Differentialgleichung (1) in

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x_1 + h, y_1 + k) \tag{33}$$

über. Diejenige Lösung von (1), welche bei $x_0 + h$ den Wert $y_0 + k$ annimmt, geht in diejenige Lösung von (33) über, welche für $x_1 = x_0$ den Wert $y_1 = y_0$ annimmt. So handelt es sich also beim Vergleich der beiden Lösungen von (1) um den Vergleich zweier Lösungen von (1) und von (33), die beide für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmen. Diese Aufgabe ist aber vorher (S. 287) schon erledigt worden. Ebenso leicht läßt sich mit den hier dargelegten Methoden beweisen, daß die Lösungen als Funktionen von y_0 (oder von x_0) differenzierbar sind. In den Betrachtungen von S. 287 hat man nur y_0 als Parameter μ zu betrachten — der allerdings nicht explizite in (29) eingeht $\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0\right)$ — und dann hat man (31) mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = 1$ zu integrieren. Denn der Differenzenquotient $\frac{(\Delta y)_0}{\Delta (y_0)} = \frac{\Delta y_0}{\Delta y_0}$

ist ja immer Eins. Ganz analog erkennt man bei Übergang zu $\frac{dx}{dy}$ die Differenzierbarkeit nach x_0 bei festem y_0.

Für den Fall, daß $f(x, y, \mu)$ eine analytische (differenzierbare) Funktion des komplexen Parameters μ und von x, y ist, folgt nach unserem Satze, daß auch die Lösung $y(x)$ eine analytische Funktion des Parameters μ ist. Man kann sie also, wenn μ_0 irgendein Wert des Parameters ist, nach Potenzen von $\mu - \mu_0$ entwickeln. Es ist von Interesse, noch anzugeben, wie man die Koeffizienten dieser Entwicklung ermitteln kann. Man setze an:

$$y = y_0(x) + y_1(x)(\mu - \mu_0) + \cdots.$$

Es ist dann

$$f(x, y, \mu) = f(x, y_0, \mu_0) + f_1(x, y_0, y_1)(\mu - \mu_0) + \cdots.$$

Hier ist z. B.

$$f_1(x_1, y_0, y_1) = y_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, y_0, \mu_0).$$

Dann muß sein:

$$y_0'(x) + y_1'(x)(\mu - \mu_0) + \cdots = f(x, y_0, \mu_0) + f_1(x, y_0, y_1)(\mu - \mu_0) + \cdots.$$

Also ist

$$y_0'(x) = f(x, y_0, \mu_0),$$
$$y_1'(x) = f_1(x, y_0, y_1).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hierbei sind als Anfangsbedingungen zu fordern:

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_2(x_0) = \cdots = 0.$$

Denn für $x = x_0$ soll bei beliebigem μ immer $y(x_0) = y$ sein. Die Koeffizienten der Entwicklung lassen sich also ihrerseits wieder durch Integration gewisser Differentialgleichungen ermitteln. Die für y_1 sich ergebende lineare Differentialgleichung wird vielfach mit dem Namen „équation à variation" bezeichnet.

5. Numerische und zeichnerische Auflösung. Unsere Betrachtungen enthalten nun auch den Beweis dafür, daß das zu Beginn des Paragraphen skizzierte zeichnerische Verfahren bei genügend enger Wahl der Isoklinen gute Annäherung an die Lösung der Differentialgleichung liefern muß. Denn man kann in vielen Fällen sagen, das bei der Zeichnung entstehende Polygon, dessen Ecken auf den Isoklinen liegen, stelle die genaue Lösung derjenigen Differentialgleichung dar, die allen zwischen zwei Isoklinen gelegenen Punkten dieselbe Richtung zuordnet. Dies Richtungsfeld wird aber bei genügend enger Wahl der Isoklinen von dem gegebenen Richtungsfeld nur wenig abweichen, und also wird nach unserem Stetigkeitssatz das Polygon von der gewünschten Lösung

nur wenig abweichen. Diese Methode, die wir nur skizziert haben, ist natürlich mancher Verbesserungen fähig [1]).

Dieser zeichnerischen Methode stellen sich noch mancherlei andere Methoden der praktischen Integration an die Seite. Der Grundgedanke solcher Rechenregeln ist kurz dieser: Man sucht eine Annäherung an die bei x_0 den Wert y_0 besitzende Lösung von (1) in der Form

$$y_0 + h\{f(x_0, y_0) + f(x_0 + \alpha_1, y_0 + \beta_1) + \cdots\} \tag{34}$$

zu gewinnen und wünscht namentlich die Stellen $(x_0 + \alpha_i, y_0 + \beta_i)$ so zu wählen, daß möglichst viele Glieder in der Entwicklung der Näherung nach Potenzen von h mit den entsprechenden Gliedern in der Entwicklung von $y(x_0 + h)$ nach Potenzen von h übereinstimmen. Das nach diesem Grundgedanken bisher am besten brauchbare Verfahren von Runge und Kutta [2]) ist dieses: Man erhält Übereinstimmung bis einschließlich zu den Gliedern vierter Ordnung in h, wenn man als Näherung den folgenden Ausdruck wählt:

$$y_N = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \tag{35}$$

Hier ist

$$\begin{cases} K_1 = f(x_0, y_0), & K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1 h}{2}\right), \\ K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2 h}{2}\right), & K_4 = f(x_0 + h, y_0 + K_3 h). \end{cases} \tag{36}$$

Den Fehler des Verfahrens könnte man durch Berechnung der Glieder fünfter Ordnung abschätzen. Bequemer und in der Praxis meist ausreichend ist es jedoch, zur Bestimmung des Fehlers nach $2n$-Schritten das Verfahren ein zweites Mal mit doppelter Intervallbreite $2h$ anzuwenden. Der Fehler der ersten Berechnung beträgt dann der Größenordnung nach $\frac{1}{15}$ des Unterschiedes beider Resultate. Diese Art der Abschätzung kann man so plausibel machen: Beim ersten Verfahren ist der Fehler von der Form Const. $2n \cdot h^5$. Bei der zweiten Rechnung wird er von der Form Const. $n(2h)^5$. Die Differenz beider Fehler ist bekannt.

Von einem anderen Grundgedanken geht das praktisch viel angewandte Integrationsverfahren von Adams und Störmer aus:

---

[1]) Vgl. z. B. C. Runge, Graphische Methoden, Leipzig u. Berlin, 1919.

[2]) Vgl. z. B. C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 286 f., insbesondere S. 294.

Sind für die gesuchte Lösung y von (1) schon die f-Werte $F(x_\varrho)$ für eine Reihe äquidistanter Abszissen

$$x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_{\nu-1} = x_0 + (\nu - 1)h$$

bekannt, so setze man zur Berechnung von $y(x_\nu)$ mit $x_\nu = x_0 + \nu h$

$$y(x_\nu) = y(x_{\nu-1}) + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} F(x)\,dx \tag{37}$$

an und führe für F die nach der Newtonschen Interpolationsformel[1]) (hier eigentlich Extrapolation) durch die Werte $F(x_\varrho)$ an den Abszissen $x_\varrho(\varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$ bestimmte ganze rationale Funktion $(\nu - 1)$-ten Grades ein:

$$\left\{\begin{aligned} F(x_0 + \nu h) = F(x_{\nu-1}) + \nu \Delta^1 F(x_{\nu-1}) + \frac{\nu(\nu+1)}{2!}\Delta^2 F(x_{\nu-1}) \\ + \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3!}\Delta^3 F(x_{\nu-1}) + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Hierbei bestimmen sich, wie üblich, die (hinteren) Differenzenausdrücke $\Delta^\sigma F(x_\varrho)$ aus der Rekursionsformel

$$\Delta^\sigma F(x_\varrho) = \Delta^{\sigma-1} F(x_\varrho) - \Delta^{\sigma-1} F(x_{\varrho-1}).$$

Ersetzt man in (38) bei festem h und festem Argument $x_{\nu-1}$ von F ν durch eine zwischen $\nu - 1$ und ν laufende Variable z, so erhält man durch Integration aus (38):

$$\left\{\begin{aligned} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} F(\xi)\,d\xi = h\int_0^1 F(x_0 + z.h)\,dz = h[F(x_{\nu-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta^1 F(x_{\nu-1}) \\ + \tfrac{5}{12}\Delta^2 F(x_{\nu-1}) + \tfrac{3}{8}\Delta^3 F(x_{\nu-1}) + \tfrac{251}{720}\Delta^4 F(x_{\nu-1}) + \cdots]. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Darin bestimmen sich die Zahlenkoeffizienten von $\Delta^\mu F(x_{\nu-1})$ durch Berechnung der Integrale $\frac{1}{\mu!}\int_0^1 z(z+1)\ldots(z+\mu-1)\,dz$. Führt man (39) in (37) ein, so erhält man $y(x_0 + \nu h)$.

Bei der praktischen Ausführung, z. B. für den Fall $\nu = 4$, wird man sich eine Tabelle folgender Form anlegen:

$$\left\{\begin{array}{ll|llll} x_0 & (y_0) & hF_0 & & & \\ & & & \Delta(hF_1) & & \\ x_1 & (y_1) & hF_1 & & \Delta^2(hF_2) & \\ & & & \Delta(hF_2) & & \Delta^3(\boldsymbol{hF_4}). \\ x_2 & (y_2) & hF_2 & & \boldsymbol{\Delta^2(hF_3)} & \\ & & & \boldsymbol{\Delta(hF_3)} & & \\ x_3 & y_3 & \boldsymbol{hF_3} & & & \end{array}\right. \tag{40}$$

---

[1]) Vgl. z. B. C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 107.

Dann bestimmt sich y_4 aus

(41) $$y_4 = y_3 + hF_3 + \tfrac{1}{2}\Delta(hF_3) + \tfrac{5}{12}\Delta^2(hF_3) + \tfrac{3}{8}\Delta^3(hF_3).$$

Will man jetzt mit Benutzung dieses y_4 weiterrechnen, so brauch man jeder Spalte der Tabelle (40) nur noch eine Zahl anzuhängen Schwierigkeit macht nur die Aufsuchung der zu Anfang zu be nutzenden Werte F_1, F_2 und F_3 bzw. y_1, y_2, y_3. Hierzu verwende man am besten eine Potenzreihe:

$$y(x) = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + \cdots,$$

wobei man für x der Reihe nach h, $2h$ und $3h$ setzt[1]).

6. Systeme von Gleichungen. Alles hier Besprochene läßt sich fast unmittelbar auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und damit nach einer in 1 gemachten Bemerkung auch auf Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung übertragen. Zum Beispiel gewinnt man so den folgenden Existenzsatz: In dem System

(42) $$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

seien die rechten Seiten in einem Bereich B der $(x, y_1, \ldots, y_n)$ stetige Funktionen, welche für ein passendes K der Lipschitzschen Bedingung

(43) $$\begin{cases} \quad |f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})| \\ < K(|y_1^{(1)} - y_1^{(2)}| + \cdots + |y_n^{(1)} - y_n^{(2)}|) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

genügen. Außerdem sei in B

(44) $$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < M \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ferner seien $a, b_1, \ldots, b_n$ gewisse positive Zahlen, die der Bedingung

(45) $$b_i > aM \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen und für die der Bereich

(46) $$|x - x_0| < a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| < b_1, \ldots, \quad |y_n - y_n^{(0)}| < b_n$$

ganz dem Bereiche B angehört. Dann gibt es genau n für $|x - x_0| < a$ stetige Funktionen $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, welche der Bedingung $y_i^{(0)} = \varphi_i(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ genügen

---

[1]) Zur Fehlerabschätzung des Integrationsverfahrens von Adams und Störmer vgl. R. v. Mises, Zeitschr. angew. Math. Mech., Bd. 10, 1930.

und welche die Differentialgleichungen (42) identisch befriedigen, wenn man sie dort für die y_i einträgt.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergibt sich z. B. hieraus der folgende Satz: In der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{47}$$

sei die rechte Seite für $|x-x_0| < A$, $|y-y_0| < B$, $|y'-y'_0| < B'$ eine stetige Funktion von x, y, y'; es sei weiter für diese Wertesysteme

$$|f(x,y,y')| < M \text{ und } |f(x,y_1,y'_1)-f(x,y_2,y'_2)| < K(|y_1-y_2|+|y'_1-y'_2|). \tag{48}$$

Ferner seien $a < A$, $b < B$, $b' < B'$ drei positive Zahlen, welche der Bedingung

$$b > aM, \quad b' > aM \tag{49}$$

genügen. Dann gibt es genau eine in $|x-x_0| < a$ stetige, in diesem Intervall mit stetigen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen versehene Funktion $\varphi(x)$, die nebst ihrer Ableitung an der Stelle x_0 vorgegebene Werte annimmt und für $|x-x_0| < a$ die Gl. (47) identisch erfüllt, wenn man in diese statt y das $\varphi(x)$, statt y' das $\varphi'(x)$ und statt y'' das $\varphi''(x)$ einträgt.

Auch die von uns ausgesprochenen Stetigkeitssätze und die angeführten Verfahren näherungsweiser Integration lassen sich unschwer auf diesen allgemeineren Fall übertragen.

§ 2. Integrierbare Fälle

Vielfach lassen sich die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch geschlossene Ausdrücke, d. h. durch Kombination von endlich vielen elementaren Funktionen und unbestimmten Integralen über solche, darstellen. Es sollen in diesem Paragraphen die wichtigsten dieser Fälle zusammengestellt werden.

1. Trennung der Variablen. Der einfachste Fall ist wohl der, in dem die Variablen getrennt sind, d. h. auf jeder Seite der Gleichung nur die eine Variable vorkommt oder dies unmittelbar zu erreichen ist, z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{1}$$

woraus

$$\int_{y_0}^{y} g(\eta)\,d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{2}$$

folgt.

Damit ist also die Bestimmung der Funktion $y(x)$ auf zwei Quadraturen und nachfolgende Auflösung einer Gleichung zurückgeführt. Sollte die Durchführung dieser Rechnungen in geschlossener Gestalt nicht möglich sein, so hat man hierfür doch immer noch die geläufigen Methoden praktischer Quadratur und praktischer Gleichungsauflösung zur Verfügung. Freilich erhebt sich dann auch wieder die Frage, ob es nicht besser ist, auf die Verfahren des vorigen Paragraphen zurückzugreifen. Doch lassen sich dafür allgemeine Regeln nicht aufstellen.

Oft gelingt die Trennung der Variablen durch Ausführung einer passenden Substitution in der Differentialgleichung selbst. So ist es z. B. bei Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(ax + by), \tag{3}$$

wo a und b Konstanten sind. Man führt hier durch die Substitution $v = ax + by$ eine neue unbekannte Funktion v ein. Diese erfüllt dann wegen $v' = a + by'$ die Differentialgleichung

$$v' = a + b\varphi(v), \tag{3'}$$

die die Form (1) mit $f =$ konst. hat.

Ähnlich kann man bei den sogenannten homogenen Differentialgleichungen

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

die Variablen trennen. Hier führt die Substitution $v = y/x$ zu der Differentialgleichung

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}, \tag{4'}$$

und in dieser sind die Variablen wie in (1) zu trennen.

Auf homogene Gleichungen lassen sich die Gleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} \tag{5}$$

(wo a, b, c, a_1, b_1, c_1 Konstanten sind) stets dann zurückführen, wenn die Determinante $ab_1 - ba_1$ nicht verschwindet. Dazu bringe man durch eine Substitution

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta$$

den Schnittpunkt der beiden nichtparallelen Geraden

$$ax + by + c = 0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

nach dem Koordinatenursprung. Dann nimmt die Gleichung die Form

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1 x_1 + b_1 y_1} \tag{5'}$$

an, ist also homogen.

Der Fall, daß die Determinante $ab_1 - ba_1$ verschwindet, kommt auf den bereits behandelten Fall (3) zurück. Denn hier hat die Gl. (5) notwendig die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}, \tag{5''}$$

so daß also rechts eine Funktion von $ax + by$ allein steht.

2. Lineare Gleichungen erster Ordnung. Zu den durch geschlossene Ausdrücke oder, besser gesagt, durch Quadraturen lösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung gehören auch die linearen

$$y' + a_1 y + a_2 = 0, \tag{6}$$

in denen die unbekannte Funktion und ihre Ableitung nur linear vorkommen; dabei seien a_1 und a_2 stetige Funktionen von x. Ihre Integration gelingt durch den Ansatz $y = u . v$, wo u und v zwei neue unbekannte Funktionen bedeuten. Aus der Differentialgleichung wird durch diesen Ansatz

$$v'u + v(u' + a_1 u) + a_2 = 0. \tag{7}$$

Bestimmt man nun u so, daß der Klammerausdruck verschwindet, nimmt also z. B.[1])

$$u = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1\, d\xi\right), \tag{8}$$

so bleibt für die Bestimmung von v die leicht zu behandelnde Differentialgleichung

$$v' + a_2 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_1\, d\xi\right) = 0, \quad v = y_0 - \int_{x_0}^{x} a_2 \exp\left(\int_{x_0}^{\eta} a_1\, d\xi\right) d\eta. \tag{9}$$

Also wird endlich

$$y = \left\{ y_0 - \int_{x_0}^{x} a_2 \exp\left(\int_{x_0}^{\eta} a_1\, d\xi\right) d\eta \right\} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1\, d\xi\right). \tag{10}$$

Wenn in (6) $a_2 = 0$ ist, so liegt der Fall der sogenannten homogenen linearen Differentialgleichung vor. (Hier bezieht sich die Benennung homogen statt wie vorhin auf die Abhängigkeit von x

[1]) $\exp(x)$ des besseren Druckes wegen für e^x.

und y auf die von y und y'.) In diesem Falle hat (6) die früher behandelte Gestalt (1).

Auf die lineare Differentialgleichung läßt sich die Bernoullische

$$y' + a_1 y + a_2 y^n = 0 \quad (n \neq 1) \tag{11}$$

zurückführen. Man führe $z = y^{1-n}$ als neue unbekannte Funktion ein. Dann wird

$$\frac{1}{1-n} z' + a_1 z + a_2 = 0. \tag{11'}$$

Auf eine lineare Differentialgleichung läßt sich ferner die Differentialgleichung

$$y'(a_1(y)\, x + a_2(y)) + 1 = 0 \tag{12}$$

zurückführen, in der sozusagen x und y gegen bisher ihre Rollen vertauscht haben. In der Tat wird Gl. (12) linear, wenn man sie so schreibt:

$$a_1(y)\, x + a_2(y) + \frac{dx}{dy} = 0. \tag{12'}$$

Man bestimmt also erst die Umkehrfunktion $x(y)$ der gesuchten Funktion; das ist ein Kunstgriff, den man oft mit Erfolg anwenden kann.

3. Lineare Gleichungen zweiter Ordnung. Das in 2 angewandte Verfahren läßt sich auch auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen. Es beruht nämlich nur auf der Benutzung einzelner Integrale der linearen homogenen Gleichung, die man durch Streichen des von y und seinen Ableitungen freien Gliedes erhält. Ist $v(x)$ irgendeine Lösung der homogenen Gleichung $y' + a_1 y = 0$, so sind alle anderen Lösungen derselben von der Form $u \cdot v(x)$, wo u eine Konstante ist. Das erkennt man sofort, wenn man $y = u \cdot v(x)$ in die homogene Gleichung einsetzt und die Bedingung sucht, der u genügen muß, wenn $u \cdot v(x)$ auch eine Lösung sein soll. Man findet als Bedingung $u' \cdot v = 0$, also $u' = 0$, $u =$ konst. Die inhomogene Gleichung wurde durch denselben Ansatz $y = uv$ gelöst, nur erwies sich da u nicht mehr als konstant. Man spricht daher hier von einer „Methode der Variation der Konstanten".

Im Falle linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung, in welchen wenigstens die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen mit konstanten Koeffizienten versehen sind, kann man die Integration vollständig auf Quadraturen zurückführen. Wir befassen uns also zuerst mit den homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und beschränken uns zunächst auf

die zweite Ordnung, weil dabei alles Wesentliche hervortritt. In der Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{13}$$

seien also a_1 und a_2 Konstanten. Setzt man

$$y = e^{\varrho x} \tag{14}$$

in (13) ein und kürzt durch $e^{\varrho x}$, so erhält man die quadratische Gleichung in ϱ

$$\varrho^2 + a_1 \varrho + a_2 = 0. \tag{15}$$

Nun muß man mehrere Fälle unterscheiden.

Wenn zunächst zwei reelle verschiedene Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 der quadratischen Gl. (15) vorhanden sind, so hat man in $e^{\varrho_1 x}$ und $e^{\varrho_2 x}$ zwei reelle Lösungen, und man erkennt sofort, daß auch alle

$$c_1 e^{\varrho_1 x} + c_2 e^{\varrho_2 x} \tag{16}$$

Lösungen sind, wenn c_1 und c_2 beliebige Konstanten bezeichnen. Man kann sie dann auch leicht so bestimmen, daß eine Lösung zustande kommt, die an der Stelle x_1 einen vorgegebenen Wert y_0 hat und deren Ableitung dort einen vorgegebenen Wert y_0' besitzt. Denn diese „Anfangsbedingungen“ führen auf die beiden linearen Gleichungen

$$y_0 = c_1 e^{\varrho_1 x_0} + c_2 e^{\varrho_2 x_0}, \quad y_0' = c_1 \varrho_1 e^{\varrho_1 x_0} + c_2 \varrho_2 e^{\varrho_2 x_0}. \tag{17}$$

Diese sind aber stets auf genau eine Weise nach den c_1 und c_2 auflösbar, denn ihre Determinante

$$(\varrho_2 - \varrho_1) e^{\varrho_1 x_0} \cdot e^{\varrho_2 x_0}$$

verschwindet nicht. Diese Betrachtung lehrt gleichzeitig (mit Rücksicht auf die am Schluß von § 1, 6 festgestellte Eindeutigkeit), daß unser Ansatz (17) sämtliche Lösungen der Differentialgleichung liefert. Man sieht nun weiter, daß genau die gleichen Überlegungen auch für den Fall anzustellen sind, wo die quadratische Gleichung zwei voneinander verschiedene komplexe Wurzeln hat. Zwar sind dann die beiden zuerst gefundenen Lösungen $e^{\varrho_1 x}$ und $e^{\varrho_2 x}$ nicht reell. Aber bei passender Wahl der c_1 und c_2 erhält man aus (17) auch alle reellen Lösungen; man braucht c_1 und c_2 nur als konjugiert komplexe Größen zu wählen. Beispielsweise hat die Gleichung $y'' + y = 0$ die beiden Lösungen e^{ix} und e^{-ix}, aus denen sich mit $c_1 = c_2 = 1/2$ bzw. $c_1 = -c_2 = 1/2i$ in der Form

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

die reellen Lösungen $\cos x$ und $\sin x$ ergeben; daraus lassen sich dann wieder in der Form $\gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin x$ alle reellen Lösungen herleiten.

Unser Ansatz (14) führt aber nicht zur Auffindung aller Lösungen wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gl. (15) zusammen fallen. Dann erhalten wir nämlich durch unseren Ansatz nu eine Lösung $e^{\varrho_1 x}$ der Differentialgleichung. In diesem Falle führ aber wieder der alte Ansatz (Variation der Konstanten) $y = u e^{\varrho_1}$ zum Ziel. Er liefert durch Einsetzen in (13) für u die Differential gleichung

$$u'' + u'(2\varrho_1 + a_1) + u(\varrho_1^2 + \varrho_1 a_1 + a_2) = 0, \tag{18}$$

die sich nach (15) auf $u'' = 0$ reduziert. Daher muß $u = c_1 x + c$ sein, wo c_1 und c_2 zwei Integrationskonstanten bezeichnen. Demnach wird das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung in diesen Falle:

$$y = c_1 x e^{\varrho_1 x} + c_2 e^{\varrho_1 x}. \tag{19}$$

Daß es wirklich das allgemeine ist, sieht man wieder daran, daß man die beiden Integrationskonstanten so bestimmen kann, daß die Lösung (19) und ihre erste Ableitung an der Stelle x_0 gegebene Werte y_0 und y_0' annehmen.

Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a_1}{ax+b}y' + \frac{a_2}{(ax+b)^2}y = 0, \tag{20}$$

in der a_1, a_2 und a, b Konstanten sind, läßt sich durch die Substitution

$$ax + b = e^z \tag{20'}$$

in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen.

4. Fundamentalsystem. Inhomogene Gleichungen. Bevor wir zur Behandlung der inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten übergehen, seien einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt. Zwei Lösungen y_1 und y_2 einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \tag{21}$$

bilden, wie man sagt, ein „Fundamentalsystem", wenn man jede andere Lösung y von (21) in der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{22}$$

mit konstanten Koeffizienten c_1 und c_2 darstellen kann. In den betrachteten Beispielen wurden solche Fundamentalsysteme bestimmt. Es gilt der Satz, daß zwei Lösungen y_1 und y_2 stets dann, und nur dann in der Umgebung einer Stelle x_0 ein Fundamentalsystem bilden, wenn die Determinante

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \tag{23}$$

in der Umgebung dieser Stelle von Null verschieden ist. Wenn nämlich y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem bilden sollen, so muß, wie wir schon in dem speziellen Falle (17) gesehen haben, das Gleichungssystem

$$(24) \qquad y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \quad y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$$

nach c_1 und c_2 auflösbar sein. Das ist aber dann, und nur dann der Fall, wenn (23) nicht verschwindet[1]). Verschwindet nun (23) in der ganzen Umgebung von x_0, so sieht man leicht, daß y_1 und y_2 linear abhängig sind, vorausgesetzt, daß an keiner Stelle die Determinante den Rang 0 hat. y_1 und y_2 bilden dann sicher kein Fundamentalsystem.

Es kommt also bei der Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wesentlich darauf an, ein Fundamentalsystem zu finden. Bei der Lösung dieser Aufgabe ist es häufig von Nutzen, zu wissen, daß man stets nach Auffindung einer nicht identisch verschwindenden Lösung eine andere, mit ihr ein Fundamentalsystem bildende, durch bloße Quadraturen bestimmen kann. Setzt man nämlich in (21) anstatt y einmal y_1 und einmal y_2:

$$(25) \qquad y_1'' + f_1(x) y_1' + f_2(x) y_1 = 0, \quad y_2'' + f_1(x) y_2' + f_2(x) y_2 = 0,$$

multipliziert die erste Gleichung mit y_2, die zweite mit y_1 und subtrahiert, so erhält man:

$$(y_2 y_1'' - y_1 y_2'') + f_1(x)(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0$$

oder

$$\frac{d}{dx}(y_2 y_1' - y_1 y_2') + f_1(x)(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0,$$

$$(26) \quad \frac{d}{dx}\log(y_2 y_1' - y_1 y_2') + f_1(x) = 0, \quad y_2 y_1' - y_1 y_2' = C \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f_1(\xi)\, d\xi\right),$$

wo C eine Konstante ist. Das ist aber eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für y_2, die man nach den Ergebnissen in 2 durch Quadraturen lösen kann.

Wir wollen nun allgemein zeigen, daß man die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durch bloße Quadraturen lösen kann, sobald man ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen kennt. Dazu dient wieder die Methode der Variation der Konstanten. Wenn nämlich y_1 und y_2

[1]) Verschwindet die Determinante bei x_0 nicht, so gibt es aus Stetigkeitsgründen eine ganze Umgebung von x_0, in der sie nicht verschwindet.

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (21) bilden, so gehe man in die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x) = 0 \tag{27}$$

mit dem Ansatz (22) ein, wobei man aber die c_1 und c_2 als noch zu bestimmende Funktionen von x betrachtet. Es ergibt sich

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_1 y_2'.$$

Man fordere, daß

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

sei. Dann wird

$$y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_1 y_2''.$$

Man verlange nun, daß

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + f_3(x) = 0$$

sei. Dann bleibt

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' - f_3(x).$$

Trägt man dies y' und dies y'' in (27) ein, so ist (27) wegen (25) erfüllt. Aus den beiden Gleichungen

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' + f_3(x) = 0 \tag{28}$$

ergibt sich

$$c_1 = -\int \frac{y_2 f_3(x)}{y_1' y_2 - y_2' y_1}\, dx, \qquad c_2 = +\int \frac{y_1 f_3(x)}{y_1' y_2 - y_2' y_1}\, dx,$$

so daß also das allgemeine Integral von (27) so aussieht:

$$y = y_1 \int \frac{y_2 f_3}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx - y_2 \int \frac{y_1 f_3}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx + k_1 y_1 + k_2 y_2. \tag{29}$$

5. Integrierender Faktor. Wir stellten schon in § 1, 1 fest, daß eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $y' = f(x, y)$ in einem Gebiet, in dem $f(x, y)$ eindeutig erklärt ist, ein Richtungsfeld festlegt. Die Differentialgleichung integrieren heißt da eine Kurvenschar finden, die jeden Punkt in der dort vorgeschriebenen Richtung passiert. Nennen wir a die Integrationskonstante (die durch den Anfangswert y_0 für $x = x_0$ festgelegt wird), so kann das Problem der Integration auch dahin formuliert werden: Man soll eine einparametrige Kurvenschar $y = h(x, a)$ finden, die der Differentialgleichung genügt. Löst man nach der Integrationskonstanten auf

$$\varphi(x, y) = a, \tag{30}$$

so handelt es sich um die Bestimmung der Funktion φ von x und y. Differentiation von (30) ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{d y}{d x} = 0. \tag{31}$$

Trägt man hier den durch die Differentialgleichung gegebenen Wert von y' ein, so erhält man für φ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{32}$$

aus der

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu \cdot f, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu \tag{33}$$

folgt. Hier bedeutet μ den sogenannten Multiplikator oder „integrierenden Faktor", durch den eben erreicht wird, daß

$$-\mu \cdot f dx + \mu dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

gleich dem Differential der Funktion φ wird. Man sagt daher, durch Multiplikation mit μ werde der Ausdruck $-f dx + dy$ (dessen Verschwinden identisch mit dem Bestehen der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f$ ist) zu einem totalen Differential gemacht. μ muß nach (33) der Bedingung

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial (\mu f)}{\partial y} = 0 \tag{34}$$

genügen, und das ist selbst eine partielle Differentialgleichung, die Differentialgleichung des integrierenden Faktors. Man braucht davon nur irgendeine spezielle Lösung zu haben — und eine solche kann man oft ziemlich leicht finden —, dann erfordert die Bestimmung von φ aus (33) nur noch Quadraturen.

6. Riccatische Differentialgleichung. Die Gleichungen

$$y' = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) y + \alpha_2(x) y^2 \tag{35}$$

heißen Riccatische Differentialgleichungen. Macht man hier die Substitution

$$y = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{d \log \operatorname{nat} u}{dx}, \tag{36}$$

so geht (35) in die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\alpha_2 u'' - (\alpha_2' + \alpha_1 \alpha_2) u' + \alpha_0 \alpha_2^2 u = 0 \tag{37}$$

über. Jeder Lösung derselben entspricht eine der Riccatischen. Dabei stört es ja auch nicht, daß in die Lösungen der Gleichung zweiter Ordnung (37) zwei willkürliche Konstanten eingehen. Denn eine Multiplikation von u mit einem konstanten Faktor ändert an y nichts.

Alle Lösungen einer linearen Gleichung zweiter Ordnung kan man, wie wir wissen (vgl. S. 298), aus zwei beliebigen von ihne linear aufbauen, wofern nur deren Quotient nicht konstant ist (Fur damentalsystem). Sind nun y_1 und y_2 zwei verschiedene Lösunge der Riccatischen Gleichung (35), so bilden $e^{-\int \alpha_2 y_1 dx}$ und $e^{-\int \alpha_2 y_2 d}$ ein Fundamentalsystem. Daher gibt es zu jeder dritten Lösung zwe Konstanten c_1 und c_2, so daß

$$e^{-\int \alpha y_3 dx} = c_1 e^{-\int \alpha_2 y_1 dx} + c_2 e^{-\int \alpha_2 y_2 dx}$$

ist. Die Kenntnis zweier Integrale y_1 und y_2 genügt als zur Berechnung aller Lösungen. Aus diesen Zusammenhänger kann man auch leicht erschließen, in wie einfacher Weise eine Lösung einer Riccatischen Gleichung von ihren Anfangswerten abhängt. Es seien z. B. die beiden Lösungen eines Fundamentalsystems durch die Anfangsbedingungen

$$u_1(x_0) = 0, \quad u_1'(x_0) = 1 \quad \text{und} \quad u_2(x_0) = 1, \quad u_2'(x_0) = 0$$

festgelegt. Dann ist nach (36)

$$y = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{c_1 u_1' + c_2 u_2'}{c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

eine beliebige Lösung. Also ist

$$(38) \quad y_0 = y(x_0) = -\frac{1}{\alpha_2(x_0)} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{-y_0 \alpha_2(x_0) u_1' + u_2'}{-y_0 \alpha_2(x_0) u_1 + u_2}$$

diejenige Lösung der Riccatischen Gleichung, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Sie hängt also linear und gebrochen von dem Anfangswert y_0 ab. Beachtet man nun noch die Invarianz des Doppelverhältnisses bei linearen Substitutionen

$$\left(y_\nu = \frac{a z_\nu + b}{c z_\nu + b'}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4; \quad \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \cdot \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right),$$

so erkennt man, daß das Doppelverhältnis von irgend vier Lösungen einer Riccatischen Gleichung von x nicht abhängt. Zeichnet man also irgend vier Lösungen einer solchen Differentialgleichung auf und schneidet dieselben mit irgendeiner Parallelen zur y-Achse, so haben diese vier Schnittpunkte ein und dasselbe Doppelverhältnis, welche Parallele man auch gewählt haben mag.

7. Implizite Gleichungsform. Bisher waren die Gleichungen erster Ordnung immer in der Form $y' = f(x, y)$ angenommen worden und dabei war $f(x, y)$ in einem gewissen Gebiete eindeutig erklärt. Falls die Differentialgleichung nicht von vornherein in dieser Form vorgelegt ist, so muß man sie erst auf diese Form bringen, indem man

die vorgelegte Gleichung $\varphi(x, y, y') = 0$ nach y' auflöst. Dabei hat man dann oft noch die Wahl zwischen mehreren Bestimmungsweisen von y'. So ist das ja z. B. schon bei der Gleichung $y'^2 - y = 0$, wo man sich für den positiven oder negativen Wert der $\sqrt{y}$ entscheiden kann. Beide Zweige kann man nur in einem Bereiche trennen, der die x-Achse nicht überschneidet. Nur auf solche Bereiche beziehen sich also die bisherigen Betrachtungen. Nun aber gibt es Methoden, die es erlauben, die Integrale zu gewinnen, ohne erst explizite die Auflösung nach y' zu bewerkstelligen. Sie vertauschen gewissermaßen den Auflösungsprozeß mit dem Integrationsprozeß und erlauben es, diesen zuerst auszuführen.

So sei z. B. eine homogene Differentialgleichung in der Form

$$\frac{y}{x} = f(y') \quad \text{oder} \quad y = x f(y') \tag{39}$$

vorgelegt. Ich denke mir irgendein Integral bestimmt und eingetragen. Differentiation der dann identisch richtigen Gleichung nach x ergibt

$$y' = f(y') + x f'(y') y'', \tag{39'}$$

und das ist eine Differentialgleichung zwischen x und y', die man nach der Methode der Trennung der Variablen behandeln kann. So findet man, daß längs der Integralkurve auch

$$x = c \,.\, \exp \int \frac{f'(y')}{y' - f(y')}\, dy' \tag{40}$$

sein muß. Dabei ist c eine Integrationskonstante, die man mit Hilfe der Koordinaten irgendeines Punktes der Integralkurve bestimmen kann. Da aber längs der Integralkurve nach (39) auch noch $y = x f(y')$ gilt, so hat man für die Integralkurve die beiden Gl. (39) und (40). Man kann daher die Integralkurve hieraus entweder durch Elimination von y' gewinnen, oder aber die beiden Gleichungen als eine Parameterdarstellung der Integralkurve mit Hilfe des Parameters y' auffassen.

Auch den Gedanken einer Parameterdarstellung der Differentialgleichung kann man heranziehen. Wir betrachten eine homogene Gleichung, die in der Parameterdarstellung

$$y = x g(t), \quad y' = h(t) \tag{41}$$

vorgelegt ist. So kann man ja z. B. die Differentialgleichung

$$y'^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 \quad \text{auch in der Form} \quad y = x \sin t, \quad y' = \cos t$$

aufschreiben.

Aus der ersten Gl. (41) ergibt sich durch Differenzieren

$$y' = g(t) + x g'(t) . t'.$$

Daher wird nach der zweiten

$$h(t) = g(t) + x g'(t) t'.$$

Wieder kann man die Variablen trennen und findet so

$$x = c . \exp\left\{\int \frac{g'(t)}{h(t) - g(t)}\, dt\right\}. \tag{42}$$

Diese Gleichung zusammen mit (41) bestimmt wieder die Integralkurven.

Beide Methoden, die wir eben entwickelten, kann man ganz analog in vielen anderen Fällen anwenden, z. B. stets dann, wenn in der Differentialgleichung entweder x oder y explizite nicht vorkommen. Es genügt, den Fall näher zu betrachten, in dem y fehlt, weil man den andern auf diesen durch Vertauschung von x und y zurückführen kann. Es sei also eine Differentialgleichung

$$f(x, y') = 0 \tag{43}$$

vorgelegt. Damit gleichbedeutend sind die beiden Gleichungen

$$f(x, p) = 0, \quad y' = p. \tag{43'}$$

Falls man die erste nach p auflösen kann, führt Quadratur zum Ziel. Andernfalls gelingt vielleicht die Auflösung nach x oder die Darstellung des Zusammenhanges zwischen x und p vermittelst eines Parameters t. Sei z. B. mit $f(x, p) = 0$ gleichbedeutend

$$x = \varphi(t), \quad p = \psi(t).$$

Dann wird

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \psi(t) \cdot \varphi'(t), \quad \text{also} \quad y = \int \psi \varphi' \, dt,$$

und nun hat man die Parameterdarstellung der Integralkurven gefunden.

Die Methode ist aber auch anwendbar bei allgemeineren Differentialgleichungen wie der folgenden, die man die Clairautsche Differentialgleichung zu nennen pflegt:

$$y = x y' + f(y'). \tag{44}$$

Differentiation nach x führt auf

$$y' = y' + x y'' + f'(y') y'' \quad \text{oder} \quad y''[x + f'(y')] = 0.$$

Es ist also entweder $y'' = 0$, $y' =$ konst, d. h. y' von x unabhängig, und das ergibt die Geraden

$$y = x c + f(c) \tag{45}$$

als Integralkurven. Oder es ist

$$x + f'(y') = 0. \tag{46}$$

Diese Gleichung zusammen mit (44) bestimmt also wieder ein Integral, in dem aber keine Integrationskonstante mehr vorkommt. Man nennt dieses Integral ein singuläres. Es liefert die Einhüllende der Geradenschar (45), denn in ihrem zum Parameterwert $y' = c$ gehörigen Punkt wird sie von der Geraden $y = xc + f(c)$ berührt. Wir haben somit hier einen Fall vor uns, wo durch einen Punkt in einer Richtung mehr als eine Integralkurve geht. Allerdings lehrt schon eine einfache Überlegung, daß sich diese singulären Integrale auch den Existenzbeweisen des ersten Paragraphen entziehen. Wenn z. B. die Geradenschar von den Tangenten eines Kreises gebildet wird, so gibt es keinen Bereich, der einen Bogen dieses Kreises enthielte und in dem man eine eindeutige Bestimmung des durch die Differentialgleichung festgelegten Richtungsfeldes vornehmen könnte. Denn die Kreistangenten schneiden sich gegenseitig. Eine eindeutige Festlegung des Richtungsfeldes wäre nur möglich, wenn man nur Halbtangenten beibehielte, und auch dann wäre das wenigstens im reellen nur auf der einen Seite des Kreises möglich. Die hier berührten Dinge werden im nächsten Paragraphen noch eine nähere Erörterung finden.

Das bei der Clairautschen Gleichung verwendete Verfahren besitzt eine noch etwas weitergehende Anwendungsfähigkeit. Es sei z. B. eine Differentialgleichung vorgelegt, in welcher y nur linear vorkommt: $y = f(x, y')$; Differentiation nach x liefert, wenn man $y' = p$ setzt:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot p'.$$

Kann man hieraus $p(x)$ bestimmen, so liefert nochmalige Integration leicht $y(x)$. Z. B. gelingt dies, wenn die Differentialgleichung

$$y = g(p)\,x + h(p) \tag{47}$$

vorliegt. Dann hat man für p diese Gleichung

$$p = g(p) + g' \,.\, x\,p' + h'\,p' \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dp} = \frac{g'\,x + h'}{p - g(p)}$$

und das ist eine lineare Differentialgleichung für $x(p)$.

Aus $\frac{dy}{dx} = p$ folgt weiter $\frac{dy}{dp} = p \cdot \frac{dx}{dp}$, woraus man alsdann $y(p)$ bestimmt. Ähnlich verfährt man bei der Differentialgleichung

$$y = a(x) + b(x)\,y'. \tag{48}$$

Aus ihr entsteht für $y' = p$ durch Differentiation nach x

$$p = a' + b'\,p + b\,p'.$$

Das ist diesmal eine lineare Differentialgleichung für $p(x)$ selbst. Nochmalige Integration liefert dann leicht $y(x)$.

8. Einige Gleichungen höherer Ordnung. Daß man die Differentialgleichung $y'' = f(x)$ durch zweimalige Quadratur lösen kann, bedarf keiner Erörterung. Ebenso kann man aber auch die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ sofort integrieren. Man multipliziere nur beiderseits mit y' und integriere dann beiderseits nach x, so kommt

$$\frac{y'^2}{2} = \int f(y)\,dy + c.$$

Und diese Gleichung kann man nach der Methode der Trennung der Variablen weiter behandeln.

Die Differentialgleichung n-ter Ordnung $y^{(n)} = f(x)$ wird durch n-malige Quadratur gelöst. Bei $y^{(n)} = f(y)$, wie überhaupt bei jeder Gleichung, die y oder x nicht explizite enthält, kann man den Grad um Eins erniedrigen, wie folgende Überlegung für den Fall $n = 2$ zeigt.

Eine Differentialgleichung der Gestalt $f(y'', y', x) = 0$ wird durch die Substitution $y' = z$ auf die Gleichung erster Ordnung $f(z', z, x) = 0$ zurückgeführt. Ist eine Differentialgleichung $f(y'', y', y) = 0$ vorgelegt, so kann man die Rollen von x und y vertauschen, indem man $y' = 1/x'$, $y'' = -x''/x'^2$ setzt. Dann kommt man auf die Differentialgleichung

$$f\left(-\frac{x''}{x'^2}, \frac{1}{x'}, y\right) = 0,$$

die dem gerade besprochenen Typus angehört.

Den auf S. 294 behandelten homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung stehen die Differentialgleichungen

$$f\left(x y'', y', \frac{y}{x}\right) = 0$$

nahe. Man integriert sie durch den Ansatz $x y'' = v$, $y = x u$. Hieraus hat man durch Differentiation $y' = p = x u' + u$. Für $x y'' = v$ schreibe man $x p' = v$. Dann wird

$$\frac{dp}{du} = p' \cdot \frac{1}{u'} = \frac{v}{p-u}.$$

Aus $f(v, p, u) = 0$ berechne man $v = v(p, u)$ und trage das hier ein. So erhält man eine Gleichung erster Ordnung für $p(u)$. Hat man diese integriert, so trage man das gewonnene $p(u)$ in $p = x u' + u$ ein und bestimme hieraus durch erneute Integration u als Funktion von x. Endlich liefert dann $y = x u(x)$ die Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

§ 3. Geometrische Diskussion

Wir wollen jetzt Betrachtungen über den Gesamtverlauf der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung anstellen. Dabei erweist es sich als unerläßlich, an den Rand des Definitionsgebietes heranzugehen, wie dies schon im vorigen Paragraphen bei der Betrachtung der singulären Lösung der Clairautschen Gleichung geschah. Auch einzelne Punkte, sogenannte singuläre Punkte, werden zu betrachten sein.

1. Singuläre Punkte. Wir betrachten zunächst isolierte Punkte, in denen eine der bei dem Existenztheorem der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ (§ 1, 2) gemachten Voraussetzungen, z. B. die Lipschitzsche Bedingung, nicht erfüllt ist; in der Umgebung des betreffenden Punktes sollen diese Annahmen durchweg erfüllt sein. Prüfen wir, wie weit die damals gemachten Voraussetzungen für die Gültigkeit unserer Sätze auch notwendig sind, so können wir zwar feststellen, daß schon die Stetigkeit von $f(x, y)$ die Existenz der Lösungen nach sich zieht, daß aber ohne weitere Voraussetzungen über $f(x, y)$ es nicht richtig ist, daß durch jeden Punkt nur eine Lösung geht. Das lehrt schon das Beispiel der Differentialgleichung $y' = |\sqrt{y}|$, die für $y = 0$ der Lipschitzbedingung nicht genügt. In der Tat gehen durch den Punkt $x = h$, $y = 0$ nach der Seite wachsender x die beiden Lösungskurven

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{4}(x - h)^2.$$

Für derartige singuläre Punkte, in denen also die Stetigkeit von $f(x, y)$ gewahrt bleibt, aber die Lipschitzbedingung nicht erfüllt ist, gilt allgemein der Satz, daß die ihn passierenden Integralkurven einen von zwei äußersten Integralkurven bestimmten Bereich erfüllen. In der Tat erhält man in unserem Beispiel weitere solche Lösungen, indem man von $(0, h)$ aus erst die x-Achse ein Stück in Richtung wachsender x verfolgt und dann auf einen Parabelbogen übergeht.

Wir gehen zu dem für physikalische Anwendungen wichtigeren Fall über, bei dem die Stetigkeit des Richtungsfeldes in einem Punkte eine Unterbrechung erleidet. Die einfachsten hierhergehörigen Beispiele liefern die homogenen Differentialgleichungen [vgl. § 2, (4) und (5)], deren rechte Seite in dem Punkt, für den Zähler und Nenner verschwinden, unstetig wird. Wir betrachten zunächst einige typische Fälle.

Die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{hat zu Lösungen} \quad y = cx$$

für jedes konstante c, d. h. die geraden Linien durch den Anfangspunkt man pflegt auch die y-Achse noch mit zu den Lösungen zu rechnen da sie sich bei Vertauschung von x und y als echte Lösung erweist Den Punkt $x = 0$, $y = 0$ nennt man in diesem Falle einen Knotenpunkt. Das ist also ein singulärer Punkt von der Eigenschaft, daß sämtliche ihm genügend nahe kommenden Integralkurven durch ihn hindurchgehen.

Betrachten wir allgemeiner die Differentialgleichung

$$y' = a\frac{y}{x} \tag{2}$$

mit den Lösungen $y = c\,x^a$, so gehen für positive a wieder alle Integralkurven durch den Koordinatenanfangspunkt. Für $a = 0$ aber kommen die Parallelen zur x-Achse heraus und für negative a hyperbelartige Kurven, deren Asymptoten die beiden Koordinatenachsen sind, die selbst zu den Integralkurven gehören. Jetzt, im Falle des „Sattelpunktes", gehen also nur zwei Integralkurven durch den Ursprung, während alle übrigen wie die Höhenlinien in der Umgebung eines Gebirgssattels diesen Punkt meiden. Im Falle eines positiven a ist noch zu bemerken, daß die Integralkurven, je nachdem ob $a > 1$ oder ob $a < 1$ ist, die x-Achse oder die y-Achse im Ursprung berühren. Uberdies sind beide Koordinatenachsen selbst Integralkurven, so daß wir also hier immer zwei zueinander senkrechte geradlinige Integralkurven durch den Ursprung haben. Ein weiteres Beispiel für einen Knotenpunkt, durch den aber nur eine geradlinige Integralkurve hindurchgeht, liefert die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x+y}{x}, \quad y = x(c + \log\operatorname{nat}|x|). \tag{3}$$

Hier gehen alle Integralkurven durch den Ursprung und berühren dort die y-Achse.

Außer Knoten- und Sattelpunkten gibt es schießlich Fälle, in denen keine Integralkurven durch den singulären Punkt gehen. Im Falle der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{2''}$$

sind z. B. die Integralkurven Kreise $x^2 + y^2 = c^2$, also geschlossene Kurven um den singulären Punkt. Man spricht da von einem „Wirbelpunkt". Eine andere Form eines singulären Punktes ohne hindurchgehende Integralkurve ist der „Strudelpunkt". Hier legen sich die Integralkurven um den singulären Punkt herum, indem sie sich ihm

asymptotisch wie Spiralen nähern. Das einfachste Beispiel wird durch die Differentialgleichung der logarithmischen Spiralen geliefert:

$$(4) \qquad y' = \frac{x + a y}{a x - y}.$$

Zu ihrer Integration führt man am besten Polarkoordinaten ein, indem man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ setzt. Dann wird die Differentialgleichung $r' = a r$, und ihre Lösungen sind die logarithmischen Spiralen $r = c e^{a \varphi}$. Sie durchsetzen bekanntlich alle Strahlen durch den Ursprung unter einem konstanten Winkel, dessen trigonometrischer Tangens $1/a$ ist.

Die eben behandelten Beispiele sind, wie wir jetzt zeigen wollen, typisch für die homogene Differentialgleichung

$$(5) \qquad y' = \frac{a x + b y}{c x + d y},$$

deren rechte Seite Quotient zweier linearer Funktionen von x, y ist. Wir setzen reelle Koeffizienten voraus; ferner sei $a d - b c \neq 0$.

Bei den voraufgegangenen Erörterungen spielten die geradlinigen Integralkurven durch den Ursprung eine gewisse Rolle. Daher wollen wir zunächst nach solchen fragen. Soll $y = k x$ Integralgerade sein, so muß für k die Gleichung

$$(6) \qquad k = \frac{a + b k}{c + d k}$$

gelten. Je nachdem diese quadratische Gleichung zwei verschiedene reelle Wurzeln hat, identisch erfüllt ist, zwei verschiedene komplexe Wurzeln oder endlich eine reelle Doppelwurzel besitzt, müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden: Sind zwei verschiedene reelle Integralgeraden[1]) vorhanden, so machen wir diese durch eine Koordinatentransformation von der Form

$$(7) \qquad \xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

zu (im allgemeinen schiefwinkligen) Koordinatenachsen. Dabei nimmt notwendig die Differentialgleichung die früher behandelte Form (2) an. Denn bei der Transformation gehen die linearen Ausdrücke im Zähler und Nenner von (5) in ebensolche über, und die Transformation sollte so gewählt sein, daß $\xi = 0$ und $\eta = 0$ die beiden Integralgeraden werden, was in der Tat die Form (2) zur Folge hat.

In dem Falle, wo nur eine Integralgerade da ist, können wir sie durch eine analoge „affine“ Transformation zur Geraden $\xi = 0$ machen.

---

1) Das ist auch im Falle identisch erfüllter quadratischer Gleichung der Fall.

Dann bekommt jedenfalls aus den eben erörterten Gründen die Differentialgleichung die Form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\xi + \mu\eta}{\xi} \tag{8}$$

Nun muß aber berücksichtigt werden, daß auch die transformierte Differentialgleichung nur eine geradlinige Integralkurve durch den Ursprung haben kann. Es darf also die Gleichung $k = \lambda + \mu k$ keine Wurzel mehr besitzen und darf auch nicht identisch erfüllt sein. Das führt zu der Bedingung $\mu = 1$, $\lambda \neq 0$. Die Differentialgleichung hat also die Gestalt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\xi + \eta}{\xi}. \tag{8'}$$

Durch die Transformation $\eta = \lambda\eta_1$ kann sie in die vorhin näher betrachtete Gl. (8) übergeführt werden.

Nun bleibt noch der Fall zweier konjugiert imaginärer Integralgeraden. In diesem Falle wollen wir durch eine reelle affine Transformation das Koordinatensystem so legen, daß die beiden Integralgeraden die sogenannten Minimalgeraden

$$\eta = i\xi, \quad \eta = -i\xi \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{9}$$

werden. Das liefert für die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\xi + \mu\eta}{\nu\xi + \sigma\eta} \tag{5'}$$

die Bedingung, daß die quadratische Gleichung

$$k = \frac{\lambda + \mu k}{\nu + \sigma k} \tag{10}$$

die beiden Wurzeln $\pm i$ hat. Das führt zu $\nu = \mu$, $\lambda = -\sigma$. Also hat die Differentialgleichung die Form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \varrho\eta}{\varrho\xi - \eta}. \tag{5''}$$

Und das führt für $\varrho = 0$ zum Wirbelpunkt, für $\varrho = 1/a$ zu den logarithmischen Spiralen, also dem Strudelpunkt.

Damit sind alle Fälle erschöpft, und somit ist unsere Behauptung bewiesen, wonach die vorhin aufgezählten Spezialfälle typisch sind. Sie sind eben bis auf affine Koordinatentransformationen die einzigen.

Ich erwähne noch einen weitergehenden Satz von Poincaré. Dieser bezieht sich auf Differentialgleichungen der Form

$$y' = \frac{\mathfrak{P}_1(x, y)}{\mathfrak{P}_2(x, y)}. \tag{11}$$

Dabei sollen Zähler und Nenner Potenzreihen sein von der Form

(12) $\mathfrak{P}_1(x, y) = a x + b y + \cdots, \quad \mathfrak{P}_2(x, y) = c x + d y + \cdots,$

doch derart, daß die Determinante $a d - b c$ nicht verschwindet. Dann sind für den qualitativen Verlauf der Lösungen in der Nähe des Ursprungs die linearen Glieder entscheidend. Sie entscheiden darüber, ob ein Knotenpunkt oder Sattelpunkt vorliegt. Die Lösungen verlaufen gestaltlich ebenso, als ob die linearen Glieder allein da wären, es sei denn, daß die vorhin erwähnte quadratische Gleichung zwei konjugiert komplexe rein imaginäre Wurzeln hat. Die Entscheidung, ob dann Strudel oder Wirbel vorliegt, hängt nicht von den linearen Gliedern allein ab.

Es würde hier zu weit führen, den Satz in seiner Allgemeinheit zu beweisen. Es gibt aber spezielle Fälle, in welchen der Beweis außerordentlich leicht ist. Ein solcher mag hier wenigstens angeführt werden. Durch eine lineare Transformation kann man, wie wir schon wissen, im Falle zweier verschiedener reeller Wurzeln μ_1, μ_2 der Gl. (6), die Differentialgleichung stets auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu_2 y + \cdots}{\mu_1 x + \cdots} \tag{13}$$

bringen. Hier seien nun μ_1 und μ_2 zwei reelle verschiedene Zahlen gleichen Vorzeichens. Ich führe einen geeigneten Parameter t ein und schreibe die Differentialgleichung so:

$$\frac{dx}{dt} = \mu_1 x + \text{Gliedern höherer Ordnung},$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu_2 y + \text{Gliedern höherer Ordnung}.$$

Nun darf ich noch annehmen, daß $\mu_1 < 0$ und $\mu_2 < 0$; sonst würde ich zum Parameter $-t$ übergehen. Ich behaupte nun, daß eine jede Lösung, welche in einen genügend kleinen Kreis $x^2 + y^2 < \delta$ um den Ursprung $x = y = 0$ eintritt, für wachsende t sich dem Ursprung nähert, und zwar so, daß

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

gilt. Zum Beweis betrachte ich

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2 \mu_1 x^2 + 2 \mu_2 y^2 + \cdots.$$

Zu jedem hinreichend kleinen $\varrho > 0$ gibt es zwei positive Zahlen δ, ε, so daß für $0 < \varrho \leqq x^2 + y^2 \leqq \delta$ stets $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leqq -\varepsilon$ bleibt.

Daher nähert sich für wachsende t die Lösung unbegrenzt dem Ursprung. Für $t \to \infty$ kann aber $x^2 + y^2$ keinem von Null verschiedenen Grenzwert ϱ zustreben. Denn dabei müßte offenbar die Ableitung $2(x x' + y y')$ die untere Grenze Null haben. Dies ist aber so lange nicht der Fall, als $x^2 + y^2 \geqq \varrho$ bleibt.

2. Singuläre Lösungen. Wir wenden uns den singulären Lösungen zu. Dies eigentümliche Vorkommen lernten wir schon S. 304, 305 gelegentlich der Betrachtung der Clairautschen Differentialgleichung kennen. Wir machten damals die Erfahrung, daß durch einzelne Punkte zwei sich dort berührende Integralkurven gehen. Wir lernten dort auch schon, daß dies Vorkommen damit zusammenhängen muß, daß sich in der Umgebung der betreffenden Stellen mehrere durch eine Differentialgleichung bestimmte Richtungsfelder nicht trennen lassen. Wir müssen also bei der weiteren Untersuchung von einer Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0 \tag{14}$$

ausgehen, die in einem gewissen Gebiet y' nicht als eindeutige Funktion von x und y bestimmen möge. Nach bekannten Sätzen über implizite Funktionen können wir hier sofort einiges aussagen. Betrachten wir etwa ein Wertetripel x_0, y_0, y'_0, das der Gleichung (14) genügt, und nehmen an

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0. \tag{15}$$

Dann gibt es bekanntlich eine Umgebung der Stelle x_0, y_0, in welcher genau eine eindeutige und stetige Funktion $y' = \varphi(x, y)$ existiert, welche für x_0, y_0 den Wert y'_0 annimmt und für alle x, y dieser Umgebung der Gl. (14) genügt. Dann also ist unser Existenzsatz anwendbar, und es geht durch den Punkt x_0, y_0 genau eine Lösung $y = g(x)$ von (14), die dort die Ableitung y'_0 besitzt. Der gleiche Schluß gilt für alle anderen Lösungen y'_i der Gleichung $f(x_0, y_0, y') = 0$, wofern nur für dieselben die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_i)$ nicht verschwindet. Der Schluß versagt nur dann, wenn für ein Linienelement, d. h. für ein Wertetripel x, y, y', sowohl (14) als auch

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \tag{15'}$$

besteht. Diese Linienelemente mögen singuläre Linienelemente, Lösungen einer Differentialgleichung, die aus solchen singulären Elementen aufgebaut sind, singuläre Lösungen heißen. Singuläre Linienelemente sind also diejenigen, welche den beiden Gl. (14), (15) genügen. Hiernach kann man sofort den Ort derjenigen Punkte an-

geben, in welchen es singuläre Elemente geben kann. Man erhält ihn, indem man y' aus (14), (15') eliminiert. Wir wollen die so erhaltenen Kurven Diskriminantenkurven nennen und durch diese neue Benennung schon andeuten, daß nichts dafür spricht, daß nun diese Diskriminantenkurven tatsächlich stets singuläre Lösungen seien. Damit das der Fall sei, muß das (14) und (15') genügende y' zugleich die Richtung der Diskriminantenkurve liefern.

Um diese Richtung zu bestimmen, differenziere man nach x, indem man sich etwa y' aus (15') als Funktion von x und y bestimmt und in (14) eingesetzt denkt. So erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d y}{d x} = 0. \tag{16}$$

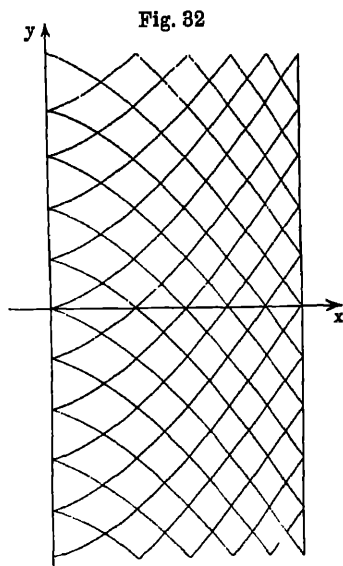
Soll also das hiernach bestimmte $\frac{d y}{d x}$ der Diskriminantenkurve mit dem y' zusammenfallen, so muß für y' noch die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0 \tag{16'}$$

erfüllt sein. Sie tritt zu den beiden Gl. (14), (15') noch hinzu, und nur wenn alle drei gelten, kann die Diskriminantenkurve eine Lösung, und zwar eine singuläre Lösung der Differentialgleichung sein. Ob diese Bedingung auch hinreicht, wird gleich zu erörtern sein. Vorher aber möge an einem Beispiel noch ausdrücklich erhärtet sein, daß die Diskriminantenkurve nicht immer singuläre Lösung ist. Es sei z. B. die Differentialgleichung $y'^2 = x$ vorgelegt. Ihre singulären Linienelemente genügen den beiden Gleichungen $y'^2 = x$, $2\,y' = 0$. Sie sind also alle der x-Achse parallel, während $x = 0$ die Diskriminantenkurve ist. Diese ist also hier nicht singuläre Lösung. Die Lösungen der Differentialgleichung sind vielmehr

$$y = \pm \tfrac{2}{3} x^{3/2} + c,$$

Fig. 32

und diese zeigen in schematischer Zeichnung den Verlauf wie in Fig. 32. Sie entsprechen den beiden Schichten des durch die Differentialgleichung definierten Richtungsfeldes.

Als zweites Beispiel betrachte ich die Differentialgleichung $y'^2 = y$, Ihre singulären Linienelemente genügen den beiden Gleichungen $y'^2 = y$, $2\,y' = 0$. Sie sind also wieder der x-Achse parallel, Diskriminantenkurve wird die x-Achse selbst, und diese ist jetzt singuläre Lösung. Tatsächlich ist ja auch die dritte Bedingung (16′) erfüllt. Integration der Differentialgleichung ergibt als ihre Lösungen die Parabeln

$$y = \frac{(x+c)^2}{4},$$

und die berühren alle die x-Achse, die — ähnlich wie bei der Clairautschen Gleichung — somit als Einhüllende auftritt.

Nun wenden wir uns der Frage zu, ob die drei Bedingungen (14), (15), (16′) auch umgekehrt die Diskriminantenkurve als singuläre Lösung kennzeichnen. Die Frage lautet also so: Längs einer Kurve seien für gewisse Werte von $y' = \lambda$ die drei Gleichungen

$$(14^*) \qquad f(x, y, \lambda) = 0,$$

$$(15^*) \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, \lambda) = 0,$$

$$(16^*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \lambda) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$

erfüllt. Ist dann dies λ gleichzeitig der Richtungstangens der Kurvenpunkte? Differentiation der ersten Gleichung liefert wegen (15*) wie vorhin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \lambda) + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0.$$

Und daher folgt aus (16*)

$$\left(\frac{dy}{dx} - \lambda\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0.$$

Daraus kann man auf $\frac{dy}{dx} = \lambda$ schließen, falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) \neq 0$. Diese Bedingung tritt also noch zu (14*) bis (16*) hinzu, und alle vier Gleichungen zusammen sind dann hinreichend dafür, daß die Diskriminantenkurve singuläre Lösung ist.

Bei diesen Betrachtungen haben wir uns also auf die Differentialgleichung (14) beschränkt, für die $\frac{\partial f}{\partial y'}$ existiert und stetig ist, und daran wollen wir auch festhalten. Dann läßt sich feststellen, daß jedenfalls alle Kurven, die als Einhüllende einer Schar von Integralkurven auftreten können, als singuläre Lösungen anzusprechen sind. Es wäre aber ein Irrtum, zu glauben, daß umgekehrt jede singuläre

Lösung als Einhüllende aufgefaßt werden kann. Zum Beispiel läßt sich zeigen, daß bei der Clairautschen Gleichung die Wendetangenten der Einhüllenden der Geradenschar auch zu den singulären Lösungen gehören, obwohl sie doch sicher nicht als von Geraden der Schar eingehüllt angesehen werden können. Ein anderes Beispiel wird durch die Differentialgleichung

$$y'^2 = y^3 \quad \text{mit den Lösungen} \quad y = \frac{4}{(x+c)^2}$$

und der singulären Lösung $y = 0$ geliefert. Diese ist offenbar gemeinsame Asymptote der erstgenannten Kurven, während sie von keiner derselben im Endlichen berührt wird.

3. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir schließen nun einige geometrische Betrachtungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung an. Insbesondere auf die homogenen linearen wollen wir unser Augenmerk richten. Es ist dabei bequem und keine Beschränkung der Allgemeinheit, diese in der Form

$$y'' + \varrho(x)\, y = 0 \tag{17}$$

anzunehmen. Denn durch die Substitution

$$y = z \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^x p(\xi)\, d\xi\right) \tag{18}$$

wird

(19) $y'' + p y' + q y = 0$ in (19') $z'' + z(q - \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p') = 0$

verwandelt.

Ich betrachte nun zunächst den in gewissem Sinne typischen Fall konstanter Koeffizienten. Das Wesentliche, was hier zu sagen ist, ist schon in den formal rechnerischen Betrachtungen von S. 298 f. enthalten. Für positive ϱ treten periodische, für negative nichtperiodische Lösungen auf. Wir hatten nämlich damals ein Fundamentalsystem, bestehend aus den beiden Lösungen

$$y_1 = e^{\sqrt{-\varrho}\, x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-\sqrt{-\varrho}\, x} \tag{20}$$

gefunden. Im Falle $\varrho < 0$ sind beide reell und alle anderen reellen Lösungen in der Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ darstellbar. Man sieht der Differentialgleichung an, daß hier stets y'' und y gleiches Vorzeichen besitzen. Oberhalb wie auch unterhalb der x-Achse verlaufende Stücke einer Lösungskurve kehren daher ihre Wölbung der x-Achse zu, und deshalb kann eine Lösungskurve höchstens ein einziges Mal die x-Achse passieren. Keine Lösung der Differentialgleichung (17) hat also bei negativem ϱ mehr als eine Nullstelle. Beispiele sind etwa die Exponentialkurve selbst oder die bekannten den hyperbolischen Kosinus oder den hyperbolischen Sinus darstellenden Kurven.

Ganz anders im anderen Falle eines positiven ϱ. Hier sind die beiden ein Fundamentalsystem bildenden Lösungen (20) nicht reell. Aber schon in § 2, 3 fanden wir in den beiden Funktionen

$$y_1 = \sin\sqrt{\varrho}\, x, \quad y_2 = \cos\sqrt{\varrho}\, x \tag{21}$$

für diesen Fall ein reelles Fundamentalsystem. Alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho}}$. Die allgemeine Lösung läßt sich auch in folgender Form schreiben:

$$y = C \cdot \sin(\sqrt{\varrho}\, x + D) \tag{22}$$

mit den Integrationskonstanten C und D.

Nun ist es ein leichtes, die entsprechenden Ergebnisse für die allgemeinere Differentialgleichung (19) mit konstanten Koeffizienten anzugeben. Man kann ja ihre Lösungen in die Form (18) setzen, wobei dann z der Differentialgleichung (19′) genügt. Ist dann $q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' < 0$, so ist z aperiodisch und besitzt höchstens eine Nullstelle. Ist aber $q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' > 0$, so ist z periodisch. Diese Periodizität wird dann durch den Faktor $\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x p(\xi)\, d\xi\right)$ beeinflußt. Dieser läßt natürlich die Nullstellen ungeändert, verändert aber die Amplituden der einzelnen Wellen, indem er sie für wachsende x zur Abnahme gegen Null oder zum Wachstum über jede Grenze veranlaßt, je nachdem ob p positiv ist oder negativ. Auch im Falle einer aperiodischen Lösung beeinflußt dieser „Dämpfungsfaktor" das Wachstum der Lösung.

Rein qualitativ lassen sich die bei der Differentialgleichung (17) für konstantes ϱ gewonnenen Ergebnisse sofort in weitem Umfang auf solche Differentialgleichungen (17) übertragen, in welchen für ein Intervall $x > a$ die Funktion ϱ von einerlei Vorzeichen ist. Wenn nämlich in diesem Intervall $\varrho < 0$ bleibt, so müssen wieder y'' und y stets von einerlei Vorzeichen sein, und dann kann keine Lösung mehr als eine Nullstelle im Intervall haben.

Im Falle $\varrho > 0$ sieht man zwar wieder, daß jede Lösung ihre Höhlung der x-Achse zukehrt, aber man kann doch daraus nicht schließen, daß alle Lösungen oszillieren, d. h. öfters die x-Achse passieren. So hat ja z. B. die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\, y = 0 \quad \text{die Lösung} \quad y = \sqrt{x},$$

und die besitzt für große x überhaupt keine Nullstelle. Das Verhalten der Lösungen wird also wesentlich durch das asymptotische

Verhalten von $\varrho(x)$ für große x bestimmt sein. Man kann darüber schöne Ergebnisse gewinnen. Doch wollen wir erst im Abschnitt über das Oszillationstheorem VII, § 3 diese Untersuchungen wieder aufnehmen.

§ 4. Lineare Differentialgleichungen

1. Singuläre Stellen. Wir wollen jetzt die linearen Differentialgleichungen ausführlicher und systematischer untersuchen und stellen dabei Betrachtungen voran, bei denen wir von komplexen Veränderlichen und gewissen im III. Kapitel behandelten funktionentheoretischen Hilfsmitteln Gebrauch machen. In der Gleichung

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{1}$$

mögen daher jetzt die Koeffizienten analytische Funktionen der komplexen Variablen z sein. Zunächst gilt die Feststellung, daß die Lage der singulären Stellen, welche die Lösungen aufweisen können, durch die Differentialgleichung allein bestimmt ist und nicht von den Anfangsbedingungen abhängt, die die einzelne Lösung festlegen. Der Beweis ergibt sich unschwer aus dem Existenzsatz. Denn wenn die Koeffizienten in der Umgebung einer Stelle regulär sind, so sind auch irgend zwei ein Fundamentalsystem bildende Lösungen und damit auch alle Lösungen dort regulär.

Auch über die Natur der Singularitäten kann man leicht Aufschluß gewinnen. Wir beschränken uns dabei auf isolierte eindeutige singuläre Stellen der Koeffizienten, also Pole oder wesentlich singuläre Stellen. Ich wähle nun irgend zwei Lösungen von (1) aus, die ein Fundamentalsystem bilden mögen, w_1 und w_2. In der Umgebung einer beliebig gewählten regulären Stelle z_0 kann man w_1 und w_2 nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln. Die Reihen konvergieren in einem um z_0 geschlagenen bis zur nächsten singulären Stelle der Differentialgleichung reichenden Kreise. Nach den Regeln der analytischen Fortsetzung sollen jetzt diese beiden Potenzreihen auf einem beliebigen von z_0 ausgehenden Wege fortgesetzt werden. Das geschieht dadurch, daß man zunächst in einer auf dem Wege liegenden, ihren Konvergenzkreisen angehörigen Stelle z_1 beide Reihen nach Potenzen von $z - z_1$ entwickelt. So erhält man zwei neue Potenzreihen, die analytischen Fortsetzungen der für die Umgebung von z_0 erhaltenen. Der Konvergenzkreis derselben kann stückweise über die Peripherie der bei z_0 erhaltenen hinausreichen. In dem gemeinsamen Teile der zu z_0 und der zu z_1 gehörigen Konvergenzkreise genügen natürlich auch die neuen Reihen der Differentialgleichung, und daher sind sie nach den Regeln der analytischen Fortsetzung auch in ihrem ganzen Konvergenz-

kreis wieder Lösungen. Man nennt sie die analytischen Fortsetzungen der ursprünglichen Reihen. Diese neuen Reihen kann man ihrerseits durch Einführung eines neuen Entwicklungsmittelpunktes wieder fortsetzen. Insbesondere möge nun diese Fortsetzung auf einem geschlossenen, also wieder zu z_0 zurückführenden Wege geschehen. Die Frage ist, ob man bei der Rückkehr zu z_0 wieder die Potenzreihen erhält, von denen man ausging, oder andere. Die Ausgangspotenzreihen kehren sicher dann wieder, wenn der Weg, längs dem die Fortsetzung erfolgte, keine singuläre Stelle der Differentialgleichung umschließt. Denn dann gibt es zwei in dem umschlossenen Gebiet reguläre Funktionen w_1 und w_2, deren Entwicklungen bei z_0 mit den gegebenen Entwicklungen übereinstimmen. Anders aber, wenn der geschlossene Weg eine singuläre Stelle umschließt; dann hat man nicht Lösungen zur Verfügung, die im umschlossenen Gebiet regulär sind. Man kann jetzt nur schließen, daß jedenfalls bei der Rückkehr zu z_0 wieder zwei Potenzreihen erscheinen, die auch der Differentialgleichung genügen, die sich daher linear durch die Potenzreihen darstellen lassen müssen, von denen wir ausgingen. Denn diese bilden ja in der Umgebung von z_0 ein Fundamentalsystem. Die so erhaltenen neuen Potenzreihen seien dann

$$(2) \qquad w_1^* = a w_1 + b w_2, \quad w_2^* = c w_1 + d w_2.$$

Wir wollen sagen, w_1 und w_2 hätten bei dem Umlauf um die singuläre Stelle eine lineare Substitution erlitten. Denn sie gehen dabei in die angeschriebenen linearen Funktionen ihrer Ausgangsbestimmungen über. Daß übrigens analytische Funktionen bei Fortsetzung längs geschlossenen Wegen unter Umständen nicht zum Ausgangswert zurückkehren, ist eine bei mehrdeutigen Funktionen allgemein geläufige Erscheinung. Durch sie unterscheiden sich ja gerade die mehrdeutigen Funktionen von den eindeutigen. Die Determinante der Koeffizienten muß natürlich bei der Substitution (2) von Null verschieden sein, denn die beiden neuen Lösungen bilden sicher wieder ein Fundamentalsystem. Wäre nämlich ihr Quotient nach vollzogenem Umlauf konstant, so müßte er nach den Sätzen über analytische Fortsetzung auch vorher konstant gewesen sein. Dann wären aber w_1 und w_2 nicht die beiden Funktionen eines Fundamentalsystems. Kennt man aber nun für irgendein Fundamentalsystem die einem Umlauf entsprechende Substitution, so kennt man sie auch für jede andere Lösung, da man dieselbe ja aus dem Fundamentalsystem linear aufbauen kann. Daher darf man zur Berechnung der Umlaufsubstitution das Fundamentalsystem noch zweckmäßig auswählen. Wir wollen insbesondere versuchen, ein multiplikatives Fundamentalsystem zu nehmen, d. h. ein System von Funktionen, die sich beim Umlauf mit konstanten

Faktoren multiplizieren. Sei λ ein solcher Faktor, so gilt es α, β und λ so zu bestimmen, daß

$$\alpha(a w_1 + b w_2) + \beta(c w_1 + d w_2) = \lambda(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

ist. Ordnet man diese Gleichung nach den w_1 und w_2, so erkennt man, daß sie, mit Rücksicht auf die Eigenschaft der w_1 und w_2, ein Fundamentalsystem zu bilden, nur dann bestehen kann, wenn die beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \alpha(a-\lambda) + \beta c = 0, \quad \alpha b + \beta(d-\lambda) = 0$$

erfüllt sind. Das ist aber für solche α und β, die nicht beide verschwinden, nur dann möglich, wenn

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ist. Hieraus hat man λ zu bestimmen, um dann aus (3) α und β zu entnehmen. — Bei dieser orientierenden Betrachtung wollen wir für einen Augenblick die Umlaufsubstitution der w_1 und w_2, also die a, b, c, d als schon bekannt ansehen. Gerade die Ergebnisse der jetzt anzustellenden Betrachtung werden uns hernach in die Lage versetzen, diese aufzufinden. Vorläufig wollen wir nur erst die Existenz multiplikativer Lösungen einsehen. — Wir berechnen also λ aus (4), bestimmen dann α und β aus (3) und haben nun den beiden Lösungen λ_1, λ_2 von (4) entsprechend zwei multiplikative Lösungen, wenn nicht (4) eine Doppelwurzel hat.

Prüfen wir nun die Verhältnisse noch etwas genauer. Zunächst sei angenommen, daß die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 von (4) verschieden sind. w_1 und w_2 mögen dann schon die beiden multiplikativen Lösungen sein. Sie bilden sicher ein Fundamentalsystem, weil ja, wegen der Verschiedenheit von λ_1 und λ_2, ihr Quotient nicht konstant sein kann. Die Funktion $(z-a)^{r_1}$, wo $r_1 = \frac{\log \lambda_1}{2\pi . i}$ ist, erhält beim Umlauf um a gleichfalls den Faktor λ_1. Daher bleibt $\frac{w_1(z)}{(z-a)^{r_1}}$ beim Umlauf ungeändert, wenn w_1 etwa die Lösung ist, die beim Umlauf den Faktor λ_1 erhält. Dieser Quotient kann somit in der Umgebung von $z = a$ in eine Laurentreihe entwickelt werden, und man erkennt, daß eine jede multiplikative Lösung von der Form

$$(5) \qquad (z-a)^r \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

ist. Demnächst wird dann festzustellen sein, wie man den Exponenten r und wie man die Koeffizienten der Laurentreihe aus der Differentialgleichung heraus wirklich ermitteln kann. Vorab müssen wir aber

noch den Fall prüfen, daß die „Fundamentalgleichung" (4) eine Doppelwurzel hat.

In diesem Falle führt die eben angestellte Betrachtung eben nur auf eine multiplikative Lösung, und wir müssen uns zur Vervollständigung des Fundamentalsystems noch nach einer anderen Lösung umsehen. Das neue Fundamentalsystem erfährt dann beim Umlauf eine Substitution

$$W_1 = \lambda_1 w_1, \quad W_2 = c w_1 + d w_2. \tag{6}$$

Die zu dieser gehörige Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & c \\ 0 & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

muß nun natürlich auch eine Doppelwurzel haben. Daher muß $d = \lambda_1$ sein, und das neue Fundamentalsystem erfährt also eine Substitution

$$W_1 = \lambda_1 w_1, \quad W_2 = c w_1 + \lambda_1 w_2. \tag{8}$$

Der Quotient w_2/w_1 hat daher diese Umlaufsubstitution:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{c}{\lambda_1}, \tag{9}$$

erfährt also beim Umlauf denselben Zuwachs c/λ_1, den auch die Funktion $\frac{c}{\lambda_1 2\pi i} \log(z-a)$ beim gleichen Umlauf erleidet. Daher bleibt die Differenz beider, d. i. $\frac{w_2}{w_1} - \frac{c}{\lambda_1 . 2\pi i} \log(z-a)$, beim Umlauf ungeändert. So erkennt man, daß jedenfalls die Lösung w_2 eine Reihenentwicklung

$$(z-a)^{r_1} \left\{ A \log(z-a) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \right\} \tag{10}$$

besitzen muß.

2. Stellen der Bestimmtheit. Unsere Betrachtung hat uns so einen Anhaltspunkt für eine möglichst einfache Gestalt von sicher möglichen Reihenentwicklungen gegeben. Wir müssen nun unter Verwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten mit diesen Lösungen in die Differentialgleichung hineingehen und versuchen, die Koeffizienten und die Exponenten wirklich zu bestimmen. Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle: der erste soll der sein, in welchem die beiden in den beiden Funktionen des Fundamentalsystems vorkommenden Laurentreihen nur endlich viele Glieder mit negativen Exponenten besitzen. Dann sagen wir, es liege eine außerwesentlich singuläre Stelle vor; auch der Name Stelle der Bestimmtheit ist in Gebrauch. In allen anderen Fällen sprechen wir von einer wesentlich singulären Stelle oder auch Unbestimmtheitsstelle. Man kann der

Differentialgleichung sofort ansehen, ob eine außerwesentliche oder eine wesentlich singuläre Stelle vorliegt. Wenn nämlich die beiden Funktionen w_1 und w_2 des Fundamentalsystems Laurentreihen mit nur endlich vielen negativen Exponenten enthalten, so kann man den Quotienten w_2/w_1 als Reihe von der folgenden Form ansetzen:

$$\frac{w_2}{w_1} = (z-a)^{r_2-r_1}\{A\log(z-a) + (z-a)^{\nu}\mathfrak{P}(z-a)\}. \tag{11}$$

ν ist eine nichtpositive ganze Zahl und $\mathfrak{P}(z-a)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Potenzreihe, deren Absolutglied nicht verschwindet. A ist nur dann von Null verschieden, wenn $r_1 = r_2$ ist. Bei der Herleitung dieses Ergebnisses hat man sich der Tatsache zu erinnern, daß das Reziproke einer Laurentreihe mit nur endlich vielen Gliedern negativer Potenz sich als gewöhnliche Potenzreihe darstellen läßt. Trägt man nun aber die beiden Lösungen w_1 und w_2 in die lineare Differentialgleichung ein, so erhält man

$$w_1'' + pw_1' + qw_1 = 0, \quad w_2'' + pw_2' + qw_2 = 0. \tag{12}$$

Daraus findet man sofort

$$p = -\frac{w_2 w_1'' - w_1 w_2''}{w_2 w_1' - w_1 w_2'} = -\frac{d}{dz}\left[\log\left\{w_1^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right\}\right]. \tag{13}$$

Nun folgt aber aus (11), daß

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) &= (r_2-r_1)(z-a)^{r_2-r_1-1}\{A\log(z-a)\} \\ &\quad + (r_2-r_1)(z-a)^{r_2-r_1-1+\nu}.\mathfrak{P}(z-a) \\ &\quad + A(z-a)^{r_2-r_1-1} + \nu(z-a)^{r_2-r_1+\nu-1}\mathfrak{P}(z-a) \\ &\quad + (z-a)^{r_2-r_1+\nu}\mathfrak{P}'(z-a) \\ &= (r_2-r_1)(z-a)^{r_2-r_1-1}A\log(z-a) + (z-a)^{\lambda}\mathfrak{P}_1(z-a) \end{aligned}\right. \tag{14}$$

ist, und aus (5), daß

$$w_1^2 = (z-a)^{r_1+\mu}.\mathfrak{P}_2(z-a).$$

Hier sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ neue gewöhnliche Potenzreihen mit nicht verschwindenden Absolutgliedern, und μ und λ sind passende Zahlen. In der Darstellung von $\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$ kommt aber nun tatsächlich kein logarithmisches Glied vor. Denn entweder ist $A = 0$, oder es ist $r_2 = r_1$. Daher kann man schreiben

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = (z-a)^{\lambda}\mathfrak{P}_1(z-a).$$

Die logarithmischen Ableitungen hiervon sowie von w_1^2 besitzen also bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung. Daher hat nach (13)

auch $p(z)$ bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung, wenn diese Stelle eine der Bestimmtheit sein soll. Für $q(z)$ kann man ein ähnliches Resultat ableiten. Denn aus der Gl. (12) für w_1 entnimmt man

$$q = -\frac{w_1''}{w_1} - p\frac{w_1'}{w_1}. \tag{15}$$

Nun aber ist nach (5)

$$w_1 = (z-a)^{r_1+\gamma} \cdot \mathfrak{P}_3(z-a), \tag{16}$$

wo $\mathfrak{P}_3(0) \neq 0$ und γ eine nichtpositive ganze Zahl ist. Daher hat w_1'/w_1 bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung, während der von w_1''/w_1 höchstens von der zweiten Ordnung ist. Daher hat q einen Pol von höchstens der zweiten Ordnung. Somit haben wir das Ergebnis: Wenn die Stelle $z = a$ eine Stelle der Bestimmtheit ist, so läßt sich in der Umgebung derselben die Differentialgleichung so darstellen:

$$w'' + \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{z-a}w' + \frac{\mathfrak{P}_2(z-a)}{(z-a)^2}w = 0. \tag{17}$$

Hier sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen, deren Absolutglieder nun aber im Gegensatz zu dem im ganzen Paragraphen sonst festgehaltenen Brauch bei $z = a$ auch einmal verschwinden dürfen. Allerdings muß wenigstens einer der Koeffizienten bei $z = a$ wirklich eine singuläre Stelle besitzen, da sonst nach den Existenzsätzen in der Umgebung von $z = a$ alle Lösungen regulär wären. Differentialgleichungen, deren sämtliche singulären Stellen isolierte Stellen der Bestimmtheit sind, nennt man Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse. Bei diesen Differentialgleichungen muß also auch der unendlich ferne Punkt eine Stelle der Bestimmtheit sein. Die dort vorliegenden Verhältnisse untersucht man bekanntlich, indem man die Stelle $z = \infty$ durch die Substitution $z = \frac{1}{\mathfrak{z}}$ ins Endliche nach $\mathfrak{z} = 0$ bringt. Die Durchführung dieser Rechnung lehrt, daß der unendlich ferne Punkt jedenfalls nur dann eine Stelle der Bestimmtheit sein kann, wenn die Differentialgleichung in seiner Umgebung so aussieht:

$$w'' + \frac{1}{z}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)w' + \frac{1}{z^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)w = 0. \tag{18}$$

Man beachte wohl, daß wir so nur notwendige Bedingungen für das Vorliegen einer Stelle der Bestimmtheit gewonnen haben. Ob eine Stelle, die diesen Bedingungen genügt, nun wirklich eine Stelle der Bestimmtheit ist, bedarf durchaus noch der Untersuchung. Die Antwort lautet, daß die Bedingungen tatsächlich auch hinreichen, und sie wird sich aus dem Folgenden ergeben.

3. Methode der unbestimmten Koeffizienten. Nach den bisherigen Darlegungen werden wir nun in der Umgebung einer Stelle, wo die Koeffizienten der angegebenen Bedingung genügen, versuchen, der Differentialgleichung durch eine Reihe der Form (5) zu genügen. Wir nehmen erst an, es gäbe eine solche der Differentialgleichung genügende gleichmäßig konvergente Reihe, und werden von da aus die notwendigen Werte ihrer Koeffizienten bestimmen. Hernach wird noch festzustellen sein, daß die gefundene Reihe in einer gewissen Umgebung von $z = a$ wirklich konvergiert. Setzen wir abkürzend

$$(19)\quad \begin{cases} L(w) = (z-a)^2 w'' + (z-a)\mathfrak{P}_1(z-a)\,w' + \mathfrak{P}_2(z-a)\,w, \\ \mathfrak{P}_1(z-a) = \Sigma\,\alpha_i (z-a)^i, \quad \mathfrak{P}_2(z-a) = \Sigma\,\beta_i (z-a)^i, \end{cases}$$

so wird zunächst allgemein

$$(20)\qquad L\{(z-a)^\lambda\} = (z-a)^\lambda \cdot f(z, \lambda),$$

und hier ist

$$(21)\qquad f(z, \lambda) = \sum_0^\infty f_k(\lambda)(z-a)^k,$$

$$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda\,\alpha_0 + \beta_0, \quad f_k(\lambda) = \lambda\,\alpha_k + \beta_k \quad (k = 1, 2, 3 \ldots).$$

Für (5) wird also noch eine nach λ genommene Summe solcher Ausdrücke herauskommen. Ordnet man das nach Potenzen von $(z-a)$ und beachtet, daß $L(w)$ für alle $z-a$ verschwinden soll, so folgen aus dem Verschwinden aller Koeffizienten die folgenden unendlich vielen linearen Gleichungen für die unendlich vielen unbekannten Koeffizienten:

$$(22)\qquad \begin{cases} a_0 f_0(r) = 0, \quad a_1 f_0(r+1) + a_0 f_1(r) = 0, \\ a_2 f_0(r+2) + a_1 f_1(r+1) + a_0 f_2(r) = 0 \cdots. \end{cases}$$

Bestimmt man nun r aus der „Fundamentalgleichung“

$$(23)\qquad f_0(r) = r(r-1) + r\,\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

und läßt a_0 willkürlich, so kann man aus der zweiten Gleichung a_1, aus der nächsten a_2 usw. bestimmen, es sei denn, daß für die gewählte Wurzel r der Gleichung $f_0(r) = 0$ noch ein $f_0(r+k) = 0$ sein sollte. In diesem Falle, wo also die Differenz der beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine ganze Zahl ist, wähle man als Wert r diejenige Wurzel, welche den größeren Realteil besitzt. Alsdann gelingt die Bestimmung der a_ν auf die angegebene Weise. Die willkürliche Größe a_0 ist dabei weiter nichts als der bei der Lösung einer linearen homogenen Gleichung auftretende Proportionalitätsfaktor. Mit dem nun noch ausstehenden Beweis für die Konvergenz der gefundenen Reihe will ich mich hier nicht näher befassen. Es mag

der Hinweis genügen, daß die Reihe tatsächlich in der Umgebung von $z = a$ konvergiert. Für den Fall also, wo die charakteristische Gleichung zwei Wurzeln besitzt, deren Differenz keine ganze Zahl ist, haben wir zwei ein Fundamentalsystem bildende Lösungen mit außerwesentlich singulären Stellen gefunden. Damit ist dann in diesem Falle auch erkannt, daß die betreffende Stelle tatsächlich eine Stelle der Bestimmtheit ist. Für die Größe des Konvergenzradius ergibt sich aus allgemein funktionentheoretischen Erwägungen dann sofort das Ergebnis, daß die Reihen in einem um $z = a$ geschlagenen Kreise konvergieren müssen, dessen Peripherie durch die zunächst bei $z = a$ gelegene weitere singuläre Stelle der Differentialgleichung hindurchgeht. Über die Güte der Konvergenz würde der unterdrückte Konvergenzbeweis nur das Ergebnis liefern, daß die Reihe mindestens so gut wie eine geometrische Reihe konvergiert. Was nun die Bestimmung der unter Umständen noch fehlenden zweiten Lösung des Fundamentalsystems anlangt, so verweise ich kurz darauf, daß wir ja schon in § 2, 4 gelernt haben, wie man nach Kenntnis einer Lösung der Differentialgleichung eine weitere, mit ihr ein Fundamentalsystem bildende durch Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung finden kann. Die Durchführung der Rechnung lehrt, daß diese andere Lösung gerade die auf S. 320 angegebene Gestalt (10) mit logarithmischem Gliede besitzt. Zur Bestimmung dieser weiteren Lösung ist es aber oft bequemer, statt dieses Weges wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu verwenden, also mit einer Reihe von der voraussichtlich sich ergebenden Gestalt in die Differentialgleichung hineinzugeben.

4. Besselsche Differentialgleichung. Am Beispiel der Besselschen Differentialgleichung möge dies noch kurz erläutert werden. Das ist die Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) w = 0. \tag{24}$$

Sie besitzt bei $z = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit. Die charakteristische Gleichung wird hier $r(r-1) + r - n^2 = 0$. Sie hat also die Wurzeln $r_1 = n$ und $r_2 = -n$. Wir wollen n so wählen, daß $\Re(n) \geqq \Re(-n)$ ist. Die oben dargelegte Methode der unbestimmten Koeffizienten ergibt, wenn n keine ganze Zahl ist, zwei Lösungen, die sich aus der folgenden Reihe ergeben, indem man darin m durch n oder durch $-n$ ersetzt:

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(m+1)\ldots(m+k)} \cdot z^{2k+m}. \tag{25}$$

a_0 ist dabei der vorhin noch willkürlich gebliebene Faktor. In der Theorie der Besselschen Funktion pflegt man ihn gleich $\frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}$ zu setzen und nennt Besselsche Funktion n-ter Ordnung die folgende Lösung der Differentialgleichung:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \tag{25'}$$

Die Funktionen $J_n(z)$ und $J_{-n}(z)$ bilden dann ein Fundamentalsystem. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, verliert die Reihe $J_{-n}(z)$ ihren Sinn, weil einzelne Koeffizienten unendlich würden. Wir wissen ja auch bereits, daß wir uns jetzt nach einer zweiten Lösung, die mit $J_n(z)$ ein Fundamentalsystem bildet, umsehen müssen. Eine solche zweite Lösung findet man am bequemsten, indem man in die Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$w_2 = z^n \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m \log z) z^m \tag{26}$$

hineingeht. Man erhält dann als zweite Lösung nach C. Neumann für $n > 0$

$$\left\{\begin{aligned} & J_n(z) \log \operatorname{nat} z - \Bigg[2^{n-1}(n-1)!\, z^{-n} + \frac{2^{n-3}(n-2)!\, z^{-n+2}}{1!} \\ & \quad + \frac{2^{n-5}(n-3)!\, z^{-n+4}}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\Bigg] \\ & \quad - \frac{z^n}{2^{n+1} n!} \sum_1^n \frac{1}{\nu} \\ & \quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{\nu+1} z^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu+1} \nu!\,(n+\nu)!} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu} + \sum_{\varrho=1}^{n+\nu} \frac{1}{\varrho}\right)\right]^{1)} \end{aligned}\right. \tag{26'}$$

Im Falle $n = 0$ ist in (26') die erste eckige Klammer und der darauffolgende Summand wegzulassen.

Der vorhin erwähnte allgemeine Weg würde zu dieser Reihe nur nach mühsamer Rechnung führen.

5. Hypergeometrische Differentialgleichung. Unter den Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse ist die einfachste, ein wesentliches Interesse bietende, die hypergeometrische. Differentialgleichungen nämlich, deren Koeffizienten gar keine Singularitäten besitzen, sind nur

[1]) Diese Lösung ist um $(C - \log \operatorname{nat} 2) \cdot J_n(x)$ von dem $\pi/2$-fachen der in VIII, § 3, 2, (11) definierten Funktion $Y_n(x)$ verschieden. C bedeutet dabei die Eulersche Konstante [IV, § 7, (11)].

die mit konstanten Koeffizienten. Diese gehören aber nicht zur Fuchsschen Klasse. Differentialgleichungen mit nur einer singulären Stelle im Endlichen haben die Form (20) von S. 298 und sind damals schon auf die mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt worden. Sie haben im allgemeinen noch eine singuläre Stelle im Unendlichen. Somit ist der nächst einfachste Fall der mit drei singulären Stellen. Wir wollen sie bei 0, 1, ∞ annehmen. Die Wurzeln der drei zugehörigen Fundamentalgleichungen mögen

$$(r_{01}, r_{02}),\quad (r_{11}, r_{12}),\quad (r_{\infty 1}, r_{\infty 2}) \tag{27}$$

sein. Seit Riemann nennt man die Lösung einer solchen Differentialgleichung P-Funktion und schreibt sie so:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ r_{01} & r_{11} & r_{\infty 1} & z \\ r_{02} & r_{12} & r_{\infty 2} & \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Durch eine Substitution der Form $w = z^{\lambda}(1-z)^{\mu} W$ erreicht man, daß bei 0 und bei 1 je eine der Wurzeln der Fundamentalgleichungen verschwindet. Die beiden charakteristischen Wurzeln bei ∞ nennt man α und β, und man hat sich gewöhnt, die zweite Wurzel bei 0 mit $1-\gamma$ zu bezeichnen. Die zweite bei 1 wird dann $\gamma-\alpha-\beta$, weil die Summe aller 1 sein muß, wie man mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes zeigen kann. Das Symbol der P-Funktion wird dann

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{pmatrix}, \tag{29}$$

und die Differentialgleichung sieht so aus:

$$w'' + \frac{-\gamma + (1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} w = 0. \tag{30}$$

Man nennt sie aus einem noch darzulegenden Grunde die hypergeometrische Differentialgleichung.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Lösungen in der Umgebung der singulären Punkte zu untersuchen. Ich beginne mit $z = 0$. Zunächst werde angenommen, daß γ keine negative ganze Zahl ist. Dann gehört zu der Fundamentalwurzel Null ein bei $z = 0$ reguläres Integral. Man darf annehmen, daß es bei $z = 0$ den Wert Eins hat. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert dann diese Reihendarstellung:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\quad \gamma(\gamma+1)} z^2 + \cdots \tag{31}$$

Sie heißt die hypergeometrische Reihe, weil sie für $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ in die geometrische übergeht. Ihr Konvergenzkreis ist der Einheitskreis.

Zur Berechnung der zweiten mit $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ bei $z = 0$ ein Fundamentalsystem bildenden Lösung führt die folgende Bemerkung: Macht man in (30) die Substitution $W = z^{\gamma-1} w$, so erhält man eine neue hypergeometrische Differentialgleichung. Denn die Fundamentalwurzeln werden jetzt: Bei $z = 0$: $\gamma - 1, 0$, bei $z = 1$: $0, \gamma - \alpha - \beta$, bei $z = \infty$: $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$. Setzt man daher $\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1$, $\beta_1 = \beta - \gamma + 1$, $\gamma_1 = 2 - \gamma$, so genügt der neuen Differentialgleichung $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$. Die gesuchte zweite Lösung bei $z = 0$ wird daher

$$z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \quad \beta - \gamma + 1, \quad 2 - \gamma, z). \tag{32}$$

Die Untersuchung der Stelle $z = 1$ führt man durch die Substitution $\zeta = 1 - z$ auf $\zeta = 0$ zurück. So findet man die beiden zu $z = 1$ gehörigen Lösungen

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, \ 1 + \alpha + \beta - \gamma, \ 1 - z), \\ (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} . F(\gamma - \beta, \ \gamma - \alpha, \ 1 - \alpha - \beta + \gamma, \ 1 - z). \end{cases} \tag{33}$$

Die Substitution $\zeta = \dfrac{1}{z}$ führt analog zu den Lösungen

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \ 1 + \alpha - \beta, \ \dfrac{1}{z}\right), \\ \left(\dfrac{1}{z}\right)^{\beta} F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, \ 1 + \beta - \alpha, \ \dfrac{1}{z}\right), \end{cases} \tag{34}$$

welche zu $z = \infty$ gehören.

6. Normalreihen. Bei Betrachtung einer Unbestimmtheitsstelle dürfen wir voraussetzen, daß diese Stelle bei $z = \infty$ liegt, wir nehmen noch an, daß dort die Koeffizienten nicht die Gestalt (18) besitzen. Der einfachste Fall ist dann der, daß in (1) $\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = p_0$, $\lim\limits_{z \to \infty} q(z) = q_0$ gilt, daß also $p(z)$ und $q(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ durch dort konvergente Reihen

$$\begin{cases} p(z) = p_0 + \dfrac{p_1}{z} + \dfrac{p_2}{z^2} + \cdots \\[2ex] q(z) = q_0 + \dfrac{q_1}{z} + \dfrac{q_2}{z^2} + \cdots \end{cases} \tag{35}$$

dargestellt werden. Hierher gehört z. B. die Besselsche Differentialgleichung (24). Es liegt dann außerordentlich nahe, die Lösungen von (1) mit denen der Differentialgleichung

$$w'' + p_0 w' + q_0 w = 0 \tag{36}$$

und konstanten Koeffizienten in Zusammenhang zu bringen.

Nehmen wir an, daß die quadratische Gleichung

$$\varrho^2 + p_0\varrho + q_0 = 0 \tag{37}$$

die beiden verschiedenen Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 besitzt, so bilden $e^{\varrho_1 z}$ und $e^{\varrho_2 z}$ ein Fundamentalsystem für (36). Machen wir dann in (1) den Ansatz

$$w = e^{\varrho z} v,$$

wo ϱ eine der beiden Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 sein möge, so finden wir für v die Differentialgleichung

$$v'' + r(z)v' + s(z)v = 0, \tag{38}$$

wo

$$r(z) = 2\varrho + p(z) = 2\varrho + p_0 + \frac{p_1}{z} + \cdots$$

$$s(z) = \varrho^2 + \varrho\, p(z) + q(z) = \frac{\varrho\, p_1 + q_1}{z} + \frac{\varrho\, p_2 + q_2}{z^2} + \cdots$$

ist. $z = \infty$ ist keine Stelle der Bestimmtheit, denn es ist $2\varrho + p_0 \neq 0$, da ϱ_1 und ϱ_2 verschieden angenommen worden sind. Merkwürdigerweise führt der Ansatz

$$v = c_0 z^\sigma + c_1 z^{\sigma-1} + \cdots \tag{39}$$

zu einer Bestimmung der Koeffizienten c_i und von σ derart, daß (38) formal erfüllt wird. Setzt man nämlich (39) in (38) ein, ordnet nach Potenzen von z und setzt die Koeffizienten der allein vorkommenden Potenzen $z^{\sigma-1}, z^{\sigma-2}\ldots$ einzeln Null, so erhält man die folgenden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&[(2\varrho + p_0)\sigma + (\varrho\, p_1 + q_1)]\, c_0 = 0\\
&[(2\varrho + p_0)(\sigma - 1) + (\varrho\, p_1 + q_1)]\, c_1 + [\sigma(\sigma-1) + p_1\sigma + \varrho\, p_2 + q_2]\, c_0 = 0\\
&\vdots\\
&[(2\varrho + p_0)(\sigma - k) + (\varrho\, p_1 + q_1)]\, c_k + [\cdots]\, c_{k-1} + \cdots + [\cdots]\, c_0 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen entnimmt man σ, da $2\varrho + p_0 \neq 0$ ist. c_0 bleibt willkürlich. Die folgende Gleichung liefert c_1, die nächste c_2 und so fort. Der Koeffizient von c_k ist nämlich $\neq 0$. Wegen $(2\varrho + p_0)\sigma + \varrho\, p_1 + q_1 = 0$ wird er ja $-k(2\varrho + p_0) \neq 0$.

Wir finden so zwei Reihen

$$e^{\varrho z} z^\sigma \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots\right),$$

die formal die Gl. (1) befriedigen. Aber auch nur formal, denn die gefundenen Reihen sind im allgemeinen für alle z divergent, wie schon das Beispiel der Besselschen Differential...

Auch in dem allgemeineren Falle, wo

$$p(z) = z^k\left(p_0 + \frac{p_1}{z} + \cdots\right),$$

$$q(z) = z^{2k}\left(q_0 + \frac{q_1}{z} + \cdots\right)$$

ist, führen ähnliche Überlegungen zu Reihen

$$e^{g(z)} z^\sigma\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots\right),$$

die (1) formal befriedigen. $g(z)$ ist dabei ein passendes Polynom $k+1$-ten Grades. Man nennt diese Reihen nach Thomé Normalreihen.

7. Asymptotische Darstellung. Obwohl die Normalreihen im allgemeinen divergieren, kommt ihnen eine wichtige Rolle für die Erkenntnis des Verhaltens der Lösungen für große $|z|$ zu. Sie stellen nämlich gewisse Lösungen asymptotisch dar. Man sagt nach Poincaré (Acta mathematica VIII, 1886, S. 295—344), eine Reihe

$$e^{\varrho z} z^\sigma\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\right)$$

stelle eine Funktion $f(z)$ für reelle positive z asymptotisch dar, wenn für jedes ganze positive n und für Annäherung von z an ∞ längs der positiv reellen Achse

$$\lim_{z\to\infty} z^n\left[e^{-\varrho z} z^{-\sigma} f(z) - \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}\right)\right] = 0$$

ist.

Liegt dann wieder (1) mit (35) vor und haben die beiden Wurzeln von (37) verschiedene Realteile, so gibt es zwei Lösungen von (1), die durch die beiden (1) genügenden Normalreihen asymptotisch dargestellt werden.

Beweise dieses Satzes finden sich verschiedentlich in der Literatur. Z. B. sehe man eine Arbeit von Perron in Crelles Journal, Bd. 142, ein (1913, S. 254—270).

Auch sonst stellen Normalreihen stets Integrale asymptotisch dar. Wer tiefer eindringen will, muß die in der Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. II, 2, S. 489 ff. genannte Literatur heranziehen.

Im Falle der Besselschen Differentialgleichung (24) findet man die beiden folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$J_n(z) \sim \frac{1}{\sqrt{z}}(u_1 \cos z + u_2 \sin z),$$

$$J_{-n}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{z}}(u_1 \sin z - u_2 \cos \psi),$$

wo

$$u_1 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)}{2^2\,2!\,z^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)\left(\frac{49}{4} - n^2\right)}{2^4 \cdot 4!\,z^4} - \cdots,$$

$$u_2 = \frac{\frac{1}{4} - n^2}{2z} - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)}{2^3 \cdot 3!\,z^3} + \cdots$$

gesetzt ist.

§ 5. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1. Charakteristische Gleichung mit ungleichen Wurzeln. Schon S. 297 sind die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelt worden. Wir wollen nun diese für die Theorie der kleinen Schwingungen wichtige Frage allgemein aufgreifen und Systeme von Gleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachten. Es sei also das System

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

vorgelegt. Die a_{ik} mögen dabei konstante Koeffizienten sein, d. h. von x oder y nicht abhängen. Zur Integration kann man sich eines Ansatzes bedienen, der dem S. 297 herangezogenen ähnlich ist, nämlich

$$(2) \qquad y_1 = A_1 e^{rx}, \quad y_2 = A_2 e^{rx}, \quad \ldots, \quad y_n = A_n e^{rx}.$$

Durch diesen Ansatz gehen die Differentialgleichungen tatsächlich in das folgende System linearer algebraischer Gleichungen über:

$$(3) \qquad \begin{cases} (a_{11} - r)A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n = 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - r)A_2 + \cdots + A_{2n}A_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \cdots + (a_{nn} - r)A_n = 0. \end{cases}$$

Soll es also von Null verschiedene A_i geben, so muß r der Gleichung

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Wir nennen (4) wieder die charakteristische Gleichung des Problems. In dem Falle nun, wo diese Gleichung n verschiedene Lösungen besitzt, ist durch unseren Ansatz das gestellte Problem vollständig gelöst. Zu jeder der Wurzeln r_i gehört dann nämlich eine Lösung, und wir erhalten damit n verschiedene Lösungen:

$$(5)\qquad y_1^{(i)} = A_1^{(i)} e^{r_i x}, \quad \ldots, \quad y_n^{(i)} = A_n^{(i)} e^{r_i x} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

aus denen sich jede andere Lösung linear zusammensetzen läßt, wie folgende Überlegung zeigt. Zunächst ist klar, daß die Lösungen (5) in dem Sinne „verschieden" sind, daß nicht eine als lineare Kombination der übrigen erscheint. Nach den Existenztheoremen ist eine jede Lösung festgelegt durch ihre Werte an einer Stelle x_0. Soll z. B. $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$ sein, so machen wir den Ansatz

$$y_k = B_1 y_k^{(1)} + B_2 y_k^{(2)} + \cdots + B_n y_k^{(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die B die n linearen Gleichungen, die zufolge der Unabhängigkeit der Funktionen (5) sicher lösbar sind,

$$(6)\qquad \begin{cases} y_{10} = B_1 y_1^{(1)}(x_0) + \cdots + B_n y_1^{(n)}(x_0) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n0} = B_1 y_n^{(1)}(x_0) + \cdots + B_n y_n^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

erfüllen müssen. Man kann daher durch lineare Kombination der Lösungen (5) jedes vorgeschriebene System von Anfangswerten und daher jede Lösung herstellen.

2. Fall gleicher Wurzeln. Sind nicht alle Wurzeln der Gl. (4) voneinander verschieden, so müssen weitere Betrachtungen angestellt werden. Wir fassen zunächst den einfacheren, für die Anwendungen in erster Linie in Betracht kommenden Fall ins Auge, daß, sobald eine Nullstelle von (4) m-fach auftritt: $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$, zugleich die Determinante (4) für $r = r_1$ vom Rang $n - m$ wird. In diesem Falle, wo also (II, § 1, 4) die Determinante (4) und ihre Unterdeterminanten $(n-1)$-, $(n-2)$-, ..., $(n - m + 1)$-ter Ordnung für $r = r_1$ gleich Null sind, während mindestens eine Unterdeterminante $(n - m)$-ter Ordnung von Null verschieden ausfällt, gibt es nach II, § 1, 5 genau m linear unabhängige Lösungen des linearen Gleichungssystems (3) für $r = r_1$. Jede Lösung liefert ein partikuläres Integral (und zwar mit dem gleichen Exponenten r_1), so daß man im ganzen

die notwendige Zahl von n partikulären linear unabhängigen Lösunge erhält. Ein einfaches Beispiel ist das folgende:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 2y_2 - 4y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 3y_2 - 2y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 4y_1 - 2y_2 - 6y_3. \end{cases}$$

Die Gl. (4) lautet hier:

$$\begin{vmatrix} 2-r & -2 & -4 \\ 2 & -3-r & -2 \\ 4 & -2 & -6-r \end{vmatrix} = -(r+2)^2(r+3) = 0.$$

Der Wurzel $r = r_1 = r_2 = -2$ entsprechen die Gleichungen: $4A_1 - 2A_2 - 4A_3 = 2A_1 - A_2 - 2A_3 = 4A_1 - 2A_2 - 4A_3 = 0$, woraus $A_2 = 2A_1 - 2A_3$ (A_1, A_3 beliebig) folgt. Das heißt $y_1 = A_1 e^{-2x}$, $y_2 = (2A_1 - 2A_3)\, e^{-2x}$, $y_3 = A_3 e^{-2x}$ (A_1, A_3 beliebig) liefern zwei linear unabhängige Integrale. Für $r = r_3 = -3$ ergibt sich $5A_1 - 2A_2 - 4A_3 = 2A_1 - 2A_3 = 4A_1 - 2A_2 - 3A_3 = 0$, woraus $A_1 = A_3 = 2A_2$ (A_2 beliebig) folgt. Das heißt $y_1 = 2A_2 e^{-3x}$, $y_2 = A_2 e^{-3x}$, $y_3 = 2A_2 e^{-3x}$ (A_2 beliebig) gibt ein drittes Integral.

In II, § 2, ist gezeigt worden, daß die sogenannte Säkulargleichung stets die Eigenschaft besitzt, die hier vorausgesetzt wurde, nämlich, daß der Rang der Determinante sich um die Vielfachheit der Nullstelle erniedrigt. Daraus folgt der für die Schwingungsaufgaben fundamentale Satz: Wenn die Matrix der Koeffizienten a_{ik} in (4) symmetrisch ist, so besteht das allgemeine Integral von (1) aus n Exponentialausdrücken, in deren Exponenten die Wurzeln von (4) (mit ihrer richtigen Vielfachheit) auftreten.

Im allgemeinen Falle, wo einer m-fachen Nullstelle r von (4) nicht wie oben ein System (3) vom Rang $n - m$, sondern ein solches vom Rang $n - \nu$ entspricht (ν kleiner als m), besitzt das System (3) nur ν linear unabhängige Lösungen. In diesem Falle fehlen also noch $m - \nu$ linear unabhängige Lösungen zum Fundamentalsystem. Handelt es sich z. B. um die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3, \end{cases}$$

so lautet (4):

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0.$$

Der Wurzel $r = r_1 = 6$ entsprechen die Gleichungen $-4A_1 + 2A_2 - A_3 = -2A_1 - 2A_2 + A_3 = -3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0$ mit der Lösung $A_1 = 0$, $2A_2 = A_3$ beliebig, d. h. $y_1 = 0$, $y_2 = A_2 e^{6x}$, $y_3 = 2A_2 e^{6x}$ (A_2 beliebig). Der zweifachen Wurzel $r = r_2 = r_3 = 1$ entspricht nun das System $A_1 + 2A_2 - A_3 = -2A_1 + 3A_2 + A_3 = -3A_1 + 8A_2 + A_3 = 0$, das die einzige Lösung $A_1 = 5A_2$, $A_3 = 7A_2$ (A_2 beliebig) besitzt, und wir erhalten auf diesem Wege bloß die eine partikuläre Lösung $y_1 = 5A_2 e^x$, $y_2 = A_2 e^x$, $y_3 = 7A_2 e^x$ (A_2 beliebig). Um eine dritte Lösung zu gewinnen, machen wir den neuen Ansatz

$$y_1 = (A_1 x + B_1)e^x, \quad y_2 = (A_2 x + B_2)e^x, \quad y_3 = (A_3 x + B_3)e^x,$$

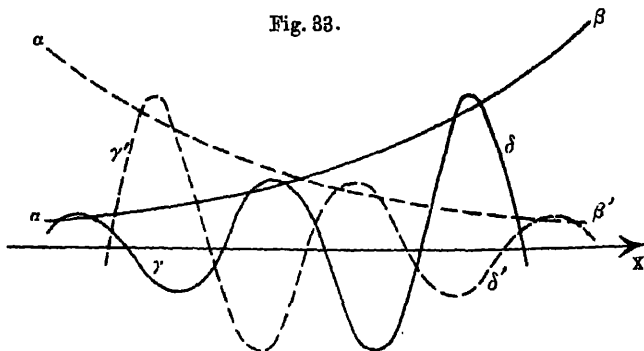
wo die A dieselben sind wie die eben bei $r = 1$ berechneten. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich (nach Weglassen der Glieder mit x) $A_1 + B_1 = 2B_1 + 2B_2 - B_3$, $A_2 + B_2 = -2B_1 + 4B_2 + B_3$, $A_3 + B_3 = -3B_1 + 8B_2 + 2B_3$ ($A_1 = 5A_2$, $A_3 = 7A_2$). Hieraus folgt $B_1 = 5B_2 - 6A_2$, $B_3 = 7B_2 - 11A_2$, wodurch tatsächlich eine dritte linear unabhängige Lösung gefunden ist.

Es läßt sich zeigen und soll hier nicht weiter bewiesen, sondern nur ausgesprochen werden, daß dieses Verfahren in allen Fällen zum Ziele führt. Man gelangt zu folgendem Ergebnis. Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4), $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ seien die Vielfachheiten derselben, so daß $m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = n$ ist. Dann sind die Lösungen von folgender Gestalt:

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 = A_{11}(x)e^{r_1 x} + A_{12}(x)e^{r_2 x} + \cdots + A_{1\mu}(x)e^{r_\mu x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = A_{n1}(x)e^{r_1 x} + A_{n2}(x)e^{r_2 x} + \cdots + A_{n\mu}(x)e^{r_\mu x}. \end{cases}$$

Dabei sind die noch zu bestimmenden Funktionen $A_{ik}(x)$ Polynome in x, und zwar stehen in der ersten Kolonne Polynome höchstens vom Grade $m_1 - 1$, in der zweiten Polynome vom Grade $m_2 - 1$ usw. Ihre Koeffizienten berechnet man dadurch, daß man mit diesem Ansatz (9) in die Differentialgleichungen (1) hineingeht. Dadurch gehen diese in ein System von n linearen Gleichungen zwischen den Koeffizienten der Polynome über, und jeder Lösung dieses Gleichungssystems entspricht eine Lösung der Differentialgleichungen.

3. Diskussion der Lösungen. Wir setzen die Koeffizienten $a_{\iota\varkappa}$ in (1) als reell voraus. Wenn dann (4) eine reelle Wurzel r besitzt, so ist das zugehörige Lösungssystem $A_1, \ldots, A_n$ von (3) ebenfalls reell. Die Lösungskurve $y_\nu = A_\nu e^{rx}$ hat daher bei positivem A_ν den Verlauf $\alpha\beta$ oder $\alpha'\beta'$ der Fig. 33, je nachdem r positiv oder negativ ist. Jedenfalls wird der absolute Betrag von y_ν mit wachsendem x unendlich für positives, Null für negatives r.

Fig. 33.

Ist $r = \varrho + i\sigma$ eine komplexe Wurzel von (4) und $A_\nu = a_\nu e^{i\varphi_\nu}$ die zugehörige Lösung von (3), so ist, da die $a_{\iota\varkappa}$ reell sind, auch $\overline{r} = \varrho - i\sigma$ eine Wurzel von (4), und $\overline{A}_\nu = a_\nu e^{-i\varphi_\nu}$ ist die zu $\overline{r}$ gehörige Lösung von (3). Daher sind

$$\frac{A_\nu e^{rx} + \overline{A}_\nu e^{\overline{r}x}}{2} = a_\nu e^{\varrho x} \cos(\sigma x + \varphi_\nu)$$

und

$$\frac{A_\nu e^{rx} - \overline{A}_\nu e^{\overline{r}x}}{2i} = a_\nu e^{\varrho x} \sin(\sigma x + \varphi_\nu)$$

reelle Lösungen von (1). Sie zeigen den Verlauf $\gamma\delta$ oder $\gamma'\delta'$ der Fig. 33, je nachdem der Realteil ϱ von r positiv oder negativ ist.

Da bei negativem ϱ für jede ganze Zahl n auch $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{\varrho x} = 0$ ist, so ergibt sich aus dem Vorstehenden auch unter Berücksichtigung von Lösungen der Form (9):

Ist $y_1, \ldots, y_n$ ein zu der (reellen oder komplexen) Wurzel r von (4) gehörendes reelles Lösungssystem von (1), so ist dann und nur dann $\lim\limits_{x\to\infty} y_\nu(x) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, wenn der Realteil von r negativ ist.

Eine solche Lösung, deren absoluter Betrag für wachsendes x gegen Null geht, nennt man im Hinblick auf die Anwendung der Gleichungen in der Mechanik und Physik stabil[1]). Haben alle Wurzeln von (4) negativen Realteil, ist also (4) eine „Hurwitzsche Gleichung" (III, § 4, **3**), so sind alle Lösungen eines Fundamentalsystems stabil. Daher ist in diesem Falle jede Lösung von (1) stabil. Über ein Kriterium für Hurwitzsche Gleichungen vgl. III, § 4, **3**.

Die vorstehende Diskussion gestattet uns auch, etwas über die Lösungen von Differentialgleichungen der Form

$$(10) \qquad \frac{dy_\iota}{dx} = \mathfrak{P}_\iota(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, n)$$

auszusagen.

Ganz analog nämlich wie bei dem in § 3, **1** angeführten Satz von Poincaré ist für diese das Verhalten der durch Verkürzung auf die linearen Glieder zu erhaltenden Gleichungen (1) maßgebend. Sie entscheiden für den Fall, daß ihre Determinante $|a_{ik}|$ nicht verschwindet, z. B. darüber, ob Lösungen für $x \to \infty$ in den Ursprung $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ einmünden. Der ebengenannte Satz ist noch nicht in allen Teilen vollständig bewiesen. Ebenso leicht wie § 3, **1** aber ist zu erkennen, daß für den Fall, daß alle $r_i < 0$ und voneinander verschieden sind, alle Lösungen für $x \to \infty$ in den Ursprung münden. Ein Gleiches gilt für den Fall, daß wenigstens die Realteile der Wurzeln r_i alle negativ sind. Trifft dies aber nur für λ der Wurzeln zu, so mündet eine von λ Parametern abhängende Schar von Lösungen im Ursprung.

4. Gleichungen höherer Ordnung. In den physikalischen Anwendungen treten die Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten oft in etwas anderer Form auf, nämlich als Gleichungen zweiter Ordnung:

$$(1') \qquad y'' = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} y'_k + c_{ik} y_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Man kann Gleichungen dieser Art leicht auf Gleichungen der Form (1) zurückführen, indem man $y'_i = y_{n+i}$ setzt. Einfacher aber ist es, in die Gl. (1′) unmittelbar mit dem Ansatz (2) einzugehen. Nach Weglassen des Faktors e^{rx} geht dann (1′) über in

$$(3') \qquad r^2 A_i = \sum_{k=1}^{n} A_k (r b_{ik} + c_{ik}).$$

[1]) Man versteht diese Bezeichnung, wenn man sich unter x die Zeit, unter y_ν Abweichungen von einer Gleichgewichtslage vorstellt.

Diese Gleichungen sind dann und nur dann lösbar, wenn r der Gleichung $2n$-ten Grades:

$$(4') \quad \begin{vmatrix} c_{11} + r b_{11} - r^2 & c_{12} + r b_{12} & \dots & c_{1n} + r b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} + r b_{n1} & c_{n2} + r b_{n2} & \dots & c_{nn} + r b_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0,$$

genügt.

Die weitere Diskussion ist analog der in **1** und **2** gegebenen: Sind erstens alle $2n$ Wurzeln von (4′) verschieden, so erhalten wir aus (3′) und (2) $2n$ linear unabhängige Lösungen von (1′), aus denen sich jede Lösung linear zusammensetzen läßt.

Sind zweitens nicht alle Wurzeln von (4′) verschieden, so betrachten wir, wie unter **2**, zunächst den Fall, daß für jede m-fache Wurzel $r = r_1$ von (4′) der Rang der Determinante (4′) gerade $n - m$ wird. Für $r = r_1$ liefert dann (3′) gerade m linear unabhängige Lösungssysteme A_k, so daß man im ganzen wieder $2n$ linear unabhängige Lösungen erhält.

In dem Falle schließlich, daß für eine m-fache Wurzel von (4′) der Rang von (4′) größer als $n - m$ ist[1]), erhält man, wie nicht näher ausgeführt werden soll, die nötige Zahl von Integrationskonstanten wieder durch Lösungen der Form (9).

Wir betrachten noch kurz den Fall einer homogenen Gleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$(11) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0.$$

Der Ansatz $y = e^{rx}$ liefert die „charakteristische Gleichung"

$$(12) \qquad r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Sind alle Wurzeln $r_1, r_2, \dots, r_n$ von (12) verschieden, so sind $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ Lösungen von (11), von denen sich zeigen läßt, daß sie linear unabhängig sind und daß sich jede Lösung von (11) aus ihnen linear zusammensetzen läßt.

Besitzt aber (12) eine m-fache Wurzel $r = r_1$ $(m > 1)$, so kann man beweisen, daß neben $e^{r_1 x}$ auch $x \cdot e^{r_1 x}, \dots, x^{m-1} \cdot e^{r_1 x}$ Lösungen von (11) sind. Für $n = 2$ wurde Gl. (11) schon in § 2, **3** ausführlich behandelt.

Auf Systeme von Gleichungen n-ter Ordnung lassen sich die im vorstehenden geschilderten Methoden ohne weiteres übertragen.

---

[1]) Kleiner als $n - m$ kann er, wie leicht zu sehen ist, nicht sein.

Lehrbücher

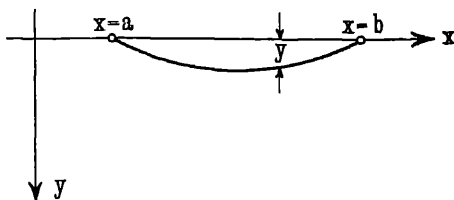
1. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. Berlin (Springer), 2. Aufl. 1926.
2. A. R. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen. Herausg. von Walther Jacobsthal. Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn), 2. Aufl., 1912.
3. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig (Goeschens Lehrbücherei), 1927.
4. E. L. Ince, Ordinary Differential Equations. London 1927.

Siebentes Kapitel

Randwertaufgaben zweiter Ordnung

§ 1. Problemstellung

1. Anfangswert- und Randwertproblem. Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung hängt nach den Ausführungen des vorigen Kapitels von zwei Integrationskonstanten ab. Zu ihrer eindeutigen Festlegung sind zwei Bedingungen notwendig. Je nach der Art dieser Bedingungen unterscheiden wir Anfangswert- und Randwertprobleme. Von einem Anfangswertproblem sprechen wir, wenn jene Bedingungen in der Angabe des Wertes der Lösung und des Wertes ihrer Ableitung an einer Stelle a, dem „Anfangspunkt", bestehen. Nach dem Existenztheorem (VI, § 1) ist ein Anfangswertproblem stets in eindeutiger Weise lösbar.

Fig. 34

Von einem Randwertproblem sprechen wir hingegen, wenn irgend zwei Beziehungen zwischen den Werten der Lösung und den Werten ihrer Ableitung an dem „Rand" (d. h. den beiden Endpunkten) eines Intervalls a, b vorgegeben sind. Im Gegensatz zum Anfangswertproblem ist das Randwertproblem, wie sich noch zeigen wird, nicht immer lösbar.

Wir erläutern die bei einem Randwertproblem vorliegenden Verhältnisse zunächst an einem physikalischen Beispiel, indem wir die Durchhängung y eines belasteten, an den Punkten $x = a$ und $x = b$ der x-Achse befestigten, nahezu geradlinig ausgespannten Seiles berechnen

(Fig. 34). Da zufolge einfacher Gleichgewichtssätze die Krümmung der Seilkurve an jeder Stelle proportional der y-Komponente der äußeren Kräfte ist, muß $y(x)$ einer Differentialgleichung der Form

$$y'' = p(x) \tag{1}$$

genügen, wofern auf das Seil keine von y abhängigen Kräfte wirken. Da ferner wegen der Befestigung des Seiles in den Endpunkten die Bedingungen

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \tag{2}$$

bestehen, so liegt in der Tat ein Randwertproblem vor, und zwar ein solches, das stets lösbar ist. Denn aus (1) folgt durch zweimalige Integration das allgemeine Integral

$$y = \int_a^b d\xi \int_a^\xi p(\eta)\, d\eta + C_1(x-a) + C_2 \tag{3}$$

und aus (2) und (3) erhalten wir

$$0 = C_2, \quad 0 = \int_a^b d\xi \int_a^\xi p(\eta)\, d\eta + C_1(b-a). \tag{4}$$

Indem wir die hieraus errechneten Werte von C_1, C_2 in (3) einsetzen ergibt sich die Lösung des Problems.

Ändern wir das Beispiel, indem wir annehmen, daß außer der durch $p(x)$ gegebenen Belastung noch zu y proportionale, von x unabhängige Kräfte auf das Seil wirken, so erhalten wir den Fall eines nicht immer lösbaren Randwertproblems. An Stelle von (1) tritt dann nämlich die Gleichung

$$y'' + k^2 y = p(x). \tag{1'}$$

Nach VI, § 2, 4 lautet ihr allgemeines Integral, da $\sin kx$, $\cos kx$ ein Fundamentalsystem bilden:

$$\left\{\begin{aligned} y(x) = \frac{\sin kx}{k} \int_a^x p(\xi) \cos k\xi\, d\xi - \frac{\cos kx}{k} \int_a^x p(\xi) \sin k\xi\, d\xi \\ + C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

Nach (3') und (2) bestehen jetzt für C_1 und C_2 die Gleichungen:

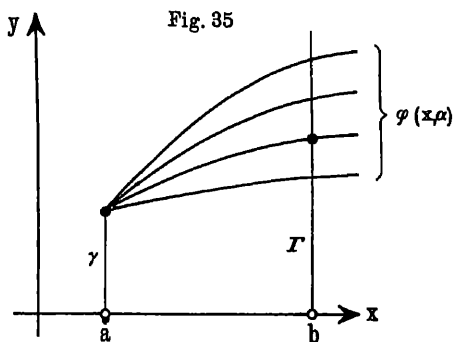
$$\left\{\begin{aligned} & C_1 \sin ka + C_2 \cos ka = 0 \\ & C_1 \sin kb + C_2 \cos kb = -\frac{\sin kb}{k} \int_a^b p(\xi) \cos k\xi\, d\xi \\ & \qquad + \frac{\cos kb}{k} \int_a^b p(\xi) \sin k\xi\, d\xi. \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

Diese Gleichungen sind aber nicht immer lösbar. Wenn nämlich die Determinante $\sin ka . \cos kb - \cos ka . \sin kb = \sin k(a-b)$ verschwindet — das ist also eine transzendente Gleichung für k —, sind sie nur in dem Ausnahmefall lösbar, daß auch die rechte Seite der zweiten Gl. (4') verschwindet (II, § 1, 5); das ist eine Bedingung für $p(x)$, die z. B. auch durch $p(x) \equiv 0$ erfüllt wird.

Ähnliches gilt hinsichtlich der Lösbarkeit des allgemeineren Randwertproblems

$$(1'') \qquad y'' = f(x, y), \quad y(a) = \gamma, \quad y(b) = \Gamma.$$

Dieses läßt sich zwar auf ein gewisses Anfangswertproblem zurückführen, aber zwischen die Lösung des Anfangswertproblems und des Randwertproblems schaltet sich noch die Auflösung einer algebraischen oder transzendenten Gleichung ein. Ist nämlich $y = \varphi(x, \alpha)$, wo α einen noch unbestimmten Parameter bezeichnet, die Schar der Lösungen, für die die erste Randbedingung $\varphi(a, \alpha) = \gamma$ erfüllt ist, für die also die Anfangsrichtung noch beliebig ist, so kommt unser Randwertproblem auf die Auflösung der Gleichung $\varphi(b, \alpha) = \Gamma$ nach α heraus. Geometrisch gesprochen: Man soll die Anfangsrichtung so wählen, daß die Kurve am Intervallende einen vorgegebenen Punkt passiert (Fig. 35).

Fig. 35

2. Lineare Differentialgleichungen. Alternative. Die Frage nach der Lösbarkeit eines Randwertproblems betrachten wir nun etwas genauer für den Fall, daß sowohl die Differentialgleichung wie die Randbedingungen linear sind. Wir behandeln also im folgenden die Gleichung

$$(5) \qquad y'' + f_1(x)\, y' + f_2(x)\, y = f_3(x)$$

unter den Randbedingungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} l_1(y) \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \gamma, \\ l_2(y) \equiv \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \Gamma. \end{cases}$$

Zunächst einige Definitionen: Wenn $\gamma = \Gamma = 0$ ist, so nennen wir die Randbedingungen homogen. Unter den Randwertaufgaben mit homogenen Randbedingungen spielen in der theoretischen Physik eine besonders wichtige Rolle die sogenannte „erste", „zweite"

und „dritte Randwertaufgabe“. Die erste ist gekennzeichnet dur $l_1(y) \equiv y(a) = 0$, $l_2(y) \equiv y(b) = 0$ (Verschwinden der Funktion den beiden Enden); die zweite durch: $l_1(y) \equiv y'(a) = 0, l_2(y) \equiv y'(b) =$ (Verschwinden der Ableitung an den Enden) und schließlich die dri durch: $l_1(y) \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$, $l_2(y) \equiv \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) =$ Die ersten beiden sind offenbar Spezialfälle der dritten. Ein Ra wertproblem heißt homogen, wenn sowohl die Randbedingungen auch die Differentialgleichung homogen sind. Ist nicht beides Fall (ist also mindestens eine der Größen γ, Γ, $f_3(x)$ von 0 verschiede so heißt das Problem inhomogen. Offenbar ist hiernach das homoge Problem auch damit gekennzeichnet, daß jedes Vielfache einer Lösu wieder Lösung ist.

Wir kehren jetzt zur Frage der Lösbarkeit zurück. Nach VI, § 2 lautet das allgemeine Integral von (5):

(7)
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + F(x),$$

wenn y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der zu (5) gehörenden homogen Gleichung[1]) bilden und $F(x)$ eine partikuläre Lösung von (5) i Ist (5) homogen, so hat man $F = 0$. Soll nun y die Randbedingungen (erfüllen, so müssen, weil $l(y) = c_1 l(y_1) + c_2 l(y_2) + l(F)$ ist, die Ko stanten c_1 und c_2 den Gleichungen

(8)
$$\begin{cases} c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) = \gamma - l_1(F), \\ c_1 l_2(y_1) + c_2 l_2(y_2) = \Gamma - l_2(F) \end{cases}$$

genügen. Wenn nun erstens die Determinante

(8′)
$$\Delta = l_1(y_1) l_2(y_2) - l_1(y_2) l_2(y_1)$$

von 0 verschieden ist, so hat (8) (nach II, § 1) eine und nur eine Lösun c_1, c_2, die, in (7) eingesetzt, die eindeutige Lösung des Randwer problems liefert. Hieraus folgt, daß im homogenen Falle, der imme die Lösung $y = 0$ besitzt, bei nicht verschwindender Determinante dies auch die einzige Lösung ist. Sehen wir von dieser „trivialen Lösung ab, so hat also hier das inhomogene Problem eine Lösung, da homogene nicht. Wenn aber zweitens $\Delta = 0$ ist, so haben im homo genen Falle die Gl. (8), da sie mit $\gamma = \Gamma = F = 0$ und $l_1(0$ $= l_2(0) = 0$ selbst zu einem Paar homogen linearer Gleichunge werden, nach II, § 1, **5** eine nicht verschwindende Lösung c_1, c_2, s daß nach (7) (zufolge der linearen Unabhängigkeit von y_1 und y_2 y nicht identisch verschwindet. Im inhomogenen Falle läßt aber (8 nach II, § 1 bei verschwindendem Δ eine Lösung c_1, c_2 nur für be sondere Werte der rechten Seiten zu, d. h. „im allgemeinen“ keine

[1]) Das heißt derjenigen Gleichung, die aus (5) hervorgeht, wenn man f_3 durch 0 ersetzt.

Es besteht hiernach für jeden Fall des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung die Alternative: Entweder das inhomogene Problem ist allgemein lösbar und das zugehörige homogene nicht, oder das homogene ist lösbar und das inhomogene nur, wenn zwischen den rechten Seiten von (5) und (6) besondere Beziehungen bestehen.

Die Beziehung, die erforderlich ist, damit bei verschwindender Determinante sowohl das homogene wie das inhomogene Problem eine Lösung besitzt, wollen wir für einen wichtigen Spezialfall, nämlich den der dritten Randwertaufgabe mit verschwindendem $f_1(x)$, explizite angeben. Wie man leicht ausrechnet, lautet sie $\int_a^b f_3(\xi)\, y_0(\xi)\, d\xi = 0$, wobei $y_0(x)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Problems ist [1]). Man vergleiche hierzu die in dem Beispiel des gespannten Seiles gegebene Bedingung: Verschwinden der rechten Seite von (4'), etwa im Falle $a = 0$, $b = \frac{\pi}{k}$, in dem wir $\sin kx$ als Funktion $y_0(x)$ benutzen können.

3. Gleichung mit Parameter. Da nach dem Vorstehenden ein Randwertproblem nicht immer eine Lösung besitzt, liegt es nahe, in die Koeffizienten der Differentialgleichung einen unabhängigen Parameter einzuführen und nach denjenigen Werten dieses Parameters zu fragen, für welche das vorgelegte Problem lösbar ist. Aufgaben der Mechanik und Physik führen häufig zu dieser Frage. Das folgende Beispiel ist für derartige Aufgaben kennzeichnend. — An den beiden Enden eines ursprünglich geraden, dünnen elastischen Stabes mögen entgegengesetzt gerichtete Druckkräfte der Größe P angreifen (Fig. 36). Für jeden Wert von P befindet sich der Stab in gestreckter Lage offenbar im Gleichgewicht; aber gewissen Werten von P gegenüber stellen auch geeignete Ausbiegungen Gleichgewichtslagen dar. Diese Werte von P sowie die zugehörigen Ausbiegungen $y(x)$ sollen für den Fall, daß die Ausbiegung klein [2]) ist, berechnet werden. Wir legen die x-Achse durch die Stabenden, deren Abszissen 0 und a sein mögen. Ist B die nur vom Querschnitt und von der Elastizität abhängige „Biegungssteifigkeit" des Stabes, so ist, wie die Elastizitäts-

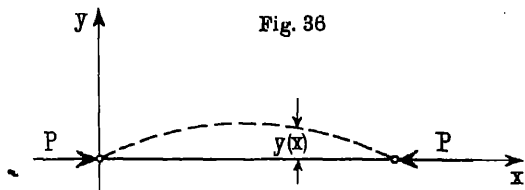



Fig. 36

[1]) Vgl. S. 364.

[2]) Für größere Ausbiegungen vgl. Kap. X, § 3, 2.

theorie lehrt, an jeder Stelle die Stabkrümmung y'' gleich dem durch B geteilten Moment $-P \cdot y$ der äußeren Belastung, so daß also mit der Abkürzung $\lambda = \frac{P}{B}$ die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{9}$$

gilt. Sie ist unter den Bedingungen $y(0) = y(a) = 0$ zu integrieren (erste Randwertaufgabe). Das allgemeine Integral von (9) lautet:

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x, \tag{9'}$$

und die genannten Randbedingungen sind dann und nur dann erfüllt. wenn $c_2 = 0$, $\sin\sqrt{\lambda}\, a = 0$, wenn also $a\sqrt{\lambda}$ ein ganzes Vielfaches von π ist. Zufolge der Annahme kleiner Ausbiegungen ist a annähernd gleich der Länge l des Stabes zu setzen. Unser Problem ist also für die Werte des Parameters λ lösbar, für die $l\sqrt{\lambda} = n\pi$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ ist, und nur für diese. Die Lasten P, für die Gleichgewicht im ausgebogenen Zustand möglich ist, sind daher diejenigen, die sich in der Form

$$P = B\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{9''}$$

darstellen lassen. Auf die physikalische Bedeutung dieses schon von Euler gefundenen Ergebnisses[1]) gehen wir hier nicht ein, sondern formulieren das allgemeine, eingangs schon angedeutete Problem, das uns hier in einem Spezialfall entgegengetreten ist:

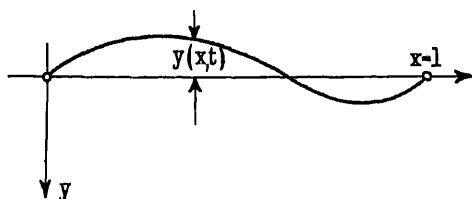
Es sei $L(x, y, y', y'')$ ein in y, y', y'' homogener Ausdruck, dessen Koeffizienten noch von einem Parameter λ abhängen; seien ferner l_1, l_2 zwei in den Größen $y(a), y'(a), y(b), y'(b)$ homogene Ausdrücke. Alsdann wird gefragt nach denjenigen Werten des Parameters λ, für die das homogene Randwertproblem, ein den Bedingungen $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ genügendes Integral y der Gleichung $L = 0$ zu finden, eine Lösung außer der trivialen $y = 0$ besitzt. Die λ-Werte, für die das der Fall ist, nennt man die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen y die Eigenfunktionen des Problems. Insbesondere wird uns der Fall interessieren, daß l_1, l_2 linear sind und daß auch L ein in y, y', y'' linearer Ausdruck ist, in dessen Koeffizienten der Parameter λ in linearer oder nicht linearer Weise eingeht. Nach den Ergebnissen von 2 ist in diesem Falle $\lambda = \lambda_0$ dann und nur dann ein Eigenwert, wenn die in (8') auftretende Determinante Δ, die jetzt offenbar eine

---

[1]) Euler, im Additamentum primum zum Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne und Genf 1744. Die Lösung (9'') wird heute in der Technik als „Eulersche Last“ bezeichnet!

Funktion $\Delta(\lambda)$ von λ wird, für $\lambda = \lambda_0$ verschwindet. In dem oben behandelten Beispiel sind die Zahlen $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ die Eigenwerte und die Funktionen $\sin\frac{n\pi}{l}x$ die Eigenfunktionen.

4. Entwicklungsproblem. In Zusammenhang mit dem eben besprochenen steht ein weiteres mathematisch und physikalisch wichtiges Problem, das wir zunächst an dem Beispiel der schwingenden Saite erläutern wollen. Ein elastisches Seil oder eine Saite sei längs der x-Achse ausgespannt und an den Enden $x = 0$ und $x = l$ fest-

Fig. 37

geklemmt (Fig. 37). $y(x, t)$ sei die Elongation oder Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t. Sie genügt, wenn keine äußeren Kräfte wirken, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{10}$$

die besagt, daß an jeder Stelle und in jedem Augenblick die Krümmung der Saite proportional der Trägheitskraft ist. Unter der Annahme, daß die Saite homogen ist, ist a eine positive Konstante. Elongation und Geschwindigkeit der einzelnen Saitenpunkte für den Zeitpunkt $t = 0$ seien vorgeschrieben:

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x). \tag{11}$$

Überdies bestehen für alle t die Bedingungen, daß die Enden keine Elongation erfahren:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0. \tag{12}$$

Der Ansatz $y = v(x)w(t)$ führt (10) über in

$$\frac{1}{w}\frac{d^2 w}{dt^2} = a\frac{1}{v}\frac{d^2 v}{dx^2}. \tag{13}$$

Hier steht links eine Funktion von t allein, rechts eine von x allein, also kann (13) nur bestehen, wenn beide Seiten gleich derselben Konstanten $-\lambda$ sind:

$$(13') \qquad \frac{d^2 w}{d t^2} = -\lambda w, \quad \frac{d^2 v}{d x^2} = -\frac{\lambda}{a} v.$$

Da aus (12)

$$(12') \qquad v(0) = v(l) = 0$$

folgt und die zweite Gl. (13') mit (9) übereinstimmt, wenn man in dieser λ durch $\frac{\lambda}{a}$ ersetzt, so lehren die in **3** gewonnenen Ergebnisse, daß die Konstante λ einen der Werte $\lambda_n = a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ mit $n = 1, 2 \ldots$ haben muß und die zugehörigen Lösungen $\varphi_n = \sin\frac{n\pi}{l}x$ sind. Die Zahlen λ_n sind also die Eigenwerte, die φ_n die Eigenfunktionen des durch die zweite Gl. (13') und (12') gegebenen Randwertproblems.

Die Bedeutung der Eigenwerte λ_n geht aus der ersten Gl. (13') hervor, deren allgemeines Integral $w = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$ lautet, mit A und B als Konstanten. Die durch $y(x, t) = w(t)\,v(x)$ dargestellte Bewegung der Saite ist also eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $\sqrt{\lambda}$. Zu jedem Eigenwert $\lambda = \lambda_n$ gibt es eine Eigenfunktion $v = \varphi_n(x)$, die die zu der betreffenden Frequenz gehörende Schwingungsform festlegt. Damit haben wir verschiedene mögliche Bewegungen der Saite gefunden, nämlich für $n = 1, 2 \ldots$ die Elongationen:

$$(14) \qquad y_n = (A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t)\,\varphi_n(x),$$

aber keine dieser Lösungen wird im allgemeinen die Bedingungen für die Zeit $t = 0$, die in (11) gegeben waren, erfüllen. Nun ist zufolge des linearen homogenen Charakters unseres Problems auch jedes $y = \Sigma y_n$ eine Lösung von (10) und (12). Setzen wir dies in die bisher noch nicht benutzten Bedingungen (11) ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sqrt{\lambda_n}\,\varphi_n(x).$$

Das sind Bedingungen für die Konstanten A_n und B_n. Wir stehen hier vor dem neuen Problem, willkürlich vorgegebene Funktionen (nämlich f und g) nach den Eigenfunktionen φ_n eines bestimmten Randwertproblems zu „entwickeln“. Dies Problem wird uns überall da zu beschäftigen haben, wo bei einem

Randwertproblem Eigenwerte und Eigenfunktionen auftreten. In dem vorliegenden speziellen Falle, wo die Eigenfunktionen $\varphi_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$ sind, fällt das Problem zusammen mit dem der Entwicklung gegebener Funktionen in Fouriersche Reihen (IV, § 4).

In den folgenden Paragraphen werden wir die verschiedenen hier kurz skizzierten Probleme näher verfolgen.

§ 2. Das homogene Problem

Wir betrachten in diesem Paragraphen die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \tag{1}$$

mit Koeffizienten $f_1(x)$, $f_2(x)$, die in einem Intervall a, b stetig sind, und die homogen linearen Randbedingungen

$$\begin{cases} l_1(y) \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ l_2(y) \equiv \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Nach § 1, **2** gibt es dann und nur dann ein den Bedingungen (2) genügendes (nicht identisch verschwindendes) Integral von (1), wenn

$$\varDelta = l_1(y_1)l_2(y_2) - l_1(y_2)l_2(y_1) \tag{3}$$

verschwindet; dabei bedeutet $y_1(x)$, $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von (1). Wenn daher unser Problem überhaupt eine Lösung zuläßt, so ist jedes Integral von (1), welches einer der beiden Bedingungen (2) genügt, eine Lösung. Denn wegen $\varDelta = 0$ zieht das Bestehen einer der beiden Gl. § 1, (8) (in denen die rechten Seiten Null zu setzen sind) die andere nach sich. Also lautet die Hauptfrage: Hat das Problem eine Lösung? Ihre Beantwortung erfordert die nähere Betrachtung der Determinante $\varDelta$.

1. Die Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir dürfen uns hier auf die schon in § 1, **3** behandelte Gleichung

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{4}$$

beschränken. Denn die allgemeine Gl. $v'' + pv' + qv = 0$ mit den Randbedingungen $\bar{\alpha}_1 v(a) + \bar{\alpha}_2 v'(a) + \bar{\alpha}_3 v(b) + \bar{\alpha}_4 v'(b) = 0$, $\bar{\beta}_1 v(a) + \bar{\beta}_2 v'(a) + \bar{\beta}_3 v(b) + \bar{\beta}_4 v'(b) = 0$ geht, wie man ohne weiteres nach-

rechnet, durch die Substitution $v = e^{-\frac{1}{2}px} . y$ in die Gl. (4) mit den Randbedingungen (2) über, wenn $\lambda = q - \frac{p^2}{4}$, $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 \frac{p}{2}$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_4 \frac{p}{2}$, $\alpha_4 = \bar{\alpha}_4$ [1]) usw. gesetzt wird.

Im Sinne der in § 1, 3 erörterten Problemstellung fassen wir die Konstante λ als Parameter auf und fragen nach den Eigenwerten. Wählen wir $y_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x$, $y_2 = \cos \sqrt{\lambda}\, x$ als Fundamentalsystem von (4), so ist $y_1' = \cos \sqrt{\lambda}\, x$, $y_2' = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, x$, und bei festem x sind dann offenbar y_1, y_2, y_1', y_2' ganze transzendente Funktionen von λ. Nach (3) ist daher auch $\Delta = \Delta(\lambda)$ eine ganze transzendente Funktion von λ, die sich eventuell auf eine ganze rationale Funktion oder auch eine Konstante reduzieren kann. Für die Eigenwerte folgt hieraus, daß sie sich, als Nullstellen einer ganzen Funktion, im Endlichen nicht häufen können [2]). Hat $\Delta(\lambda)$ keine Nullstellen, so ist das Problem für keinen Wert von λ lösbar. Im anderen Falle seien $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ die Nullstellen von $\Delta(\lambda)$. Eine zu λ_ν gehörende Eigenfunktion erhält man dann, indem man die in der allgemeinen Lösung $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ von (4) auftretenden Konstanten, was immer möglich ist, so wählt, daß eine der Randbedingungen (2) erfüllt ist. Nach einer oben gemachten Bemerkung ist die zweite dann von selbst erfüllt.

Das Anfangswertproblem ($\alpha_1 = \beta_2 = 1$, alle übrigen $\alpha, \beta = 0$) liefert einen Fall, in dem keine Eigenwerte existieren. Hier wird in der Tat, wie die Rechnung zeigt, $\Delta(\lambda) \equiv -1$, also besitzt Δ keine Nullstellen. Die erste Randwertaufgabe führt auf $\Delta(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(b-a)$, die zweite auf $\Delta(\lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(b-a)$. In diesen beiden Fällen liefert also $\Delta = 0$ als einzige Eigenwerte die reellen positiven Zahlen $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$; im zweiten Falle auch $n = 0$). Die zugehörigen Eigenfunktionen sind im ersten Falle $\sin \sqrt{\lambda_n}(x-a)$, im zweiten $\cos \sqrt{\lambda_n}(x-a)$. Bei der dritten Randwertaufgabe führt unter

---

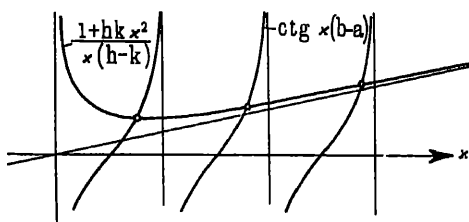
[1]) Hierbei geht die erste Randwertaufgabe in die erste, die zweite in die dritte, die dritte in die zweite oder dritte über. Eine Aufgabe, die keinem dieser drei Typen angehört, geht wieder in eine solche über.

[2]) In der Tat können sich die Nullstellen einer analytischen Funktion im Innern ihres Regularitätsbereiches nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie nicht häufen. Für eine ganze Funktion ist aber jeder endliche Bereich ein Regularitätsbereich. Also können sich die Nullstellen dort nicht häufen.

Benutzung der Bezeichnungen $\alpha_2/\alpha_1 = h$, $\beta_4/\beta_3 = k$, $\sqrt{\lambda} = \varkappa$ die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ zu der Bedingung

$$\operatorname{ctg} \varkappa (b - a) = \frac{1 + h k \varkappa^2}{\varkappa (h - k)}. \tag{5}$$

Die reellen Wurzeln von (5) erhalten wir als die Abszissen der Schnittpunkte der ctg-Linie mit einem Hyperbelast (Fig. 38). Aus einer näheren Diskussion von (5) ersieht man, daß dies alle Wurzeln sind. Diese Tatsache folgt auch aus dem allgemeinen in **4** zu beweisenden Satze über die Realität der Eigenwerte. Betrachten wir

Fig. 38

schließlich noch die Bedingungen $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ ($\alpha_1 = \beta_2 = -\alpha_3 = -\beta_4 = 1$; die übrigen $\alpha, \beta = 0$). Für sie wird $\Delta(\lambda) = 2[\cos\sqrt{\lambda}(b-a) - 1]$; die Eigenwerte als Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ sind also die reellen positiven Zahlen $\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^2$ ($n = 0, 1, 2, 3 \ldots$). Zu jedem λ_n gehören aber jetzt zwei linear unabhängige Eigenfunktionen, nämlich $\sin\sqrt{\lambda_n}(x-a)$ und $\cos\sqrt{\lambda_n}(x-a)$. Man sagt in diesem Falle, die Eigenwerte seien zweifach (vgl. § 3, **3**).

2. Allgemeiner Fall. Grundlösung. Die erste Randwertaufgabe. Wir wenden uns nunmehr der allgemeinen Gl. (1) zu und erweitern sie durch Einführung eines willkürlichen Parameters λ zu

$$y'' + f_1(x) y' + [f_2(x) + \lambda p(x)] y = 0, \tag{6}$$

worin $p(x)$ eine in a, b stetige Funktion sein möge. Wie im Falle der konstanten Koeffizienten wollen wir zunächst zeigen, daß es eine Lösbarkeitsbedingung in Form einer (transzendenten) Gleichung für λ gibt, wenn wir y außer der Gl. (6) noch der Forderung $y(a) = y(b) = 0$ unterwerfen. Diesem Zweck dient die Einführung der von einem Parameter s ($a \leqq s \leqq b$) abhängenden „Grundlösung“

$U(s, x, \lambda)$ von (6)[1]) Wir definieren sie als das Integral von (6), das den Anfangsbedingungen

$$(7) \qquad U(s, s, \lambda) = 0, \quad \left.\frac{d\,U(s, x, \lambda)}{d\,x}\right|_{x=s} = f(s)$$

genügt, wo $f(s)$ eine stetige, differenzierbare, im Intervall nicht verschwindende Funktion bedeutet. Es ist also U dasjenige Integral, das für $x = s$ verschwindet und hier eine bestimmte Neigung besitzt, deren Wert $f(s)$ noch in gewissen Grenzen passend gewählt werden kann. Wir schreiben noch zur Abkürzung

$$(8) \qquad U(s, x, 0) = u(s, x).$$

Nun setzen wir die Grundlösung als eine Potenzreihe in λ an:

$$(9) \qquad U(s, x, \lambda) = k_0(s, x) + \lambda\, k_1(s, x) + \lambda^2 k_2(s, x) + \cdots,$$

worin natürlich $k_0(s, x) = u(s, x)$ sein muß. Durch Einführen von (9) in (6) ergibt sich für die k die Rekursion:

$$(10) \qquad k''_{n+1} + f_1 k'_{n+1} + f_2 k_{n+1} + p\, k_n = 0, \quad n = 0, 1, 2 \cdots.$$

Überdies müssen die $k_1, k_2, k_3 \ldots$ samt ihren ersten Ableitungen an der Stelle $x = s$ verschwinden. Die Integrale von (10), die diesen Anfangsbedingungen genügen, lassen sich rekurrierend durch einfache Quadraturen ausdrücken:

$$(11) \qquad k_{n+1}(s, x) = -\int_s^x k_n(s, t)\, u(t, x) \frac{p(t)}{f(t)}\, d\,t, \quad n = 0, 1\ 2 \cdots.$$

Denn ein- bzw. zweimalige Differentiation von (11) liefert wegen $u(x, x) = 0$ und $u'(x, x) = f(x)$

$$(11\,\text{a}) \qquad k'_{n+1}(s, x) = -\int_s^x k_n(s, t)\, u'(t, x) \frac{p(t)}{f(t)}\, d\,t$$

und

$$(11\,\text{b}) \qquad k''_{n+1}(s, x) = -\int_s^x k_n(s, t)\, u''(t, x) \frac{p(t)}{f(t)}\, d\,t - k_n(s, x)\, p(x).$$

Daß die durch (11) bestimmten k den Anfangsbedingungen genügen, zeigt (11) und (11a) unmittelbar. Daß auch die Differentialgleichung (10) erfüllt wird, erkennt man nach Einsetzen von (11), (11a) und (11b) in (10), da für u die Gleichung $u'' + f_1 u' + f_2 u = 0$ besteht.

---

[1]) Vgl. R. v. Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem. Heinrich-Weber-Festschrift. Leipzig u. Berlin 1912.

Um die Konvergenz der Reihe (9) und der durch ein- und zweimalige gliedweise Differentiation entstehenden nachzuweisen, ziehen wir aus (11) die independente Darstellung von k_n:

(12) $$(-1)^n k_n(s,x) =$$
$$\int\limits_s^x \int\limits_s^{x_n} \cdots \int\limits_s^{x_3} \int\limits_s^{x_2} u(s,x_1)u(x_1,x_2)\ldots u(x_n,x)\frac{p(x_1)}{f(x_1)}\frac{p(x_2)}{f(x_2)}\cdots\frac{p(x_n)}{f(x_n)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Da nach der Definition von f der Quotient $|p:f|$ unterhalb einer Schranke A bleibt, ist

(13) $$|k_n| < A^n \int\limits_s^x \int\limits_s^{x_n} \cdots \int\limits_s^{x_2} |u(s,x_1)u(x_1,x_2)\ldots u(x_n,x)|\,d\,x_1\ldots d\,x_n.$$

Da $u(s,x)$ unterhalb einer Schranke B liegt, folgt aus (13) die Abschätzung:

(13′) $$|k_n(s,x)| < A^n B^{n+1}\frac{|x-s|^n}{n!}$$

und damit die Konvergenz der Reihe (9), und zwar gleichmäßige Konvergenz bezüglich x für alle λ. Für die differenzierten Reihen führt man den Beweis in derselben Weise.

Mit der Auffindung der Grundlösung ist die Frage nach den Eigenwerten für den Fall der ersten Randwertaufgabe schon erledigt. Denn die in $x = a$ verschwindende Lösung kann sich nur um einen konstanten Faktor von $U(a,x,\lambda)$ unterscheiden; soll sie auch in $x = b$ verschwinden, so muß

(14) $$U(a,b,\lambda) = 0$$

sein. Dies ist also die „Lösbarkeitsbedingung", d. h. die λ-Werte, die dieser Gleichung genügen, sind die gesuchten Eigenwerte. Das Problem ist damit zurückgeführt auf das der Auflösung einer Gleichung von „unendlich hohem Grade", deren Koeffizienten man rekurrierend durch Quadraturen findet (11). Bricht man die Reihe (9) beim n-ten Gliede ab, so erhält man in (14) eine Gleichung n-ten Grades mit n Wurzeln. Es ist plausibel und läßt sich auch exakt nachweisen, daß diese n Wurzeln Näherungswerte für die n kleinsten Eigenwerte darstellen — falls es Eigenwerte überhaupt gibt —, also so, daß man beispielsweise den (absolut) kleinsten Eigenwert approximativ erhält, wenn man die kleinste Wurzel von $k_0(a,b) + \lambda k_1(a,b) + \cdots + \lambda^n k_n(a,b) = 0$ bei genügend großem n aufsucht.

Ist etwa die Gleichung $y'' = \lambda(1+x)y$ vorgelegt und für das Intervall 0, 1 die erste Randwertaufgabe zu lösen, so wählt man zu-

nächst $f = 1$ und hat dann u als Lösung für $\lambda = 0$, also $u'' = 0$, mit den Bedingungen $u(x, x) = 0$, $u'(x, x) = 1$, mithin $u = x - s$. Aus (11) wird

$$k_{n+1}(0, x) = \int_0^x k_n(0, t)(x - t)(1 + t)\, dt$$

und daraus

$$k_1(0, x) = \frac{x^3}{12}(2 + x), \quad k_2(0, x) = \frac{x^5}{2520}(21 + 21\,x + 5\,x^2).$$

Die ersten Koeffizienten der Gl. (14) sind also $1, \frac{1}{4}, \frac{47}{2520} \cdots$ und die weiteren lassen sich ebenso berechnen.

3. Die Eigenwerte bei beliebigen Randbedingungen. Ist Gl. (6) unter irgendwelchen Randbedingungen (2) zu integrieren, so führt die Anwendung der Grundlösung ebenfalls zur Gleichung für die Eigenwerte. Wählt man nämlich zwei Zahlen s_1, s_2 so, daß die in $x = s_1$ verschwindende Lösung von (6) nicht auch in $x = s_2$ Null wird, so bilden $U(s_1, x, \lambda)$ und $U(s_2, x, \lambda)$ ein Fundamentalsystem. Setzt man diese beiden Grundlösungen für y_1 und y_2 in den Ausdruck für Δ ein, der nach (3) eine Funktion zweiten Grades in y_1, y_2 ist, so erhält man Δ als ganze Funktion in λ. Diese gleich Null gesetzt, gibt die Lösbarkeitsbedingung; auf Existenz und Eigenschaften der Eigenwerte kommen wir in § 3 zurück.

Man kann auch unter Umgehung des expliziten Ausdrucks für die Grundlösung manchmal etwas rascher zur Eigenwertgleichung gelangen, indem man den folgenden, von Picard angegebenen Weg einschlägt. Wenn wir eine Lösung η von (6) den nichthomogenen Bedingungen

$$(15) \qquad l_1(\eta) = \gamma, \quad l_2(\eta) = \Gamma$$

unterwerfen, so muß sie sich, sofern sie überhaupt existiert, auch in der Form $c_1\, U(s_1, x, \lambda) + c_2\, U(s_2, x, \lambda)$ darstellen. Sucht man aber c_1 und c_2 aus den Bedingungen (15) zu bestimmen, so ergibt sich, wie wir aus § 1 wissen, ein Gleichungssystem mit der Determinante Δ. Es ist somit η sicher eindeutig und regulär in λ für alle λ, die nicht Δ zu Null machen, und es läßt sich zeigen, was wir hier nicht weiter ausführen, daß das Verhalten von η an den singulären Stellen das einer analytischen Funktion an einem Pol erster Ordnung ist. Machen wir daher für η den Ansatz

$$(16) \qquad \eta(x) + k_0(x) + k_1(x)\lambda + k_2(x)\lambda^2 + \cdots,$$

wo die k wieder der Differentialgleichung (10), aber anderen Randbedingungen genügen, so muß für ein beliebig gewähltes festes $x = c$

der Konvergenzradius von (16) den absoluten Betrag des kleinsten Eigenwertes λ_1 liefern. Es ist daher

$$|\lambda_1| = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|k_n(c)|}}. \tag{17}$$

Man kann nun zeigen, daß

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}(c)}{k_n(c)}\right| \tag{17'}$$

ist, falls dieser Grenzwert existiert, was jedoch nicht unbedingt nötig ist.

Weiß man überdies (vgl. 4), daß die Eigenwerte reell sind, und kennt man ihre Vorzeichen, so ist mit (17) bzw. (17') der kleinste Eigenwert vollständig bestimmt. Es kommt also hier nur darauf an, die k zu ermitteln, wobei zu beachten ist, daß nur k_0 die inhomogenen Bedingungen (15), jedes andere k die homogenen $l_1(\eta) = l_2(\eta) = 0$ zu erfüllen hat.

Um den nächst größeren Eigenwert λ_2 zu finden, bemerke man, daß — da $\lambda = \lambda_1$ ein einfacher Pol ist — für η eine Entwicklung

$$\eta(x) = \frac{\varrho(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + l_0(x) + l_1(x)\lambda + l_2(x)\lambda^2 + \cdots \tag{18}$$

besteht, deren Konvergenzradius λ_2 ist. Die l ermittelt man durch Vergleich von (18) mit (16) zu

$$l_n(x) = k_n(x) - \frac{\varrho(x)}{\lambda_1^n}. \tag{19}$$

Man muß also nur ϱ bestimmen, um zu λ_2 zu gelangen, und kann in der gleichen Weise fortfahren, wenn es sich um die größeren Eigenwerte handelt.

In der Technik schlägt man oft folgenden Weg ein, um schnell zu einer Abschätzung des kleinsten Eigenwertes zu gelangen[1]). Es sei etwa das erste Randwertproblem für die einfache Gleichung $y'' + \lambda p(x) y = 0$ zu untersuchen. Man geht von einer beliebigen Funktion $y_1(x)$, die an den Intervallenden, und nur an diesen, verschwindet, und einem beliebigen Wert λ_1 aus und bestimmt dazu $y_2(x)$ aus der Gleichung $y_2'' + \lambda_1 p(x) y_1 = 0$ mit $y_2(a) = y_2(b) = 0$; dies erfordert nur zweimalige Quadratur, die — einschließlich der Konstantenbestimmung — leicht zeichnerisch erfolgt. Würde y_2 mit y_1 zusammenfallen, so wäre es die Lösung des Problems und λ_1 ein Eigenwert. Andererseits ist,

[1]) Vgl. R. v. Mises, Monatsh. f. Mathem. u. Physik **22** (1911), S. 33.

sobald y_1 festliegt, y_2 dem λ_1 proportional. Man ändert daher zunächst λ_1 in λ_2 in dem umgekehrten Verhältnis ab, wie die durchschnittlichen y_1-Werte sich zu den y_2 verhalten (d. h. man vergrößert den angenommenen λ-Wert, wenn die y_2 kleiner sind als die y_1). Sodann bestimmt man y_3 aus $y_3'' + \lambda_2 p(x) y_2 = 0$ mit $y_3(a) = y_3(b) = 0$ und ein λ_3 so, daß $\lambda_2 : \lambda_3$ dem durchschnittlichen Verhältnis der y_3-Werte zu den y_2 entspricht. Es ist klar, daß, wenn das Verfahren konvergiert, der Grenzwert der Zahlenfolge $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ ein Eigenwert sein muß. Doch läßt sich die Konvergenzfrage zurzeit nicht vollständig erledigen.

4. Realität der Eigenwerte. Wir behaupten: Die Eigenwerte des durch (6) und (2) gegebenen Randwertproblems sind sämtlich reell, wenn die Koeffizienten der Randbedingungen (2) der (bei der ersten bis dritten Randwertaufgabe erfüllten) Bedingung

$$(20) \qquad r(b) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = r(a) \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad r(x) = e^{\int_\alpha^x f_1(t)\,dt}$$

genügen und die in (6) auftretende Funktion $p(x)$ im Intervall a, b nicht verschwindet. Zum Beweise bemerken wir zunächst: Gl. (20) gilt dann, und nur dann, wenn für irgend zwei den Randbedingungen (2) genügende Funktionen u, v

$$(21) \qquad r(b) \begin{vmatrix} v(b) & v'(b) \\ u(b) & u'(b) \end{vmatrix} = r(a) \begin{vmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{vmatrix}$$

ist. Denn aus (2) ergibt sich durch elementare Rechnung folgende Beziehung:

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} v(b) & v'(b) \\ u(b) & u'(b) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Wenn die hier auftretenden Faktoren von Null verschieden sind, so stimmen (20) und (21) unmittelbar überein. Wenn aber in (20) beiderseits Null steht, so macht man sich auf Grund der Betrachtungen von Kap. II, § 1 leicht klar, daß das auch in (21) eintreten muß, und ebenso, daß umgekehrt die Determinanten (20) verschwinden, wenn für je zwei den Randbedingungen (2) genügende Funktionen u, v die Determinanten (21) verschwinden.

Dies vorausgeschickt, genügt es nunmehr zu zeigen: Ist $\lambda = \varrho + i\sigma$ mit $\sigma \neq 0$ ein Eigenwert des durch (2) und (6) gegebenen Randwertproblems, so kann (21) nicht bestehen. Um das zu beweisen,

multiplizieren wir (6) mit $r(x)$. Wegen $r' = r \cdot f_1$ geht (6) dann über in

$$\frac{d}{dx}(r y') + (r f_2 + \lambda r p) y = 0. \tag{23}$$

Ist nun $y = u + iv$ eine zu λ gehörende Eigenfunktion, so erhält man durch Trennung des Imaginär- und Realteils in (23) die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dx}(r u') + (f_2 + \varrho p) u - \sigma p v = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dx}(r v') + (f_2 + \varrho p) v + \sigma p u = 0.$$

Durch Subtraktion der mit v multiplizierten ersten von der mit u multiplizierten zweiten Gleichung erhält man, wenn man beachtet, daß $u(rv')' - v(ru')'$ gleich der Ableitung von $r(v'u - u'v)$ ist,

$$\frac{d}{dx} r(v'u - u'v) + \sigma r p (u^2 + v^2) = 0.$$

Integration liefert:

$$\Big[r(v'u - u'v)\Big]_a^b = -\int_a^b \sigma r p (u^2 + v^2)\, dx.$$

Die rechte Seite ist von Null verschieden, die linke ist gerade die Differenz der beiden Seiten von (21), also kann in der Tat, wie wir zeigen wollten, (21) nicht bestehen. Die Realität der Eigenwerte ist somit bewiesen.

Wir heben hervor, daß nach dem Bewiesenen bei nicht verschwindendem p insbesondere für die drei ersten Randwertaufgaben die Eigenwerte stets reell sind. Die in (20) auftretenden Determinanten sind hier nämlich beide Null. Für die Randbedingungen $\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y(b) = 0$, $\beta_2 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0$ werden die Determinanten (20) $\alpha_1 \beta_2$ und $\alpha_3 \beta_4$. Die Eigenwerte sind also reell, wenn $r(b)\alpha_1/\alpha_3 = r(a) : \beta_2/\beta_4$ ist. Einen speziellen Fall dieser Art haben wir schon am Schluß von 1 behandelt.

§ 3. Eigenwerte und Oszillationstheoreme

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf die Betrachtung der speziellen Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x) y = 0, \tag{1}$$

wo $\varrho(x)$ eine für alle im folgenden betrachteten x-Werte stetige Funktion ist.

Die allgemeinere Differentialgleichung $v'' + pv' + qv = 0$ mit Randbedingungen $\bar{\alpha}_1 v(a) + \bar{\alpha}_2 v'(a) + \bar{\alpha}_3 v(b) + \bar{\alpha}_4 v'(b) = 0$, $\bar{\beta}_1 v$ $+ \bar{\beta}_2 v'(a) + \bar{\beta}_3 v(b) + \bar{\beta}_4 v'(b) = 0$ geht durch die Substitut

$v = y . e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p\,dx}$ in (1) mit den Randbedingungen (2), § 2 über, w man setzt: $\varrho = -\frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} + q$, $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 \frac{p(a)}{2}$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$, $\alpha_3 =$ $- \bar{\alpha}_4 \frac{p(b)}{2}$ usw. Aus diesen Formeln ersieht man, wie bei di Substitution die einzelnen Randwertaufgaben ineinander übergel

1. Über die Gestalt und die Nullstellen der Integralkurven. nächst zwei allgemeine Bemerkungen: Ein nicht identisch verschw dendes Integral $y(x)$ einer homogenen Differentialgleichung zwe Ordnung mit stetigen Koeffizienten hat erstens an einer Nullstell eine nicht verschwindende Ableitung und besitzt zweitens kei Häufungspunkt von Nullstellen. Denn erstens wird durch die fangsbedingungen $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0$ die identisch verschwinde Lösung eindeutig bestimmt, und zweitens würde für einen Häufun punkt h von Nullstellen gerade $y(h) = 0$, $y'(h) = 0$ sein[1]).

Wir betrachten nun zunächst eine Integralkurve y von (1) einem Intervall J, in dem wir ϱ als negativ voraussetzen. Nach hat dann die Krümmung von $y(x)$ dasselbe Vorzeichen wie y sell die Integralkurve kehrt daher der x-Achse ihre Wölbung zu u besitzt in J höchstens eine Nullstelle. Weitere Aussagen können machen, indem wir zum Vergleich eine zweite Differentialgleichu derselben Form

$$(2) \qquad z'' + \sigma(x) z = 0$$

heranziehen. Es gilt nämlich der folgende

Satz I. Ist im Intervall J, das von $x = \alpha$ bis $x =$ reicht, $\varrho(x) \leqq \sigma(x) < 0$, so gilt für zwei durch die gleich Anfangsbedingungen im Punkt x_0 von J festgelegte positi Integrale y und z von (1) und (2) in $x_0 \leqq x \leqq \beta$ die U gleichung $y \geqq z$. Ist insbesondere in irgendeinem Te intervall vor x $\varrho(\xi) \not\equiv \sigma(\xi)$, so gilt $y > z$.

---

[1]) Gäbe es eine Punktfolge x_ν mit $x_\nu \to h$ und $y(x_\nu) = 0$, so würde Stetigkeit wegen $y(h) = 0$ folgen. Weiter wäre $\frac{y(x_\nu) - y(h)}{x_\nu - h} = 0$, woraus au $y'(h) = 0$ folgte.

Zum Beweise multiplizieren wir (1) mit z, (2) mit y und subtrahieren. Die so erhaltene Gleichung

$$y''z - z''y + (\varrho - \sigma) yz = 0 \tag{3}$$

integrieren wir von x_0 bis x:

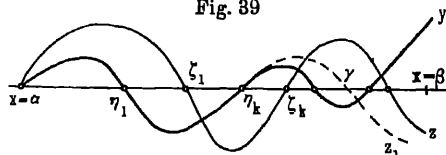
$$y'z - z'y = \int_{x_0}^{x} (\sigma - \varrho) yz\,dx \geqq 0. \tag{4}$$

Also ist

$$\frac{y'}{y} \geqq \frac{z'}{z}, \quad \log \frac{y(x)}{y(x_0)} \geqq \log \frac{z(x)}{z(x_0)}, \tag{5}$$

woraus wegen der gleichen Anfangsbedingungen die Behauptung $y(x) \geqq z(x)$ folgt. Ist in irgendeinem Teilintervall vor x $\varrho < \sigma$, so kann man in der Ungleichheit (4) das Gleichheitszeichen weglassen, und man kommt zu dem Schluß $y > z$.

Da eine Differentialgleichung (2) mit konstantem $\sigma < 0$ durch Exponentialfunktionen gelöst wird, so läßt sich mit Hilfe des eben

Fig. 39

bewiesenen Satzes unschwer das folgende Ergebnis herleiten: Ist für alle $x > x_0$ die Funktion $\varrho(x) < 0$ und ist $\lim_{x \to \infty} \varrho(x) = -k^2$, so gilt, wenn $y(x)$ ein Integral von (1) ist, bei vorgegebenen positiven Konstanten C und h für alle genügend großen x die Abschätzung

$$Ce^{(k-h)x} < y(x) < Ce^{(k+h)x}.$$

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, daß in einem Intervall $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ die Funktion $\varrho(x)$ positiv ist. Krümmung und Funktionswert einer Integralkurve $y(x)$ von (1) haben dann in J offenbar verschiedenes Zeichen, und die Integralkurve wendet der x-Achse ihre Höhlung zu, kann daher mehrere Nullstellen besitzen. Indem wir zum Vergleich wieder die Gl. (2) heranziehen, beweisen wir den folgenden

Satz II. Im Intervall J sei $\varrho(x) \geqq \sigma(x)$ und es seien $y(x)$, $z(x)$ zwei im Punkte x_0 von J verschwindende Integrale von (1) und (2). Sind dann $x_0 = \eta_0 < \eta_1 \cdots < \eta_m \leqq \beta$ die in x_0, β vorhandenen Nullstellen[1]) von $y(x)$ und $x_0 = \zeta_0 < \zeta_1 \cdots < \zeta_n \leqq \beta$

[1]) Nach der am Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung gibt es in α, β nur endlich viele.

die von $z(x)$, so ist $n \leqq m$ und für $\nu = 0, 1, 2 \ldots n$ gilt $\eta_\nu \leqq \zeta_\nu$ (vgl. Fig. 39, in der $m = 4$, $n = 3$ ist). Anschaulich gesprochen: Die Kurve y, die bei gleichem Ordinatenwert stärkere Krümmung besitzt als z, erreicht die zweite, dritte ... Nullstelle früher als z.

Es ist offenbar zu beweisen: Für jedes k der Reihe $0, 1, 2 \ldots m$, $m+1$ gilt eine der beiden Ungleichungen:

(6) $$\eta_k \leqq \zeta_k \quad \text{oder} \quad n < k.$$

Für $k = 0$ ist (6) erfüllt. Wir zeigen, daß eine der beiden Ungleichungen (6) für $k+1$ gilt, wenn dies für k der Fall ist. Das ist evident, wenn für k die zweite Ungleichung (6) gilt. Gilt aber die erste, so sei $z_1(x)$ das durch $z_1(\eta_k) = y(\eta_k) = 0$ und $z_1'(\eta_k) = y'(\eta_k)$ bestimmte Integral von (2).

Da sich die Nullstellen von $y(x)$ und $z_1(x)$ nicht häufen, so gibt es ein positives δ, so daß im Intervall $\eta_k, \eta_k + \delta$ weder $z_1(x)$ noch $y(x)$ Nullstellen besitzen. In diesem Intervall ist $y \cdot z_1 > 0$. Nehmen wir an, das Intervall würde damit enden, daß z_1 an einer Stelle $x = \gamma$ Null würde, bevor noch die nächste Nullstelle η_{k+1} von y erreicht ist. Dann würde aus Gl. (3), in der wir z_1 statt z geschrieben denken, durch Integration von η_k bis γ folgen:

(7) $$[y'z_1 - yz_1']_{\eta_k}^{\gamma} = \int_{\eta_k}^{\gamma} (\sigma - \varrho)\, y z_1 \, dx < 0.$$

Auf der linken Seite bleibt aber nur $-y(\gamma) \cdot z_1'(\gamma)$, und dieser Ausdruck kann unmöglich einen negativen Wert haben, da bei positivem y und z_1 im Intervall $z_1'(\gamma)$ negativ sein muß und umgekehrt. Somit folgt, daß z_1 vor der auf η_k folgenden Nullstelle von $y(x)$ jedenfalls keine Nullstelle besitzt. Die auf $\zeta_k > \eta_k$ folgende Nullstelle ζ_{k+1} von z muß aber noch weiter rechts liegen als die nächste Nullstelle γ von z_1, wie der folgende an und für sich wichtige Hilfssatz zeigt. Sind z und z_1 zwei linear unabhängige Integrale[1]) von (2), so liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen ζ, ζ' von z genau eine Nullstelle von z_1.

Durch Kombination der für z und z_1 angeschriebenen Gl. (2) erhalten wir nämlich $zz_1'' - z''z_1 = 0$. Hieraus folgt durch Integration $[zz_1' - z'z_1]_{\zeta}^{\zeta'} = 0$, also wegen $z(\zeta) = z(\zeta') = 0$:

(8) $$z'(\zeta) z_1(\zeta) = z'(\zeta') z_1(\zeta').$$

---

[1]) Zwei linear abhängige Integrale unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor, haben also gleiche Nullstellen.

Nun sind $z'(\zeta)$ und $z'(\zeta')$ von Null verschieden und haben, wie leicht einzusehen ist, verschiedenes Vorzeichen. Wegen der linearen Unabhängigkeit von z und z_1 sind ferner auch $z_1(\zeta)$ und $z_1(\zeta')$ von Null verschieden. Nach (8) haben daher diese beiden Zahlen verschiedenes Vorzeichen, und z_1 muß im Innern von ζ, ζ' mindestens einmal verschwinden. Indem man die Rolle von z und z_1 vertauscht, erkennt man, daß z_1 dort nicht mehr als einmal verschwinden kann.

So haben wir von $\zeta_k \geqq \eta_k$ auf $\zeta_{k+1} \geqq \eta_{k+1}$ geschlossen, womit Satz II bewiesen ist.

2. Einführung eines Parameters. Oszillationstheorem für die drei ersten Randwertaufgaben. Wir führen jetzt in die Gl. (1) einen positiven Parameter λ ein, indem wir $\varrho(x) = q(x) + \lambda p(x)$ setzen, betrachten also die Differentialgleichung

$$y'' + (q + \lambda p) y = 0. \tag{9}$$

$q(x)$ und $p(x)$ seien für $a \leqq x \leqq b$ stetig und es sei in diesem Intervall

$$m_1 \leqq q(x) \leqq M_1, \quad 0 < m_2 \leqq p(x) \leqq M_2. \tag{10}$$

Um die Anzahl ν der Nullstellen eines in a verschwindenden Integrals von (9) in a, b abzuschätzen, bemerken wir zunächst, daß das für $x = a$ verschwindende Integral $\sin \varkappa (x - a)$ der Gleichung

$$z'' + \varkappa^2 z = 0 \qquad (\varkappa \text{ reelle Konstante}) \tag{11}$$

in a, b offenbar genau $\left[\frac{b-a}{\pi}\varkappa\right]$[1] Nullstellen, von a abgesehen, besitzt. Da nun wegen (10) $q + \lambda p \geqq m_1 + \lambda m_2 > 0$ für alle genügend großen λ ist, können wir Satz II anwenden. Indem wir für $\varkappa^2$ einmal $m_1 + \lambda m_2$ und dann zweitens $M_1 + \lambda M_2$ setzen, liefert er uns die Ungleichung

$$\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{m_1 + \lambda m_2}\right] \leqq \nu \leqq \frac{b-a}{\pi}\sqrt{M_1 + \lambda M_2}, \tag{12}$$

aus der wir insbesondere ersehen, daß ν mit λ gegen ∞ geht, und umgekehrt. Satz II lehrt uns ferner, daß die n-te Nullstelle η_n des in a verschwindenden Integrals von (9) eine monoton abnehmende Funktion $\eta_n(\lambda)$ von λ ist. Diese Funktion ist überdies stetig, wie man leicht daraus folgert, daß ein (durch bestimmte Anfangsbedingungen festgelegtes) Integral von (9) eine stetige Funktion von x

---

[1] $\left[\frac{b-a}{\pi}\varkappa\right]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die $\frac{b-a}{\pi}\varkappa$ nicht übertrifft. Ist b selbst eine Nullstelle, so wird sie also zum Intervall zugezählt.

und λ ist und daß an einer Nullstelle seine Ableitung nach x nicht verschwindet.

Wir können jetzt ohne Mühe den folgenden, von Klein als Oszillationstheorem (für die erste Randwertaufgabe) bezeichneten Satz beweisen:

Es seien $p(x)$, $q(x)$ zwei in a, b stetige Funktionen; $p(x)$ sei überdies positiv. Alsdann existieren Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ von folgenden Eigenschaften: 1. Alle λ_ν, und nur diese, sind Eigenwerte von (9) für die erste Randwertaufgabe. 2. Es ist $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_\nu = \infty$. 3. Ein in $x = a$ verschwindendes Integral von (9) hat im Innern von a, b für $\lambda \leqq \lambda_1$ keine, für $\lambda_n < \lambda \leqq \lambda_{n+1}$ genau n Nullstellen.

Sei y ein für $x = a$ verschwindendes Integral von (9). Nach (12) gibt es λ-Werte, für die in a, b keine weitere Nullstelle von y liegt. Sei λ_1 die — nach (12) gewiß endliche — obere Grenze dieser λ-Werte. Aus Stetigkeitsgründen und auf Grund des Nichtverschwindens von y' an einer Nullstelle von y sowie auf Grund der Monotonität der Nullstellen als Funktionen von λ folgert man leicht, daß für genügend kleine $\lambda > \lambda_1$ in a, b außer a nur eine Nullstelle $\eta_1(\lambda)$ existiert und daß $\eta_1(\lambda_1) = b$ ist. Sei dann λ_2 die obere Grenze derjenigen $\lambda > \lambda_1$, für die $\eta_1(\lambda)$ in a, b außer a die einzige Nullstelle ist. Nach (12) ist sie endlich. Wieder schließt man, daß für genügend kleine $\lambda > \lambda_2$ in a, b außer $\eta_1(\lambda)$ und a nur eine Nullstelle $\eta_2(\lambda)$ liegt und daß $\eta_2(\lambda_2) = b$ ist. Die Fortsetzung dieser Schlußweise liefert, wie man leicht sieht, den zu beweisenden Satz.

Dem Oszillationstheorem ähnliche Aussagen gelten aber auch im Falle der zweiten und dritten Randwertaufgabe. Wir fassen diese zusammen unter den Bedingungen

$$\alpha_1 \bar{y}(a) + \alpha_2 \bar{y}'(a) = 0, \quad \beta_3 \bar{y}(b) + \beta_4 \bar{y}'(b) = 0, \tag{13}$$

wobei wir annehmen dürfen, daß etwa $\beta_4 \neq 0$ ist, da $\alpha_2 = \beta_4 = 0$ auf die erste Randwertaufgabe zurückführt. Wir beweisen nun: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten λ_n, λ_{n+1} der ersten Randwertaufgabe liegt genau ein Eigenwert $\bar{\lambda}$ der Randwertaufgabe (13). Ich behaupte zunächst: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen λ'_ν und $\lambda'_{\nu+1}$ von $\bar{y}(b, \lambda)$, wo $\bar{y}(x, \lambda)$ ein Integral von (9) ist, das durch irgendwelche der ersten Gl. (13) genügende Anfangsbedingungen festgelegt ist, liegt genau ein Eigenwert $\bar{\lambda}$ des Problems (13). Man überlegt sich nämlich leicht, daß $\bar{y}'(b, \lambda'_\nu)$ und $\bar{y}'(b, \lambda'_{\nu+1})$ verschiedenes Vorzeichen haben; wegen $\bar{y}(b, \lambda'_\nu) = \bar{y}(b, \lambda'_{\nu+1}) = 0$ hat daher auch $\beta_3 \bar{y}(b, \lambda)$

$+ \beta_4 \bar{y}'(b, \lambda)$ für λ'_ν und $\lambda'_{\nu+1}$ verschiedenes Zeichen, verschwindet also für mindestens einen Zwischenwert $\bar{\lambda}$. Daß dieser Ausdruck aber zwischen λ'_ν und $\lambda'_{\nu+1}$ nur einmal verschwindet, folgt daraus, daß er dann, und nur dann, verschwindet, wenn der Ausdruck

$$\frac{\beta_3 \bar{y}(b,\lambda) + \beta_4 \bar{y}'(b,\lambda)}{\bar{y}(b,\lambda)} = \beta_4 \left(\frac{\beta_3}{\beta_4} + \frac{\bar{y}'(b,\lambda)}{\bar{y}(b,\lambda)}\right) \tag{14}$$

verschwindet. Dieser ist aber zwischen zwei Nullstellen von $\bar{y}$ eine monotone Funktion von λ, weil $\frac{\bar{y}'(b,\lambda)}{\bar{y}(b,\lambda)}$ monoton ist, was sich unschwer auf Grund der früher bewiesenen Ungleichung (7) folgern läßt. Als $y(x)$ nehme man in (7) die Lösung $\bar{y}(x, \lambda_1)$, als $z_1(x)$ benutze man $\bar{y}(x, \lambda_2)$ mit $\lambda'_\nu < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda'_{\nu+1}$ und integriere von der letzten Nullstelle von $\bar{y}(x, \lambda_2)$ bis b.

Bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}_\nu$ die Eigenwerte des Problems (13), so tritt also einer der beiden folgenden Fälle ein:

Entweder ist

$$\bar{\lambda}_1 < \lambda'_1 < \bar{\lambda}_2 < \lambda'_2 < \bar{\lambda}_3 < \lambda'_3 < \cdots$$

oder

$$\lambda'_1 < \bar{\lambda}_1 < \lambda'_2 < \bar{\lambda}_2 < \lambda'_3 < \bar{\lambda}_3 < \cdots.$$

Welcher der beiden Fälle eintritt, hängt von der Beschaffenheit der Funktion $q(x)$ und der Konstanten β_3 und β_4 ab. Wir wollen den ersten Fall weiter verfolgen, der andere erledigt sich genau so.

Man überlegt sich leicht auf ähnliche Weise, daß für die Eigenwerte λ_ν der ersten Randwertaufgabe (man nehme am zweckmäßigsten b als Anfangspunkt, a als Endpunkt, dann ist die Betrachtung genau so wie vorhin) etwa gilt:

$$\lambda'_1 < \lambda_1 < \lambda'_2 < \lambda_2 < \lambda'_3 < \lambda_3 < \cdots,$$

falls $\alpha_2 \neq 0$ ist. Man betrachte jetzt bei festem α_1, $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ die Eigenwerte $\bar{\lambda}_\nu$ als Funktionen von β_4, also $\bar{\lambda}_\nu(\beta_4)$. Für $\beta_4 = 0$ ist $\bar{\lambda}_\nu(0) = \lambda'_\nu$. Da, wie man sich leicht nach (14) überzeugt, $\bar{\lambda}_\nu(\beta_4)$ stetig von β_4 abhängt, gilt für genügend kleine β_4 noch immer

$$\bar{\lambda}_1(\beta_4) < \lambda_1 < \bar{\lambda}_2(\beta_4) < \lambda_2 < \cdots. \tag{14'}$$

Sei $|\beta_4^*|$ die untere Grenze der $|\beta_4|$-Werte, für die $\bar{\lambda}_\nu(\beta_4)$ entgegen der Behauptung größer ist als $\lambda_{\nu+1}$ (bzw. kleiner als λ_ν; das erledigt sich genau so). Dann wäre also $\bar{\lambda}_\nu(\beta_4^*) = \lambda_{\nu+1}$. Das ist aber unmöglich, weil die zugehörige Lösung $\bar{y}(x, \lambda_{\nu+1})$ für $x = b$ verschwindet, also wegen $\beta_4 \neq 0$ auch $\bar{y}'(x, \lambda_{\nu+1}) = 0$ sein müßte. (14') gilt also für alle β_4. Läßt man $\beta_3 \to 0$ gehen, so gilt (14') immer noch, da man sich wegen $\beta_4 \neq 0$ wie eben überlegt, daß

keine Gleichheitszeichen eingetreten sein können. Damit ist be wiesen, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten λ_ν un $\lambda_{\nu+1}$ genau ein $\bar{\lambda}$ liegt.

Da die Nullstellen der Eigenfunktionen der ersten Randwer aufgabe und die von (13) einander trennen, so folgt aus de in 1 bewiesenen Hilfssatz und dem Oszillationstheorem für die erst Randwertaufgabe, daß die Eigenwerte $\bar{\lambda}$ wieder durch die Zahl de Nullstellen, die die zugehörige Eigenfunktion in a, b besitzt, charakter siert sind und daß jede Nullstellenzahl vorkommt.

3. Allgemeinere Randbedingungen. Wir behandeln jetzt Gl. (9 unter den allgemeinsten der Bedingung § 2, (20) genügenden linea unabhängigen Randbedingungen § 2, (2). Sehen wir von dem Fal der schon behandelten dritten Randwertaufgabe ab, so sind die i dieser Bedingung auftretenden Determinanten $\neq 0$, und da ferner di in § 2, (20) auftretende Funktion $r(x)$ in unserem Falle identisch wird, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 1.$$

Wir setzen nun

$$(16)\qquad \begin{cases} l_1'[y(x)] = \alpha_1 y(x) + \alpha_2 y'(x), & l_1''[y(x)] = \alpha_3 y(x) + \alpha_4 y'(x) \\ l_2'[y(x)] = \beta_1 y(x) + \beta_2 y'(x), & l_2''[y(x)] = \beta_3 y(x) + \beta_4 y'(x) \end{cases}$$

so daß also [vgl. § 2, Gl. (2)]:

$$(17)\qquad l_1(y) = l_1'[y(a)] + l_2''[y(b)], \quad l_2(y) = l_2'[y(a)] + l_2''[y(b)]$$

wird, und behaupten: Unter Voraussetzung der Bedingung (15) lieg zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten der dritten Rand wertaufgabe

$$(18)\qquad l_1'[y(a)] = 0, \quad l_1''[y(b)] = 0$$

genau ein Eigenwert der allgemeinen Randwertaufgabe

$$(19)\qquad l_1(y) = 0, \quad l_2(y) = 0.$$

Als Fundamentalsystem von (9) wählen wir nun zwei Integral y_1, y_2, deren Anfangsbedingungen durch die folgenden Gleichunge wegen (15) eindeutig bestimmt sind:

$$(20)\qquad \begin{cases} l_1'[y_1(a)] = 0, & l_2'[y_1(a)] = 1, \\ l_1'[y_2(a)] = 1, & l_2'[y_2(a)] = 0. \end{cases}$$

Die Eigenwerte des Problems (19) sind die Nullstellen vo $\Delta(\lambda) = l_1(y_1)l_2(y_2) - l_1(y_2)l_2(y_1)$. Aus (17) und (20) erhält ma durch Rechnung

$$(21)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} l_1''[y_1(b)] & 1 + l_1''[y_2(b)] \\ 1 + l_2''[y_1(b)] & l_2''[y_2(b)] \end{vmatrix} = -2 - l_1''[y_2(b)] - l_2''[y_1(b)]$$

wenn man noch die Beziehung

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} l_1''[y_1(b)] & l_2''[y_1(b)] \\ l_1''[y_2(b)] & l_2''[y_2(b)] \end{vmatrix} = -1$$

benutzt. Diese ergibt sich so: Es ist nach (16) und (15)

$$\begin{vmatrix} l_1''[y_1(b)] & l_2''[y_1(b)] \\ l_1''[y_2(b)] & l_2''[y_2(b)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(b) & y_1'(b) \\ y_2(b) & y_2'(b) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(b) & y_1'(b) \\ y_2(b) & y_2'(b) \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber wegen des Fehlens des Koeffizienten von y' in (9) die Determinante $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ konstant [VI, § 2, (26)], daher ist die zu berechnende Determinante (22) auch gleich

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1'[y_1(a)] & l_2'[y_1(a)] \\ l_1'[y_2(a)] & l_2'[y_2(a)] \end{vmatrix},$$

also nach (20) gleich -1, wie behauptet.

Da nun nach (20) $y_1(x)$ die erste Bedingung (18) erfüllt, sind die Eigenwerte l_ι des Problems (18) die Wurzeln der Gleichung

$$(23)\qquad l_1''[y_1(b)] = 0.$$

Hieraus und aus (21) und (22) folgt:

$$(24)\qquad \varDelta(l_\iota) = -\frac{1}{l_2''[y_1(b)]}\left[1 + l_2''[y_1(b)]\right]^2.$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir nun beweisen, daß im Intervall l_ι, $l_{\iota+1}$ (die Grenzen mit eingeschlossen) mindestens ein Eigenwert von (19), d. h. eine Nullstelle von $\varDelta(\lambda)$ liegt. Wenn nämlich $l_2''[y_1(b)]$ für l_ι oder $l_{\iota+1}$ den Wert -1 annimmt, so verschwindet nach (24) $\varDelta(\lambda)$ für l_ι oder $l_{\iota+1}$. Ist dies aber nicht der Fall, so genügt es zu zeigen, daß $\varDelta(\lambda)$ für $\lambda = l_\iota$ und $\lambda = l_{\iota+1}$ verschiedenes Vorzeichen besitzt, und nach (24) ist das bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß $l_2''[y_1(b)]$ für l_ι und $l_{\iota+1}$ verschiedene Zeichen besitzt. Nun gilt aber an den Stellen l_ι und $l_{\iota+1}$

$$\alpha_3 y_1(b) + \alpha_4 y_1'(b) = 0,$$

daher ist dort

$$l_2''[y_1(b)] = \left(\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\beta_4\right) y_1(b).$$

Da aber nach 2 l_ι und $l_{\iota+1}$ durch eine Nullstelle von $y_1(b)$ getrennt werden, wo $y_1(b)$ das Zeichen wechselt, nimmt $l_2''[y_1(b)]$ an den

Stellen l_ι und $l_{\iota+1}$ Werte von verschiedenem Vorzeichen an; den der Klammerfaktor verschwindet nur, wenn die Randbedingunge $l_2''[y] = 0$ und $l_1''[y] = 0$ identisch sind.

Zunächst erst etwas über die „Vielfachheit" der Eigenwerte Ein Eigenwert heißt n-fach, wenn zu ihm n linear unabhängige Eigenfunktionen gehören. Die Eigenwerte einer Differentialgleichung zweiter Ordnung sind natürlich höchstens zweifach. Für die ersten drei Randwertaufgaben sind sie, wie man sofort sieht, stets einfach. Für Randbedingungen mit zweifachen Eigenwerten haben wir in § 2, 1 schon ein Beispiel kennengelernt. Notwendig und hinreichend dafür, daß λ_0 ein zweifacher Eigenwert ist, ist, daß $\Delta(\lambda_0)$ vom Range 0 ist. Das folgt unmittelbar aus den Betrachtungen von § 1, 2 [vgl. dort insbesondere Gl. (8)] im Verein mit denen über lineare Gleichungen (II, § 1). Hat Δ den Rang 1, so bestimmen nämlich die Gl. (8), § 1 das Verhältnis $c_1 : c_2$ eindeutig, und es gibt nicht zwei unabhängige Eigenlösungen. Die zweifachen Eigenwerte des Problems (19) sind hiernach notwendig auch Eigenwerte des Problems (18). In der Tat ist nach (21) für zweifache Eigenwerte von (18) notwendig $l_1''[y_1(b)] = 0$. Das ist aber gerade die Bedingung (23) für die Eigenwerte von (18).

Nach diesen Bemerkungen kann man nun zeigen, daß zwischen l_ι und $l_{\iota+1}$ nur ein Eigenwert von (19) liegt. Auf diesen Beweis gehen wir hier aber nicht ein[1]).

Wir bemerken schließlich noch, daß für die Eigenwerte λ_n einer der Bedingung § 2, (20) genügenden Randwertaufgabe der Differentialgleichung (9) die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ konvergiert. Nach dem im vorstehenden über die Lage der Eigenwerte Gesagten genügt es, die Behauptung für die erste Randwertaufgabe zu beweisen. Für $\lambda = \lambda_n$ hat eine diese Aufgabe lösende Funktion außer a in a, b genau n Nullstellen, wenn b zum Intervall zugerechnet wird. Nach (12) ist daher

$$n \leqq \frac{b-a}{\pi}\sqrt{M_1 + M_2\lambda_n}, \quad \text{also} \quad \lambda_n \geqq \left[\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - M_1\right]\frac{1}{M_2},$$

woraus die Behauptung folgt.

---

[1]) Er erfordert die nähere Betrachtung von $\frac{d\Delta}{d\lambda}$. Vgl. Birkhoff, Transactions of the Amer. Math. Soc. **10** (1909), S. 259ff. oder E. L. Ince, Ordinary differential equations. London 1927, S. 242f. (Dort wird ein leicht zu verallgemeinernder Spezialfall in einfacher Darstellung behandelt.)

§ 4. Eigenfunktionen und Entwicklungssatz

1. Orthogonalität. Wir betrachten die „selbstadjungierte"[1]) Differentialgleichung

$$(1)\qquad L(y) \equiv \frac{d}{dx}[r(x)y'] + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0, \quad p > 0,\ r > 0,$$

unter einer Randbedingung § 2, Gl. (2), deren Koeffizienten der in § 2, **4** eingeführten Gleichung

$$(2)\qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)r(b) = (\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)r(a)\,^{2)}$$

genügen. Wir behaupten: zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gehörende Eigenfunktionen y_i, y_k genügen der Orthogonalitätsrelation

$$(3)\qquad \int_a^b p\,y_i y_k\,dx = 0.$$

Dazu bemerken wir, daß die allgemeine Gleichung $y'' + f_1 y' + f_2 y + \lambda f_3 y = 0$ durch Multiplikation mit der in § 2, (20) definierten Funktion $r(x)$ auf die „selbstadjungierte" Form (1) gebracht wird.

In der Tat erhält man, wenn man die für y_i geltende Gl. (1) mit y_k multipliziert und dann von der unter Vertauschung von i und k entsprechend gebildeten Gleichung abzieht:

$$(4)\qquad y_i\frac{d}{dx}(r y_k') - y_k\frac{d}{dx}(r y_i') = (\lambda_i - \lambda_k)p\,y_i y_k.$$

Hieraus folgt durch Integration beider Seiten:

$$(5)\qquad \Big[r\,(y_i y_k' - y_i' y_k)\Big]_a^b = (\lambda_i - \lambda_k)\int_a^b p\,y_i y_k\,dx.$$

Wie aus § 2, **4** folgt [vgl. insbesondere Gl. (21)], verschwindet die linke Seite wegen (2). Wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ ergibt sich daher die Behauptung (3). Wir bemerken, daß aus dem eben bewiesenen Satze wieder die schon früher bewiesene Realität der Eigenwerte leicht gefolgert werden kann.

Ist $\lambda_i = \lambda_k$ ein zweifacher Eigenwert, so lassen sich zwei zugehörige linear unabhängige Eigenfunktionen y_i, y_k stets so wählen, daß (3) besteht. Denn wenn (3) zunächst nicht zutrifft, so ersetze

---

[1]) Zu dem Differentialausdruck $L(y) = (py')' + ry' + qy$ nennt man den Differentialausdruck $M(z) = (pz')' - (rz)' + qz$ adjungiert. Damit $L(y)$ zu sich selbst adjungiert ist, muß der Ausdruck die in (1) angegebene Gestalt annehmen.

[2]) Daß $r(x)$ die gleiche Bedeutung hat wie in § 2, **4**, folgt aus der wenige Zeilen tiefer gemachten Bemerkung.

Stellen l_ι und $l_{\iota+1}$ Werte von verschiedenem Vorzeichen an; denn der Klammerfaktor verschwindet nur, wenn die Randbedingungen $l_2''[y] = 0$ und $l_1''[y] = 0$ identisch sind.

Zunächst erst etwas über die „Vielfachheit" der Eigenwerte. Ein Eigenwert heißt n-fach, wenn zu ihm n linear unabhängige Eigenfunktionen gehören. Die Eigenwerte einer Differentialgleichung zweiter Ordnung sind natürlich höchstens zweifach. Für die ersten drei Randwertaufgaben sind sie, wie man sofort sieht, stets einfach. Für Randbedingungen mit zweifachen Eigenwerten haben wir in § 2, 1 schon ein Beispiel kennengelernt. Notwendig und hinreichend dafür, daß λ_0 ein zweifacher Eigenwert ist, ist, daß $\Delta(\lambda_0)$ vom Range 0 ist. Das folgt unmittelbar aus den Betrachtungen von § 1, 2 [vgl. dort insbesondere Gl. (8)] im Verein mit denen über lineare Gleichungen (II, § 1). Hat Δ den Rang 1, so bestimmen nämlich die Gl. (8), § 1 das Verhältnis $c_1 : c_2$ eindeutig, und es gibt nicht zwei unabhängige Eigenlösungen. Die zweifachen Eigenwerte des Problems (19) sind hiernach notwendig auch Eigenwerte des Problems (18). In der Tat ist nach (21) für zweifache Eigenwerte von (18) notwendig $l_1''[y_1(b)] = 0$. Das ist aber gerade die Bedingung (23) für die Eigenwerte von (18).

Nach diesen Bemerkungen kann man nun zeigen, daß zwischen l_ι und $l_{\iota+1}$ nur ein Eigenwert von (19) liegt. Auf diesen Beweis gehen wir hier aber nicht ein[1]).

Wir bemerken schließlich noch, daß für die Eigenwerte λ_n einer der Bedingung § 2, (20) genügenden Randwertaufgabe der Differentialgleichung (9) die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ konvergiert. Nach dem im vorstehenden über die Lage der Eigenwerte Gesagten genügt es, die Behauptung für die erste Randwertaufgabe zu beweisen. Für $\lambda = \lambda_n$ hat eine diese Aufgabe lösende Funktion außer a in a, b genau n Nullstellen, wenn b zum Intervall zugerechnet wird. Nach (12) ist daher

$$n \leqq \frac{b-a}{\pi} \sqrt{M_1 + M_2 \lambda_n}, \quad \text{also} \quad \lambda_n \geqq \left[\frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} - M_1\right] \frac{1}{M_2},$$

woraus die Behauptung folgt.

---

[1]) Er erfordert die nähere Betrachtung von $\frac{d\Delta}{d\lambda}$. Vgl. Birkhoff, Transactions of the Amer. Math. Soc. **10** (1909), S. 259 ff. oder E. L. Ince, Ordinary differential equations. London 1927, S. 242 f. (Dort wird ein leicht zu verallgemeinernder Spezialfall in einfacher Darstellung behandelt.)

§ 4. Eigenfunktionen und Entwicklungssatz

1. Orthogonalität. Wir betrachten die „selbstadjungierte"[1]) Differentialgleichung

$$(1)\qquad L(y) \equiv \frac{d}{dx}[r(x)y'] + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0, \quad p > 0,\ r > 0,$$

unter einer Randbedingung § 2, Gl. (2), deren Koeffizienten der in § 2, 4 eingeführten Gleichung

$$(2)\qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)r(b) = (\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)r(a)\,^{2)}$$

genügen. Wir behaupten: zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gehörende Eigenfunktionen y_i, y_k genügen der Orthogonalitätsrelation

$$(3)\qquad \int_a^b p\, y_i y_k\, dx = 0.$$

Dazu bemerken wir, daß die allgemeine Gleichung $y'' + f_1 y' + f_2 y + \lambda f_3 y = 0$ durch Multiplikation mit der in § 2, (20) definierten Funktion $r(x)$ auf die „selbstadjungierte" Form (1) gebracht wird.

In der Tat erhält man, wenn man die für y_i geltende Gl. (1) mit y_k multipliziert und dann von der unter Vertauschung von i und k entsprechend gebildeten Gleichung abzieht:

$$(4)\qquad y_i \frac{d}{dx}(r y_k') - y_k \frac{d}{dx}(r y_i') = (\lambda_i - \lambda_k)\, p\, y_i y_k.$$

Hieraus folgt durch Integration beider Seiten:

$$(5)\qquad \Big[r(y_i y_k' - y_i' y_k)\Big]_a^b = (\lambda_i - \lambda_k)\int_a^b p\, y_i y_k\, dx.$$

Wie aus § 2, 4 folgt [vgl. insbesondere Gl. (21)], verschwindet die linke Seite wegen (2). Wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ ergibt sich daher die Behauptung (3). Wir bemerken, daß aus dem eben bewiesenen Satze wieder die schon früher bewiesene Realität der Eigenwerte leicht gefolgert werden kann.

Ist $\lambda_i = \lambda_k$ ein zweifacher Eigenwert, so lassen sich zwei zugehörige linear unabhängige Eigenfunktionen y_i, y_k stets so wählen, daß (3) besteht. Denn wenn (3) zunächst nicht zutrifft, so ersetze

---

[1]) Zu dem Differentialausdruck $L(y) = (py')' + ry' + qy$ nennt man den Differentialausdruck $M(z) = (pz')' - (rz)' + qz$ adjungiert. Damit $L(y)$ zu sich selbst adjungiert ist, muß der Ausdruck die in (1) angegebene Gestalt annehmen.

[2]) Daß $r(x)$ die gleiche Bedeutung hat wie in § 2, 4, folgt aus der wenige Zeilen tiefer gemachten Bemerkung.

man y_k durch die zu λ_k gehörende, von y_i linear unabhängige Eigenfunktion $\eta_k = y_i + K y_k$, wo K die durch die Gleichung $\int_a^b p y_i (y_i + K y_k)\, dx = 0$ bestimmte Konstante ist. Wir werden in der Folge stets annehmen, daß — wenn überhaupt ein zweifacher Eigenwert auftritt — y_i, y_k von vornherein so gewählt sind, daß (3) besteht.

Wir werden weiter stets annehmen, daß die Eigenfunktionen so normiert sind, daß

$$\int_a^b p y_i^2\, dx = 1 \tag{6}$$

ist, was offenbar durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor erreicht werden kann.

Wir beweisen noch den folgenden Satz, den wir später zu benutzen haben werden: Ist y_i eine zu dem Eigenwert λ_i gehörende Eigenfunktion, so hat die inhomogene Gleichung

$$L(y) = \varphi(x) \tag{1'}$$

für $\lambda = \lambda_i$ nur dann ein den gleichen Randbedingungen wie y_i genügendes Integral $\eta(x)$, wenn y_i und φ orthogonal sind, d. h. wenn

$$\int_a^b \varphi y_i\, dx = 0 \tag{7}$$

ist[1]).

Aus (1) und (1') erhalten wir nämlich durch Multiplikation mit η bzw. y_i und darauf folgende Subtraktion:

$$y_i \frac{d}{dx}(r\eta') - \eta \frac{d}{dx}(r y_i') = \varphi y_i. \tag{8}$$

Integration ergibt:

$$\Big[r(y_i\eta' - y_i'\eta)\Big]_a^b = \int_a^b \varphi y_i\, dx. \tag{9}$$

Wegen (2) verschwindet die linke Seite, so daß sich (7) als notwendig ergibt[2]).

2. Der Entwicklungssatz. Wir wollen jetzt folgenden Entwicklungssatz (vgl. § 1, 4) formulieren: Es sei $f(x)$ eine in a, b zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche bestimmte, der Gl. (2) genügende Randbedingungen der Gestalt (2), § 2

---

[1]) Vgl. den am Schluß von § 1, 2 erwähnten Spezialfall.

[2]) Man kann zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. (Vgl. auch XIII, § 2.)

erfüllt; es seien λ_1, λ_2 ... die zu diesen Randbedingungen gehörenden Eigenwerte von (1) (zweifache zweimal aufgeschrieben), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ... die zugehörigen normierten orthogonalen Eigenfunktionen; dann gibt es Konstanten $c_1, c_2, \ldots$, so daß

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots \tag{10}$$

ist, wobei die rechtsstehende Reihe in a, b gleichmäßig konvergiert.

Setzt man voraus, daß dieser Satz zu Recht besteht, so kann man die Koeffizienten c_ν sofort berechnen: Man multipliziere (10) mit $p(x)\varphi_\mu(x)$ und integriere über x von a bis b. Da man wegen der gleichmäßigen Konvergenz gliedweise integrieren darf und die φ voraussetzungsgemäß den Bedingungen (3) und (6) — Orthogonalität und Normierung — genügen, so erhält man ohne weiteres:

$$\int_a^b p\varphi_\mu f\,dx = c_\mu. \tag{11}$$

Den Beweis für den Entwicklungssatz wollen wir hier nur für den Fall der ersten Randwertaufgabe und der Differentialgleichung

$$y'' + r(x)y' + (q + \lambda p)y = 0 \qquad (p > 0) \tag{12}$$

erbringen. Der allgemeine Fall wird später (XIII, § 2) mit Hilfsmitteln aus der Theorie der Integralgleichungen behandelt werden.

Wir wollen zunächst das Problem der Entwicklung der beliebigen Funktion $f(x)$ zurückführen auf das Problem der Entwicklung einer ganz speziellen Funktion. Zu diesem Zwecke betrachten wir neben (12) die inhomogene Gleichung

$$y'' + r(x)y' + (q + \lambda p)y = \varphi(x). \tag{13}$$

Es seien nun $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ zwei Integrale von (12), die den Bedingungen

$$y_1(a, \lambda) = 0, \quad y_2(b, \lambda) = 0 \tag{14}$$

genügen. Nach Definition der Eigenwerte λ_i ist dann

$$y_1(b,\lambda) \begin{matrix} = 0 \text{ für } \lambda = \lambda_i \\ \neq 0 \;\;\text{„}\;\; \lambda \neq \lambda_i \end{matrix}, \quad y_2(a,\lambda) \begin{matrix} = 0 \text{ für } \lambda = \lambda_i \\ \neq 0 \;\;\text{„}\;\; \lambda \neq \lambda_i \end{matrix}. \tag{15}$$

Da ferner im Falle $\lambda \neq \lambda_i$ $y_1(x, \lambda)$ und $y_2(x, \lambda)$ linear unabhängig sind, so ist nach VI, § 2

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1'(x,\lambda) & y_2'(x,\lambda) \end{vmatrix} \tag{16}$$

größer als 0 und, wie aus (14) und (15) folgt, gleich 0 für $\lambda = \lambda_i$. Im Falle $\lambda \neq \lambda_i$ genügt, wie man unter Benutzung von (12) durch Differentiation sofort verifiziert,

$$(17)\quad y(x,\lambda) = \frac{y_2(x,\lambda)}{D}\int_a^x y_1(\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{y_1(x,\lambda)}{D}\int_x^b y_2(\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi$$

der Gl. (13) und außerdem nach (14) den Randbedingungen der ersten Randwertaufgabe. Setzen wir

$$(18)\quad \begin{cases} G(x,\xi,\lambda) = \dfrac{y_2(x,\lambda)\,y_1(\xi,\lambda)}{-D} & \text{für } a \leqq \xi \leqq x \\[2ex] = \dfrac{y_2(\xi,\lambda)\,y_1(x,\lambda)}{-D} & \text{für } x \leqq \xi \leqq b, \end{cases}$$

so können wir (17) schreiben:

$$(19)\qquad y(x,\lambda) = -\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

$G(x,\xi,\lambda)$ heißt die „Greensche Funktion" des durch die erste Randwertaufgabe und (12) gegebenen Randwertproblems[1]). Nach (19) löst man mit ihrer Hilfe die erste Randwertaufgabe für die inhomogene Gl. (13). Dies Ergebnis gilt für jede stetige nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(x)$. Indem wir, was offenbar keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit ist, annehmen, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (12) ist, können wir daher auch $\varphi(x) = f''(x) + r(x)f'(x) + q(x)f(x)$ wählen. Dann ist aber $f(x)$ für $\lambda = 0$ ein Integral von (13), und da $f(x)$ auch den Randbedingungen genügt, so ist nach (19)

$$(20)\quad f(x) = -\int_a^b G(x,\xi,0)[f''(\xi) + r(\xi)f'(\xi) + q(\xi)f(\xi)]\,d\xi.$$

Denn die Lösung des inhomogenen Problems ist für $\lambda \neq \lambda_i$ eindeutig bestimmt. Hiermit ist die angekündigte Reduktion des Problems erreicht: Können wir für $G(x,\xi,0)$ eine in bezug auf x gleichmäßig konvergente Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ angeben, so erhalten wir aus (20) sofort eine solche für $f(x)$.

3. Entwicklung der Greenschen Funktion. Um nun die Entwicklung von $G(x,\xi,0)$ herzustellen, betrachten wir $G(x,\xi,\lambda)$ als Funktion von λ in der komplexen λ-Ebene. Wir werden zunächst zeigen, daß $G(x,\xi,\lambda)$ für $\lambda = \lambda_i$ einfache Pole hat und für $\lambda \neq \lambda_i$ regulär ist. Alsdann werden wir die Residuen berechnen, um mit

---

[1]) Näheres über die Greensche Funktion vgl. Kap. XIII, § 2, 1.

Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes (III, § 3, 6) eine Darstellung von G zu erhalten, welche uns in naturgemäßer Weise zu dem Entwicklungssatz führen wird.

Wir beginnen damit, die in der Definition (18) der Greenschen Funktion auftretenden Funktionen $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ eindeutig festzulegen, indem wir neben (14) noch

$$y_1'(a, \lambda) = 1, \quad y_2'(b, \lambda) = 1 \tag{21}$$

verlangen. Alsdann wird, wenn wir statt der Gl. (12) der Einfachheit halber die Gleichung

$$y'' + (q + \lambda p) y = 0 \tag{12'}$$

ohne das Glied mit y' betrachten,

$$D = y_1(b, \lambda). \tag{22}$$

Da nun $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ ganze Funktionen von λ sind, so folgt aus (18), daß $G(x, \xi, \lambda)$ als Funktion von λ in jedem endlichen Bereich der λ-Ebene für $x \neq \xi$ regulär ist, abgesehen von den Stellen $\lambda = \lambda_i$, in denen D nach (22) verschwindet und G im „Allgemeinen", d. h. für solche x und ξ, für die der Zähler von G nicht verschwindet, Pole hat. Wir behaupten, daß diese Pole von der ersten Ordnung sind. Zum Beweis haben wir nach (18) und (22) zu zeigen, daß $y_1(b, \lambda)$ für $\lambda = \lambda_i$ eine Nullstelle erster Ordnung hat. Die Entwicklung von $y_1(x, \lambda)$ an dieser Stelle laute

$$y_1(x, \lambda) = y_1(x, \lambda_i) + (\lambda - \lambda_i)\eta(x, \lambda_i) + \cdots, \tag{23}$$

und es muß, wenn unsere Behauptung richtig sein soll, $\eta(b, \lambda_i) \neq 0$ sein. Nun ist $y_1(x, \lambda)$ ein Integral von (12'). Durch Einsetzen von (23) in diese Gleichung und Nullsetzen des Faktors von $\lambda - \lambda_i$ erhält man daher

$$\eta'' + (q + \lambda_i p)\eta = -p y_1(x, \lambda_i). \tag{24}$$

η erfüllt also die zu (12') gehörende inhomogene Gleichung. Außerdem erfüllt aber η wegen (14) die Randbedingung $\eta(a, \lambda_i) = 0$. Wäre nun auch $\eta(b, \lambda_i) = 0$, so würde η die erste Randwertaufgabe für (24) lösen. Da aber $y_1(x, \lambda_i)$ diese Randwertaufgabe für die homogene Gl. (12') löst, so müßte nach dem in 1 bewiesenen Orthogonalitäts-Satze

$$\int_a^b - p y_1 \cdot y_1 \, dx = -\int_a^b p y_1^2 \, dx = 0$$

sein, was wegen $p > 0$ unmöglich ist. Also ist $\eta(b, \lambda_i) \neq 0$ und $G(x, \xi, \lambda)$ hat für $\lambda = \lambda_i$ einen Pol erster Ordnung. Zur Bestimmung des Residuums haben wir $\eta(b, \lambda_i)$ zu berechnen. Hierzu bemerken

wir, daß wegen (21) und (23) $\eta'(a, \lambda_i) = 0$, also $\eta(x, \lambda_i)$ das durch die Anfangsbedingungen $\eta(a, \lambda_i) = 0$, $\eta'(a, \lambda_i) = 0$ eindeutig bestimmte Integral von (24) ist. Man berechnet dieses unter Benutzung irgendeines von $y_1(x, \lambda_i)$ unabhängigen Integrals $y_3(x, \lambda_i)$ von (12') zu

$$(25) \quad \eta(x, \lambda_i) = \int_a^x \frac{[y_1(x, \lambda_i) y_3(\xi, \lambda_i) - y_3(x, \lambda_i) y_1(\xi, \lambda_i)]}{y_1(b, \lambda_i) y_3'(b, \lambda_i) - y_3(b, \lambda_i) y_1'(b, \lambda_i)} p(\xi) y_1(\xi, \lambda_i) d\xi.$$

Also ist nach (15)

$$(26) \quad y_1'(b, \lambda_i) \eta(b, \lambda_i) = \int_a^b p(\xi) y_1^2(\xi, \lambda_i) d\xi.$$

Hiernach ist $\dfrac{y_1(x, \lambda_i)}{\sqrt{\eta(b, \lambda_i) y_1'(b, \lambda_i)}}$ die normierte Eigenfunktion $\varphi_i(x)$.

Beachtet man nun, daß, weil $y_1(x, \lambda_i)$ und $y_2(x, \lambda_i)$ Eigenfunktionen sind, wegen (21)

$$(27) \quad y_1(x, \lambda_i) = y_2(x, \lambda_i) \cdot y_1'(b, \lambda_i)$$

ist, so ist nach (18), (22), (23) und (27)

$$-\frac{y_1(x, \lambda_i) y_2(\xi, \lambda_i)}{\eta(b, \lambda_i)} = -\frac{y_1(x, \lambda_i)}{\sqrt{\eta(b, \lambda_i) y_1'(b, \lambda_i)}} \cdot \frac{y_1(\xi, \lambda_i)}{\sqrt{\eta(b, \lambda_i) \cdot y_1'(b, \lambda_i)}}$$

das Residuum von $G(x, \xi, \lambda)$. Dieses ist also gleich $-\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)$.

Es sei nun Q_n ein Quadrat, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und auf dessen Rand keine Eigenwerte liegen. Dann liefert uns der Residuensatz für ein im Innern von Q gelegenes λ:

$$(28) \quad G(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Hierbei ist das Integral über den Rand von Q_n und die Summe über alle im Innern von Q_n gelegenen λ_i zu erstrecken. Können wir nun zeigen, daß sich eine Folge $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ solcher Quadrate angeben läßt, deren Seitenlängen gegen Unendlich gehen und für die gleichmäßig in x und ξ

$$(29) \quad \lim_{n \to \infty} \int_{Q_n} \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda} d\mu = 0$$

ist, so folgt aus (28)

$$(30) \quad G(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda},$$

und es ergibt sich insbesondere die gesuchte gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(31) \quad G(x, \xi, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

4. Abschluß des Beweises. Die Behauptung (29) wird offenbar bewiesen sein, wenn wir zeigen können: Q_n läßt sich so wählen, daß, wenn λ auf dem Rande von Q_n liegt, für genügend großes n die Ungleichung

$$|G(x, \xi, \lambda)| < \frac{M}{|\sqrt{\lambda}|} \tag{32}$$

gilt, in der M eine von x, ξ, λ unabhängige Zahl ist. Wir wollen diese Abschätzung nicht in allen Einzelheiten durchführen, sondern nur den Gedankengang skizzieren, der zu ihr führt: Durch die Substitution

$$u = \frac{1}{\alpha}\int_a^x \sqrt{p(t)}\,dt, \quad v = y \cdot p^{1/4}, \tag{33}$$

wo α die Konstante $\int_a^b \sqrt{p(t)}\,dt$ bedeutet, geht, wie man ohne weiteres durch Rechnung verifiziert, (12′) über in

$$\frac{d^2 v}{d u^2} + (q^* + \lambda^*)\,v = 0, \tag{34}$$

worin q^* eine stetige Funktion von u und $\lambda^* = \alpha^2\lambda$ ist, und die erste Randwertaufgabe für das Intervall a, b geht nach (33) in die gleiche Aufgabe für das Intervall 0, 1 über. Aus (33), (18) und (22) ersieht man ferner, daß (32) richtig sein wird, wenn für die Greensche Funktion G^* des transformierten Problems die analoge Abschätzung gilt. Mit anderen Worten: wir dürfen von vornherein annehmen: $a = 0$, $b = 1$, $p \equiv 1$. Unter dieser Annahme sei $y(x, \lambda)$ die durch

$$y(s, \lambda) = 0, \quad y'(s, \lambda) = 1 \quad (0 \leqq s \leqq 1) \tag{35}$$

festgelegte Lösung von (12′) [vgl. (14) und (21)]. Nun ist

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\,(x - s) \tag{36}$$

die den gleichen Anfangsbedingungen genügende Lösung von $Y'' + \lambda Y = 0$, und daher ist

$$(y - Y)'' + \lambda(y - Y) = -qy \quad \text{und} \quad (y - Y)_{x=s} = (y - Y)'_{x=s} = 0,$$

woraus sich ergibt

$$y - Y = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_s^x y(t)\,q(t) \sin \sqrt{\lambda}\,(x - t)\,dt. \tag{37}$$

Diese Gleichung kann man so umschreiben:

$$y = Y - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2i\sqrt{\lambda}}\int_s^x \frac{y(t)}{e^{i\sqrt{\lambda}(t-s)}} \cdot q(t)\left[1 - e^{2i\sqrt{\lambda}(t-x)}\right] dt \tag{37′}$$

oder

$$(37'') \quad y = Y - \frac{e^{-i\sqrt{\lambda}(x-s)}}{2i\sqrt{\lambda}} \int_s^x \frac{y(t)}{e^{-i\sqrt{\lambda}(t-s)}} \cdot q(t)\left[e^{2i\sqrt{\lambda}(x-t)} - 1\right] dt.$$

Es soll nun bewiesen werden, daß

$$(38) \qquad y - Y = \frac{e^{\pm i\sqrt{\lambda}(x-s)}}{\lambda} R(\sqrt{\lambda}, x, s)$$

ist, wo R beschränkt bleibt, wenn λ gegen ∞ geht. Das Pluszeichen in (38) gilt, wenn der Imaginärteil von $\sqrt{\lambda}(x-s)$ negativ ist, anderenfalls steht das Minuszeichen.

Den Beweis führen wir nur für den Fall eines negativen Imaginärteils von $\sqrt{\lambda}(x-s)$. Sonst hätte man die analoge Betrachtung ausgehend von Gleichung (37'') anzustellen, die wir jetzt für (37') ausführen.

Bezeichne M das Maximum von $\left|\dfrac{y(x)}{e^{i\sqrt{\lambda}(x-s)}}\right|$ für alle x-Werte aus dem Intervall 0, 1 und sei $N = \int_0^1 |q(t)|\,dt$. Dann erhält man aus (37') unter Beachtung von (36), da $t - x \leqq 0$ ausfällt,

$$\left|\frac{y(x)}{e^{i\sqrt{\lambda}(x-s)}}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(1 + MN).$$

Da diese Gleichung für jedes x gilt, bleibt sie auch für das Maximum der linken Seite richtig. Das ergibt:

$$M\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} N\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Hieraus folgt, daß M mit wachsendem λ gegen Null strebt wie $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$; damit ergibt sich die Behauptung (38) sofort aus (37').

Nach (18), (22), (38), (14), (21) und (35) ergibt sich nun etwa für $x \leqq \xi$ und für negativen Imaginärteil von $\sqrt{\lambda}$

$$(39) \qquad G(x, \xi, \lambda)$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}\,x + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}}{\lambda} R(\sqrt{\lambda}, x, 0)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}(\xi - 1) + \frac{e^{-i\sqrt{\lambda}(\xi-1)}}{\lambda} R(\sqrt{\lambda}, \xi, 1)\right]}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}}}{\lambda} R(\sqrt{\lambda}, 1, 0)}$$

$$= \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(x-\xi)}\left[1 - e^{-2i\sqrt{\lambda}x} + \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} R(\sqrt{\lambda}, x, 0)\right]\left[-1 + e^{2i\sqrt{\lambda}(\xi-1)} + \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} R(\sqrt{\lambda}, \xi, 1)\right]}{2i\sqrt{\lambda}\left[1 - e^{-2i\sqrt{\lambda}} + \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} R(\sqrt{\lambda}, 1, 0)\right]}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen bleibt der Zähler dieses Ausdruckes bei wachsendem $|\lambda|$ beschränkt. Die Klammer im Nenner bleibt, da $\frac{R}{\sqrt{\lambda}}$ gegen Null geht, bei genügend großem $|\lambda|$ oberhalb einer festen Zahl, sobald man die Umgebungen der Zahlen $\lambda = n^2\pi^2 (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$ ausschließt. Da man im Falle eines positiven Imaginärteils von $\sqrt{\lambda}$ sowie für $\xi \leqq x$ die analogen Ergebnisse erhält, so folgt in der Tat aus (39) die Behauptung (32). Damit ist der in 2 ausgesprochene Entwicklungssatz für die erste Randwertaufgabe bewiesen.

Achtes Kapitel

Die aus den Randwertaufgaben zweiter Ordnung entspringenden besonderen Funktionen

§ 1. Allgemeine Eigenschaften

Die im vorigen Kapitel betrachteten Eigenfunktionen, die sich als Lösungen von Randwertaufgaben zweiter Ordnung ergeben haben, besitzen eine wichtige Eigenschaft, die man als ihre „Orthogonalität" bezeichnet. Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, welche im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert sind, heißen orthogonal zueinander, wenn

$$(\mathrm{a}) \qquad (f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

ist. Eine Funktion $f(x)$ wollen wir ferner als normiert bezeichnen, wenn

$$(\mathrm{b}) \qquad (f, f) = \int_a^b [f(x)]^2\, dx = 1$$

ist[1]. Diese Begriffsbildungen schließen sich, wie man ohne weiteres sieht, an geometrische Vorstellungen an. Bezeichnet $\mathfrak{f}$ einen Vektor im dreidimensionalen Raume, der vom Nullpunkt zum Punkt mit den Koordinaten f_1, f_2, f_3 hinführt, so heißt er Einheitsvektor,

[1] Das Wesentliche der Normierung ist nur, daß über einen konstanten Faktor der Funktionen verfügt wird; statt der Zahl 1 auf der rechten Seite von (b) könnte man natürlich auch jede andere (positive) Zahl wählen. Auch andere Arten von Normierung sind denkbar, z. B. die Festsetzung $f(a) = 1$, sofern $f(x)$ in dem Endpunkt a von 0 verschieden ist, usf.

wenn $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$ ist, wenn also der Punkt f_1, f_2, f_3 auf der Einheitskugel liegt. Die zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ mit den Koordinaten f_1, f_2, f_3 bzw. g_1, g_2, g_3 bestehende Beziehung $f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = 0$ drückt, wie bekannt, aus, daß die beiden Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ zueinander orthogonal sind. Geht man vom dreidimensionalen Raume zunächst zu einem n-dimensionalen über, so lautet die Bedingung der Orthogonalität $f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n = 0$ und die der Normierung $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = 1$; die Analogie dieser Gleichungen zu (a) und (b) springt sofort in die Augen. In diesem Paragraphen wollen wir uns auch anderer Begriffsbildungen bedienen, bei denen diese Analogie hervortritt; wir werden insbesondere am Schluß, in **5**, diese „Geometrie des Funktionenraumes" zusammenfassen.

1. Orthogonalsysteme von Funktionen. Es seien

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

im endlichen oder unendlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle[1]) Funktionen; die Funktionen φ_n und φ_n^2 seien ferner im Lebesgueschen Sinne[2]) (vgl. I, § 5, 2) integrabel. Sie bilden ein Orthogonalsystem, wenn

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

gilt, sobald m ungleich n ist[3]). Das Orthogonalsystem heißt ferner normiert, wenn für jedes n

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx = 1 \tag{3}$$

gilt. Ein Orthogonalsystem $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$, für welches die Integrale

$$J_n = \int_a^b [\psi_n(x)]^2\,dx$$

von 0 verschieden sind, kann durch Multiplikation der n-ten Funktion ψ_n mit dem konstanten Faktor $1:\sqrt{J_n}$ in ein normiertes übergeführt werden.

Beispiele von Orthogonalsystemen findet der Leser weiter unten in **4**.

Geleitet von der Analogie zu den Fourierschen Entwicklungen beliebiger Funktionen (IV, § 4), führt man jetzt folgende Begriffe ein.

---

[1]) Die meisten der nachfolgenden Sätze lassen sich nach passender Abänderung auch auf komplexe Funktionen übertragen.

[2]) Jene Leser, die mit dem Begriff des Lebesgueschen Integrals nicht vertraut sind, können hierfür absolute Integrabilität im Riemannschen Sinne setzen.

[3]) Vgl. die Bemerkung auf S. 42, Fußnote.

Ist $f(x)$ eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte, samt ihrem Quadrat integrable Funktion, so nennt man die Integrale

$$(4) \qquad c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ in bezug auf das Orthogonalsystem (1). Die zunächst rein formal gebildete Reihe

$$(5) \qquad c_0\,\varphi_0(x) + c_1\,\varphi_1(x) + \cdots + c_n\,\varphi_n(x) + \cdots$$

heißt die Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach den Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ oder auch die zu $f(x)$ gehörige (verallgemeinerte) Fouriersche Entwicklung.

Diese Definitionen schließen sich gleichfalls an die oben angedeutete vektoranalytische Vorstellung an. Sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren, die paarweise zueinander orthogonal sind, d. h. $\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = 1$, $\mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{j} = 0$, so läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{a}$ in der Form $\mathfrak{a} = \gamma_1\mathfrak{i} + \gamma_2\mathfrak{j} + \gamma_3\mathfrak{k}$ darstellen, wobei γ_1, γ_2, γ_3 skalare Konstanten, die Komponenten von $\mathfrak{a}$ in den Richtungen ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$), sind und sich wegen der Orthogonalität der Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aus folgenden Formeln ergeben:

$$\gamma_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{i} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \quad \gamma_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{j} = a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 \text{ usf.}$$

Die Partialsummen

$$(6) \qquad s_n(x) = c_0\,\varphi_0(x) + c_1\,\varphi_1(x) + \cdots + c_n\,\varphi_n(x)$$

der Entwicklung (5) sind durch die folgende Minimumeigenschaft ausgezeichnet, welche wir für den Fall der gewöhnlichen Fourierschen Reihe bereits in IV, § 4, **3** bewiesen haben: Ist

$$(7) \qquad K_n(x) = \gamma_0\,\varphi_0(x) + \gamma_1\,\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_n\,\varphi_n(x)$$

irgendein linearer Ausdruck der $n + 1$ ersten Orthogonalfunktionen mit beliebigen Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, so erhält das Integral

$$\int_a^b [f(x) - K_n(x)]^2\,dx$$

dann den kleinsten Wert, wenn $\gamma_0 = c_0$, $\gamma_1 = c_1$, $\ldots$, $\gamma_n = c_n$, d. h. wenn $K_n(x) = s_n(x)$ gesetzt wird. In der Tat folgt aus der Orthogonalität

$$(8) \qquad \int_a^b [f(x) - K_n(x)]^2\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2\,dx - 2\,(\gamma_0 c_0 + \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_n c_n) + \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_n^2$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2\,dx + (\gamma_0 - c_0)^2 + (\gamma_1 - c_1)^2 + \cdots + (\gamma_n - c_n)^2 - c_0^2 - c_1^2 - \cdots - c_n^2,$$

und der Ausdruck rechter Hand ist offenbar dann möglichst klein, wenn $\gamma_\nu = c_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n)$ ist. Das Minimum ist gleich

$$(9) \qquad \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = \int_a^b [f(x)]^2\, dx - c_0^2 - c_1^2 - \cdots - c_n^2.$$

Daraus schließen wir für alle n die sogenannte Besselsche Ungleichheit

$$(10) \qquad c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2\, dx,$$

so daß die Summe der Koeffizientenquadrate

$$(11) \qquad c_0^2 + c_1^2 + \cdots c_n^2 + \cdots$$

stets konvergiert. Über die geometrische Deutung dieser Sätze vgl. 5.

Bemerkung. Das zuletzt erhaltene Resultat ist in gewissem Sinne umkehrbar, und dies ist ein fundamentales Ergebnis in der Theorie der Orthogonalfunktionen. Es gilt nämlich der folgende Satz[1]:

Es sei $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ein normiertes Orthogonalsystem von Funktionen, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ samt ihrem Quadrat integrabel sind; es sei ferner $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ eine Folge von Konstanten, für welche die Reihe (11) konvergiert. Dann existiert stets eine samt ihrem Quadrat integrable Funktion $f(x)$ derart, daß

$$(12) \qquad \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mit anderen Worten: $f(x)$ besitzt die gegebenen Konstanten c_n als ihre Fourierschen Konstanten.

Der Beweis dieses Fischer-Rieszschen Satzes[2]) würde hier zu weit führen (vgl. I, § 5, 3).

2. Vollständige Orthogonalsysteme. Das Orthogonalsystem (1) heißt vollständig, wenn jede samt ihrem Quadrat integrable Funktion $f(x)$ sich durch lineare Aggregate von der Form

$$K(x) = \gamma_0 \varphi_0(x) + \gamma_1 \varphi_1(x) + \cdots + \gamma_n \varphi_n(x)$$

„im Mittel" beliebig genau approximieren läßt. Darunter versteht man, etwas ausführlicher gesagt, folgendes. Zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl ε existiert ein Ausdruck $K(x)$ derart, daß

$$\int_a^b [f(x) - K(x)]^2\, dx < \varepsilon$$

[1]) In diesem Satze muß das Integral im Lebesgueschen Sinne verstanden werden.

[2]) F. Riesz, Comptes rendus (Paris) 144, 615—619, 1907; E. Fischer, ebenda, S. 1022—1024.

ausfällt. Geometrisch ausgedrückt: zu jedem „Vektor" $y = f(x)$ gibt es innerhalb des durch die „Vektoren" $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bestimmten „linearen Vektorgebildes" (vgl. II, § 1, 4) einen „Vektor" $K(x)$, dessen Endpunkt um weniger als $\sqrt{\varepsilon}$ von dem Endpunkt des „Vektors" $f(x)$ entfernt ist. Dies besagt jedoch im allgemeinen keineswegs, daß sämtliche Ordinatendifferenzen der Kurven $f(x)$ und $K(x)$ beliebig klein ausfallen, d. h. daß die beiden Kurven überall beliebig nahe beieinander liegen.

Die Vollständigkeit ist (im Falle von endlichen a, b) gewiß vorhanden, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Jede stetige Funktion $f(x)$ läßt sich durch Ausdrücke $K(x)$ von der Form wie oben im gewöhnlichen Sinne beliebig genau approximieren, d. h.

$$|f(x) - K(x)| < \varepsilon \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Denn man kann, wie es leicht zu zeigen ist, eine beliebige samt ihrem Quadrat integrable Funktion stets durch stetige im Mittel approximieren.

Für vollständige Systeme läßt sich der in 1 angeführte Satz wie folgt ergänzen. Es wurde dort allgemein gezeigt, daß

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\,dx \leqq \int_a^b [f(x) - K_n(x)]^2\,dx \tag{13}$$

besteht. Ist nun das Orthogonalsystem vollständig, so läßt sich die rechte Seite durch entsprechende Wahl von $K_n(x)$ (natürlich bei genügend großen n) beliebig klein machen. Daraus folgt dasselbe auch für die linke Seite. Nun ist aber der Ausdruck linker Hand gleich

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx - c_0^2 - c_1^2 - \cdots - c_n^2.$$

Es ergibt sich also der folgende Satz:

Ist das Orthogonalsystem (1) vollständig, so ist die Quadratsumme der Fourierschen Konstanten einer Funktion $f(x)$ gleich dem Integralquadrat dieser Funktion:

$$c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 + \cdots = \int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{14}$$

Die Partialsummen der Entwicklung (5) konvergieren also „im Mittel" gegen $f(x)$. Diese wichtige Tatsache kann auch in der Form

$$\left\{\begin{aligned} &\Big[\int_a^b f(x)\varphi_0(x)\,dx\Big]^2 + \Big[\int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,dx\Big]^2 + \cdots + \Big[\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx\Big]^2 \\ &\qquad + \cdots = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ausgesprochen werden; man nennt (15) die Vollständigkeitsrelation oder die Parsevalsche Formel. Sie entspricht der geläufigen vektoranalytischen Formel für das Quadrat der Länge eines Vektors.

Als Anwendung beweisen wir den folgenden Satz. Ist das Orthogonalsystem (1) vollständig, so gibt es keine samt ihrem Quadrat integrable Funktion $f(x)$, für die

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist abgesehen natürlich von einer Funktion $f(x)$, die fast überall (d. h. mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null) verschwindet[1]. In der Tat würde dann aus der Vollständigkeitsrelation

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$$

folgen, d. h. $f(x) = 0$ (mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null). Ein vollständiges Orthogonalsystem (1) läßt also keine Erweiterung in dem Sinne zu, daß neue Funktionen hinzugefügt werden könnten derart, daß das so entstandene System wieder orthogonal und normiert wäre. Daraus folgt auch, daß bei vollständigen Systemen eine Funktion $f(x)$ durch Angabe ihrer Fourierschen Konstanten eindeutig (bis auf Abszissenwerte, die eine Menge vom Maße Null ausmachen) bestimmt ist.

Die Vollständigkeitsrelation läßt sich noch in einer etwas allgemeineren Form schreiben, die aber aus der ursprünglichen ohne Mühe abgeleitet werden kann. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die samt ihrem Quadrat integrabel sind, und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ bzw. $d_0, d_1, d_2, \ldots$ ihre Fourierschen Konstanten. Dann ist

$$(16) \qquad c_0 d_0 + c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n + \cdots = \int_a^b f(x) g(x)\,dx\ {}^{2)},$$

entsprechend der vektoranalytischen Formel $\mathfrak{c}\mathfrak{d} = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3$ für das skalare Produkt von zwei Vektoren.

---

[1]) Ein System von (nicht notwendig orthogonalen) Funktionen $\varphi_n(x)$ dieser Art heißt abgeschlossen.

[2]) Die Konvergenz der linksstehenden Reihe folgt aus der Cauchyschen Ungleichung

$$(x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leqq (x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Bezüglich der Existenz des rechtsstehenden Integrals vgl. die Bemerkung auf S. 42, Fußnote 1.

Die Gl. (16) ergibt sich, indem man auf $F(x) = f(x) + g(x)$ die Vollständigkeitsrelation anwendet. Die Fourierschen Konstanten von $F(x)$ sind nämlich:

$$\int_a^b F(x)\,\varphi_n(x)\,dx = c_n + d_n,$$

so daß

$$(c_0 + d_0)^2 + (c_1 + d_1)^2 + \cdots + (c_n + d_n)^2 + \cdots = \int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx$$

ist. Zieht man von dieser Gleichung die beiden (14) entsprechenden ab, so ergibt sich die behauptete Gleichung.

3. Orthogonalisierung. Sind die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und linear unabhängig[1]), so kann man die Aufgabe stellen, diese Funktionen durch ebenso viele andere $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ zu ersetzen, die 1. zueinander paarweise orthogonal, außerdem normiert sind, 2. die Eigenschaft haben, daß jedes φ_ν sich linear durch $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ darstellen läßt[2]). Diese Aufgabe der Orthogonalisierung ist im wesentlichen auf eine einzige Weise lösbar und stellt ein vollständiges Analogon zur folgenden geometrischen Betrachtung dar.

Wenn $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ linear unabhängige Vektoren in einem mindestens n-dimensionalen Raume bezeichnen, so nennt man, wie das in II, § 1, 4 näher ausgeführt wurde, die Gesamtheit aller in der Form $\alpha_1 \mathfrak{f}_1 + \alpha_2 \mathfrak{f}_1 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{f}_n$ darstellbaren Vektoren ein lineares Vektorgebilde vom Range n. Man kann nun in diesem Gebilde n Einheitsvektoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ finden, die das analoge wie die oben erwähnten Funktionen φ_ν leisten. Zu diesem Zwecke wählt man $\mathfrak{p}_1 = c_1 \mathfrak{f}_1$, wo die Konstante c_1 so bestimmt wird, daß $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1) = 1$ ist. Um hierauf $\mathfrak{p}_2$ zu finden, zieht man von $\mathfrak{f}_2$ diejenige Komponente ab, die in der Richtung von $\mathfrak{p}_1$ liegt, d. h. den Vektor $(\mathfrak{f}_2, \mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{p}_1$. Also ist $\mathfrak{p}_2 = c_2[\mathfrak{f}_2 - (\mathfrak{f}_2, \mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{f}_1]$, wo c_2 wie früher c_1 bestimmt wird. Weiter ist zu sehen, daß $\mathfrak{p}_3 = c_3[\mathfrak{f}_3 - (\mathfrak{f}_3, \mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{p}_1 - (\mathfrak{f}_3, \mathfrak{p}_2)\,\mathfrak{p}_2]$ wird, usf.

---

[1]) Das heißt, es besteht keine Beziehung von der Form

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

außer für $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. In der dreidimensionalen Vektoranalysis entspricht bekanntlich der linearen Unabhängigkeit die Forderung, daß drei Vektoren f_1, f_2, f_3 nicht in einer Ebene liegen.

[2]) Es ist dabei zu beachten, daß wir eine ganz bestimmte Reihenfolge der Funktionen $f_1, f_2, \cdots, f_n$ festgelegt haben. Wählt man eine andere Reihenfolge, so ergeben sich freilich ganz andere Orthogonalfunktionen.

Ganz analog bilde man mit der Bezeichnung (a) auf S. 371 die Funktionen

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) = c_1 f_1(x), \\ \varphi_2(x) = c_2[f_2(x) - (f_2, \varphi_1)\varphi_1(x)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x) = c_n[f_n(x) - (f_n, \varphi_1)\varphi_1(x) - (f_n, \varphi_2)\varphi_2(x) - \cdots \\ \qquad\qquad - (f_n, \varphi_{n-1})\varphi_{n-1}(x)]. \end{cases}$$

Hierbei sind die Konstanten c_ν so zu bestimmen, daß $(\varphi_\nu, \varphi_\nu) = 1$ wird. Es ist klar, daß

$$(\varphi_2, \varphi_1) = c_2[(f_2, \varphi_1) - (f_2, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1)] = 0,$$

ferner

$$(\varphi_3, \varphi_1) = c_3[(f_3, \varphi_1) - (f_3, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1)] = 0$$

und

$$(\varphi_3, \varphi_2) = c_3[(f_3, \varphi_2) - (f_3, \varphi_2)(\varphi_2, \varphi_2)] = 0$$

und allgemein

$$(\varphi_\nu, \varphi_1) = (\varphi_\nu, \varphi_2) = \cdots = (\varphi_\nu, \varphi_{\nu-1}) = 0$$

gilt, so daß die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ paarweise orthogonal sind. Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von f_ν können ferner die rechtsstehenden Klammerausdrücke in (17) nicht identisch verschwinden. Daraus folgt, daß die c_ν (abgesehen vom Vorzeichen) durch die Bedingung $(\varphi_\nu, \varphi_\nu) = 1$ eindeutig bestimmt sind. Sie sind von 0 verschieden, so daß man umgekehrt die $f_\nu(x)$ durch die $\varphi_\nu(x)$ linear darstellen kann.

Sind nur die $n - 1$ ersten Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ voneinander linear unabhängig, während $f_n(x)$ sich linear durch die vorigen darstellen läßt, so behaupten wir, daß die durch (17) definierte Funktion $\varphi_n(x) = 0$ ist. Anderenfalls könnte man nämlich $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ durch die $\varphi_\nu(x)$ linear ausdrücken; da die f_ν linear abhängig sind, so würde hieraus dasselbe für die φ_ν folgen, d. h. identisch

$$\alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0,$$

wobei die α_ν nicht sämtlich verschwinden. Da aber die φ_ν orthogonal sind, so folgt hieraus $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0$, d. h. $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, also ein Widerspruch.

Die explizite Darstellung der Funktionen $\varphi_\nu(x)$ geschieht nun folgendermaßen: Wir nehmen wieder an, daß $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in a, b linear unabhängig sind. Dann ist zunächst klar, daß die Funktionen φ_ν durch die Eigenschaften 1., 2. (bis auf ihr Vorzeichen) eindeutig bestimmt sind. Wäre nämlich ψ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ein anderes System von Funktionen mit den gleichen Eigenschaften, so

wären sowohl die φ_ν als auch die ψ_ν lineare Ausdrücke von f_1, $f_2, \ldots, f_\nu$. Außerdem hätte man $(\varphi_\nu, f_\mu) = (\psi_\nu, f_\mu) = 0$ für $\mu < \nu$. Man bilde nun eine solche lineare Kombination $\alpha\varphi_\nu + \beta\psi_\nu = \chi$ von φ_ν und ψ_ν, in der f_ν nicht auftritt, nur $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}$. Dann wäre $(\chi, \chi) = 0$, d. h. χ müßte identisch Null sein, woraus $\varphi_\nu = \pm\psi_\nu$ folgt. Es genügt also, ein System von Funktionen $\varphi_\nu(x)$ herzustellen, das die verlangten Eigenschaften besitzt. Dies muß dann notwendig mit (17) übereinstimmen.

Bilden wir die quadratische Form der Variablen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)]^2 dx = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n k_{pq}\alpha_p\alpha_q; \tag{18}$$

sie ist nur positiver Werte fähig, wenn nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ ist, d. h. sie ist positiv definit. Wir setzen hierbei

$$k_{pq} = \int_a^b f_p(x) f_q(x)\, dx \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Bei einer solchen positiv definiten Form sind die Determinanten

$$D_\nu = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1\nu} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{\nu 1} & k_{\nu 2} & \ldots & k_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

bekanntlich sämtlich positiv. [Gramsches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit[1]).] Man bilde nun die folgende Determinante:

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1,n-1} & k_{2,n-1} & \ldots & k_{n,n-1} \\ f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \end{vmatrix}.$$

Sie ist ein lineares Aggregat der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, wie man durch Entwicklung nach der letzten Reihe sieht; und zwar hat darin $f_n(x)$ den positiven Koeffizienten D_{n-1}. Multipliziert man mit f_ν und integriert, so folgt wegen (19):

$$\int_a^b \Delta_n(x) f_\nu(x)\, dx = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1,n-1} & k_{2,n-1} & \ldots & k_{n,n-1} \\ k_{1\nu} & k_{2\nu} & \ldots & k_{n\nu} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq \nu \leq n-1, \\ D_n & \text{für } \quad \nu = n. \end{cases}$$

[1]) Vgl. z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig (1909), S. 238 u. 320.

Denkt man sich Δ_n nach den f entwickelt und dann jedes Glied mit Δ_n multipliziert, so folgt aus dem Vorstehenden:

$$\int_a^b \Delta_n^2(x)\,dx = D_{n-1}\int_a^b \Delta_n(x) f_n(x)\,dx = D_{n-1} D_n.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen geht hervor, daß die Funktionen

$$(21)\qquad \varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{D_1}};\ \varphi_\nu(x) = \frac{\Delta_\nu(x)}{\sqrt{D_{\nu-1} D_\nu}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n),$$

wobei die Determinanten D_ν und Δ_ν die obige Bedeutung haben, wirklich das Gewünschte leisten.

4. Beispiele. a) Das klassische Beispiel eines normierten Orthogonalsystems ist das trigonometrische, nämlich

$$(22)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n x, \ldots$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Dieses System ist vollständig. In der Tat läßt sich jede stetige und periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π durch trigonometrische Polynome, d. h. durch Ausdrücke von der Form

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \cdots + \lambda_n \cos n x + \mu_n \sin n x$$

beliebig genau approximieren. (Vgl. IV, § 6, 2.)

b) Da die Funktionen

$$(23)\qquad 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

in jedem Intervall linear unabhängig sind (ein Polynom $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ verschwindet höchstens an n Stellen, vorausgesetzt, daß seine Koeffizienten nicht sämtlich 0 sind), so kann man sie in einem beliebigen endlichen Intervall, z. B. im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$, orthogonalisieren. Es entsteht alsdann ein System von Polynomen

$$(24)\qquad \Pi_0(x),\ \Pi_1(x),\ \ldots,\ \Pi_n(x),\ \ldots,$$

wobei $\Pi_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, für welches

$$(25)\qquad \int_{-1}^{1} \Pi_m(x)\,\Pi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{,, } m = n \end{cases} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Diese Polynome unterscheiden sich von den sogenannten Legendreschen Polynomen $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$, die wir in § 2, 3 ausführlicher betrachten werden, nur durch je einen konstanten Faktor, d. h. in der Art der Normierung. (Vgl. unten.) Die Legendreschen Polynome sind nämlich so normiert, daß $P_n(1) = 1$ für jedes n gilt.

Auch das System (24) ist vollständig. In der Tat läßt sich nach IV, § 6, **1** eine für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion durch Polynome approximieren, also auch durch lineare Aggregate der Funktionen (24); man kann nämlich eine beliebige Potenz x^n durch die $n+1$ ersten Polynome (24) linear ausdrücken [1]). Aus dem gleichen Grunde ist das System (23) ebenso wie (22) abgeschlossen. (Vgl. die Definition auf S. 376, Fußnote 1). D. h. es gelten die Sätze:

Wenn $f(x)$ überall stetig ist und die Periode 2π hat, wenn ferner sämtliche Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin n x \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind, so muß $f(x)$ identisch verschwinden.

Wenn $f(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetig ist, wenn ferner sämtliche Gleichungen

$$\int_{-1}^{1} f(x) x^n \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind, so muß $f(x)$ identisch verschwinden.

Diese beiden Sätze (der zweite heißt der Satz von Lerch) finden in § 2, **6** eine wichtige Anwendung.

c) Es sei $p(x)$ eine im (endlichen oder unendlichen) Intervall $a < x < b$ definierte positive stetige Funktion, für welche die Integrale $\int_a^b p(x) x^n \, dx$ existieren. Wir betrachten das Funktionensystem

$$\text{(26)} \qquad \sqrt{p(x)}, \quad \sqrt{p(x)}\, x, \quad \sqrt{p(x)}\, x^2, \ldots, \quad \sqrt{p(x)}\, x^n, \ldots,$$

das offenbar linear unabhängig ist. Orthogonalisiert man es nach dem Verfahren in **3**, so ergibt sich ein System von Funktionen von der Form

$$\text{(27)} \qquad \sqrt{p(x)}\, Q_0(x), \quad \sqrt{p(x)}\, Q_1(x), \ldots, \quad \sqrt{p(x)}\, Q_n(x), \ldots,$$

wobei $Q_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades bezeichnet. Man hat ferner

$$\text{(28)} \qquad \int_a^b p(x) Q_m(x) Q_n(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{„ } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) Sind allgemein $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_m(x)$ Polynome bzw. vom genauen Grade $0, 1, \ldots, m$, so kann man x^m linear durch $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_m(x)$ darstellen. In der Tat ziehe man zunächst von x^m ein solches Vielfaches von $A_m(x)$ ab, daß die Differenz vom Grade $m-1$ wird, dann von dieser Differenz ein solches Vielfaches von $A_{m-1}(x)$, daß das resultierende Polynom vom Grade $m-2$ wird, usw.

Die Polynome

$$Q_0(x),\quad Q_1(x),\quad Q_n(x),\ \ldots \tag{29}$$

sind durch die Funktion $p(x)$ (abgesehen vom Vorzeichen) eindeutig bestimmt[1]).

Wichtigere Spezialfälle. α) $a = -1$, $b = 1$ und $p(x) = 1$. Dann erhält man im wesentlichen die unter b) definierten Legendreschen Polynome, und zwar

$$Q_n(x) = \Pi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

β) $a = 0$, $b = 1$ und $p(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$. Dann sind die $Q_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) gleich den Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen (vgl. § 4).

γ) $a = 0$, $b = \infty$ und $p(x) = e^{-x}$. Dann sind die $Q_n(x)$ die sogenannten Laguerresche Polynome (vgl. § 4).

δ) $a = -\infty$, $b = \infty$, $p(x) = e^{-x^2}$. Dann ist $Q_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) gleich dem n-ten Hermiteschen Polynom (vgl. § 4).

Wir zeigen nun für diese Polynome $Q_n(x)$ ganz allgemein, daß sie innerhalb des Integrationsgebietes a, b reelle und voneinander verschiedene Nullstellen besitzen. Hierbei ziehen wir ausschließlich die zur Definition dienende Orthogonalitätseigenschaft heran.

Aus der Orthogonalität folgt nämlich, da man ein beliebiges Polynom $K(x)$ von höchstens $(n-1)$-tem Grad linear durch Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1} ausdrücken kann (vgl. die Fußnote auf der vorigen Seite), daß

$$\int_a^b p(x)\,Q_n(x)\,K(x)\,dx = 0 \tag{30}$$

ist, wenn $K(x)$ irgendein solches Polynom bezeichnet. Gesetzt nun, $Q_n(x)$ würde nur an den Stellen ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m, wo $m \leqq n-1$, sein Vorzeichen wechseln, so könnten wir $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$ für K einsetzen. Dieses K wechselt jedesmal sein Zeichen mit $Q_n(x)$, so daß das Produkt $Q_n(x)\,K(x)$ und wegen $p(x) > 0$, der ganze Integrand von (30), im ganzen Integrationsgebiet unveränderliches Vorzeichen besitzt: Das Integral (30) könnte also unmöglich verschwinden. Also muß $Q_n(x)$ mehr als $n-1$ Zeichenwechsel, mithin, da es vom

---

[1]) Diese Polynome spielen in der Theorie der Kettenbrüche eine Rolle. Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig (Teubner), 2. Aufl. (1929), S. 379.

n-ten Grad ist, genau n einfache Nullstellen im Integrationsgebiet haben.

Für die Sonderfälle folgen daraus die Sätze: Die Legendreschen (und die Jacobischen) Polynome haben lauter reelle, voneinander verschiedene Nullstellen, die in das Innere des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$ (bzw. $0 \leqq x \leqq 1$) fallen. Die Laguerreschen Polynome haben lauter positive, voneinander verschiedene Nullstellen. Die Hermiteschen Polynome haben lauter reelle, voneinander verschiedene Nullstellen.

5. Der Funktionenraum. Wir fassen jetzt noch einmal die wichtigsten Ergebnisse von **1** bis **4** in geometrischer Form zusammen und gelangen damit zu einer „Geometrie der Funktionen", die eigentlich eine Geometrie eines „Raumes" von unendlich vielen Dimensionen ist. Wir gehen wieder von dem normierten und vollständigen Orthogonalsystem (1) aus. Es sei $f(x)$ eine samt ihrem Quadrat integrable Funktion mit den Fourierschen Konstanten

$$c_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach **2** gilt sodann die Gleichung

$$c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 + \cdots = \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Umgekehrt gehört nach dem Satz von Fischer-Riesz zu jeder Folge $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, für welche die Summe

$$c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2 + \cdots$$

konvergiert, eine Funktion $f(x)$, derart, daß die obigen Gleichungen bestehen, d. h. daß die Funktion $f(x)$ die c_n als ihre Fourierschen Konstanten besitzt. Die Funktion $f(x)$ ist durch die c_n bis auf Abszissenwerte, die eine Menge vom Maße Null erfüllen, eindeutig bestimmt.

Die Zahlen c_n sind also geeignet, die Funktion $f(x)$ darzustellen; sie sind gewissermaßen die „Koordinaten" von $f(x)$. Jede Funktion $f(x)$ besitzt ganz bestimmte solche Koordinaten, und umgekehrt gehört zu jedem vorgegebenen System von Koordinatenwerten, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Quadratsumme $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots$ konvergiert, eine bis auf eine Menge vom Maße Null vollständig bestimmte Funktion $f(x)$. In dieser Auffassung definieren die Konstanten c_n einen „Punkt" P im „Funktionenraum", d. h. in einem Raume von unendlich vielen Dimensionen, in dem jedoch nur solche Koordinatenwerte zugelassen werden, deren Quadratsumme

konvergiert. Dem „Punkt" O mit den Koordinaten $0, 0, \ldots, 0, \ldots$, d. h. $O\,(0, 0, \ldots 0, \ldots)$, entspricht z. B. die Funktion, die identisch (immer mit Ausnahme einer Menge von Abszissenpunkten vom Maße Null) verschwindet. Wir sprechen manchmal auch vom „Vektor" OP, dessen „Komponenten" die c_n sind.

Sind $P^j\,(c_0^{(j)}, c_1^{(j)}, \ldots, c_n^{(j)}, \ldots)$ $(j = 1, 2)$ zwei Punkte des Funktionenraumes, so versteht man unter der „Entfernung" $|P^{(1)}P^{(2)}|$ die nicht negative Zahl d, definiert durch die Gleichung

$$(31)\quad |P^{(1)}P^{(2)}|^2 = d^2 = (c_0^{(1)} - c_0^{(2)})^2 + (c_1^{(1)} - c_1^{(2)})^2 + \cdots + (c_n^{(1)} - c_n^{(2)})^2 + \cdots.$$

Sind $f^{(j)}(x)$ $(j = 1, 2)$ die Funktionen, welche diesen Punkten entsprechen, so ist

$$(32)\qquad d^2 = \int_a^b [f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x)]^2\, dx.$$

Die Gesamtheit der Punkte, deren Entfernung von O gleich 1 ist, bildet die „Einheitskugel". Die Funktionen $f(x)$, welche derartigen Punkten entsprechen, erfüllen die Relation

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = 1.$$

Die normierten Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ selbst liegen z. B. sämtlich auf der Einheitskugel.

Es seien $P\,(c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ und $Q\,(d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots)$ zwei Punkte der Einheitskugel. Unter der sphärischen Abweichung von P und Q versteht man den Winkel ϑ $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi)$, definiert durch die Gleichung

$$(33)\qquad \cos\vartheta = c_0 d_0 + c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n + \cdots.$$

Entsprechen den Punkten P und Q bzw. die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, so ist nach (6)

$$(34)\qquad \cos\vartheta = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Durch diese Gleichungen ist ϑ in der Tat als ein reeller Winkel definiert, weil ja nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2\, dx \int_a^b [g(x)]^2\, dx = 1$$

ist. Die sphärische Entfernung von zwei orthogonalen Funktionen beträgt z. B. $\pi/2$.

Die Gesamtheit sämtlicher Funktionen von der Form

$$\gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_n\varphi_n(x),$$

wobei $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ beliebig sind, bestimmt analog wie in II, § 1, 4 ein „lineares Vektorgebilde V_n vom Range $n+1$“ im Funktionenraume. Zu jedem Vektor OP [d. h. zu jeder Funktion $f(x)$] gehört ein ganz bestimmter Vektor OP_n von V_n, dessen $n+1$ erste Komponenten mit denen von OP übereinstimmen. Der Vektor OP_n entspricht offenbar der n-ten Partialsumme $s_n(x)$ [vgl. (6)] der zu $f(x)$ gehörigen Fourierschen Reihe. Die in 1 dargelegte Minimumeigenschaft von $s_n(x)$ läßt sich so deuten, daß der Punkt P_n unter allen Punkten von V_n den kürzesten Abstand von P besitzt. Dieser ist nach (9) gleich

$$|PP_n|^2 = |OP|^2 - |OP_n|^2. \tag{35}$$

Daraus folgt die „Besselsche Ungleichung“

$$|OP_n|^2 \leqq |OP|^2. \tag{36}$$

Die Bedeutung der Orthogonalisierung für den Funktionenraum geht aus den Ausführungen von 3 hervor.

§ 2. Kugelfunktionen

1. Definition. Mehrere Fragen der räumlichen Potentialtheorie (XIV. und XVII. Kap.) geben Anlaß zur Einführung der Kugelfunktionen. Wir gehen insbesondere von der folgenden Aufgabe aus:

Es sind diejenigen homogenen Funktionen n-ten Grades u der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z zu bestimmen, welche im ganzen Raume (eventuell mit Ausnahme des Nullpunktes) der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

genügen; hierbei kann n eine beliebige (auch negative) ganze Zahl bedeuten.

Wir bezeichnen mit $U(r, \vartheta, \varphi)$ die Funktion, in welche u bei Einführung von räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ übergeht. Die transformierte Gestalt der Differentialgleichung (1) lautet nach II, § 3, (44):

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0. \tag{1'}$$

Ist u eine homogene Funktion vom Grade n, so hat $U(r, \vartheta, \varphi)$ die Form $r^n F_n(\vartheta, \varphi)$, und $F_n(\vartheta, \varphi)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial F_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 F_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)F_n = 0. \tag{2}$$

Eine homogene Funktion n-ten Grades $u(x, y, z)$, welche der Laplaceschen Differentialgleichung (1) genügt, nennen wir eine Kugelfunktion n-ter Ordnung.

Eine auf der Einheitskugel zweimal stetig differenzierbare Funktion $F_n(\vartheta, \varphi)$, welche der Differentialgleichung (2) genügt, nennen wir eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung.

Man erhält die Gesamtheit der Kugelfunktionen n-ter Ordnung, indem man mit Hilfe einer beliebigen Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung $F_n(\vartheta, \varphi)$ die Funktion $u = r^n F_n(\vartheta, \varphi)$ bildet. Wir werden in 6 sehen, daß jede so entstehende Funktion (für $n > 0$) ganz rational und homogen vom Grade n ist.

Da (2) unverändert bleibt, wenn n durch $-n-1$ ersetzt wird, so folgt, daß auch $r^{-n-1} F(\vartheta, \varphi)$ eine Kugelfunktion ist.

Eine wichtige Klasse von solchen Funktionen erhält man durch folgende Überlegung. Sind x, y, z die Koordinaten eines veränderlichen Punktes P und x', y', z' die eines festen Punktes P', so definiert der reziproke Wert T der Entfernung $|PP'|$ eine Funktion von x, y, z, welche der Gl. (1) genügt. Man erkennt dies, wenn

$$|PP'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \varrho$$

gesetzt wird, aus

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{x-x'}{\varrho^3}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{3(x-x')^2}{\varrho^2} - 1\right), \text{ usw.}$$

$$\Delta T = \frac{1}{\varrho^3}\left(3\,\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{\varrho^2} - 3\right) = 0. \tag{3}$$

Führt man Polarkoordinaten r, ϑ, φ bzw. r', ϑ', φ' ein und bezeichnet die Funktion von r, ϑ, φ, in welche T übergeht, der Einfachheit halber wieder mit T, so genügt diese neue Funktion der Gl. (1'); es ist ferner

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}}, \tag{4}$$

wenn γ den Winkel zwischen den nach P und P' führenden Fahrstrahlen bezeichnet. Man hat nach bekannten Formeln der Raumgeometrie

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{5}$$

Der Ausdruck (4) kann nun, wenn $r \neq r'$ ist, unter Anwendung der Binomialreihe nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$ bzw. $\frac{r'}{r}$ entwickelt werden, je nachdem $r < r'$ bzw. $r > r'$ ist. Man hat

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{r'^{n+1}}, \quad \text{wenn } r < r', \tag{6}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r'^n}{r^{n+1}}, \quad \text{wenn } r > r' \tag{7}$$

ist. Wir werden später (3) zeigen, daß der Koeffizient $P_n(\cos\gamma)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von $\cos\gamma$ ist, welche mit dem bereits in § 1, 4 erwähnten Legendreschen Polynom übereinstimmt. Wegen der in 3 zu beweisenden Gl. (19) hat ferner $r^n P_n(\cos\gamma)$ die Form

$$r^n \sum_{2k \leqq n} a_k \cos^{n-2k}\gamma = \sum_{2k \leqq n} r^{2k} a_k (r\cos\gamma)^{n-2k}$$

$$= \sum_{2k \leqq n} (x^2+y^2+z^2)^k a_k (z\cos\vartheta' + x\sin\vartheta'\cos\varphi' + y\sin\vartheta'\sin\varphi')^{n-2k},$$

so daß $r^n P_n(\cos\gamma)$ eine homogene ganze rationale Funktion vom Grade n ist.

Setzt man nun (6) in (1') ein, so folgt

$$(8) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{\sin\vartheta \frac{\partial P_n(\cos\gamma)}{\partial\vartheta}\right\}\right. \\ \displaystyle\left. + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 P_n(\cos\gamma)}{\partial\varphi^2} + n(n+1) P_n(\cos\gamma)\right] = 0. \end{cases}$$

Da diese Gleichung für alle $r' > r$ gilt, so muß jeder Koeffizient für sich verschwinden, so daß $P_n(\cos\gamma)$ der Gl. (2) genügt. Wir erhalten somit, daß $r^n P_n(\cos\gamma)$ eine Kugelfunktion n-ter Ordnung und $P_n(\cos\gamma)$ eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung ist.

Ähnlich erkennt man aus (7) oder nach einer früheren Bemerkung, daß $r^{-n-1} P_n(\cos\gamma)$ eine Kugelfunktion von der Ordnung $-n-1$ ist. Sie ist gleich einer rationalen Funktion von x, y, z dividiert durch r.

Multipliziert man $P_n(\cos\gamma)$ mit einer beliebigen stetigen Funktion $f(\vartheta', \varphi')$ der Parameter ϑ', φ' und integriert über die Einheitskugel E, so ist die so entstehende Funktion

$$(9) \quad \begin{cases} \displaystyle Y_n(\vartheta, \varphi) = \int_E f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma)\, d\sigma \\ \displaystyle \qquad = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' \end{cases}$$

ebenfalls eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung. Hier bezeichnet $d\sigma = \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$ das Flächenelement der Einheitskugel, $0 \leqq \vartheta' \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi' < 2\pi$.

2. Die Laplacesche Reihe. Es sei auf der Einheitskugel E eine elektrostatische Masse ausgebreitet, deren Verteilung durch die stetige Dichtefunktion $f(\vartheta', \varphi') = f(P')$ gegeben ist. Das Potential

dieser Masse in einem Punkte P mit den räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ ($r \neq 1$) ist gleich

$$V = \int_E \frac{f(\vartheta', \varphi')\, d\sigma}{|PP'|}, \tag{10}$$

wo $|PP'|$ die Entfernung der beiden Punkte P, P' bedeutet. Nun ist

$$V = \int_E \frac{f(\vartheta', \varphi')\, d\sigma}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}}, \tag{11}$$

wobei $\cos\gamma$ durch (5) gegeben ist. Hier steht die Funktion (4) mit $r' = 1$ unter dem Integralzeichen. Man hat also

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_E f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \varphi), \quad \text{wenn } r < 1, \tag{12}$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_E f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}}\, Y_n(\vartheta, \varphi), \quad \text{wenn } r > 1 \tag{13}$$

ist, wo $Y_n(\vartheta, \varphi)$ die Bedeutung (9) hat. Die erste Entwicklung gilt, wenn der Punkt P sich im Innern von E befindet, die zweite, wenn er außenhalb von E liegt.

Wir erhalten somit eine Darstellung unseres Potentials durch Kugelfunktionen positiver bzw. negativer Ordnung, je nachdem $r < 1$ bzw. $r > 1$ ist.

Das Potential einer Flächenbelegung auf E, aufgefaßt als Funktion des Aufpunktes P, erfährt in seiner ersten Ableitung nach r einen Sprung, wenn P durch die Kugeloberfläche E hindurchgeht. Die Größe dieses Sprunges ergibt sich gleich dem 4π-fachen der Belegungsdichte $f(\vartheta, \varphi)$ an der Durchtrittsstelle. Diesen Satz werden wir später (XIV, § 1, 6) in der Potentialtheorie beweisen; wir benutzen ihn hier einstweilen zur Herleitung einer neuen Entwicklung willkürlicher Funktionen. Setzt man nämlich in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=1-0} - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=1+0} = 4\pi f(\vartheta, \varphi) \tag{14}$$

die beiden Reihendarstellungen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=1-0} = \sum_{n=0}^{\infty} n Y_n(\vartheta, \varphi); \quad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=1+0} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) Y_n(\vartheta, \varphi) \tag{15}$$

ein, von denen wir annehmen, daß sie konvergieren (man wende den Abelschen Stetigkeitssatz an, IV, § 2, 4), so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Y_n(\vartheta, \varphi) = 4\pi f(\vartheta, \varphi). \tag{16}$$

Diese Gleichung stellt eine Entwicklung der willkürlichen Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen dar. Man berechnet das n-te Glied aus $f(\vartheta, \varphi)$ und $P_n(\cos\gamma)$ durch Integration. Man nennt (16) die Laplacesche Reihe der Funktion $f(\vartheta, \varphi)$. Sie ist ganz analog gebildet wie die Fouriersche Entwicklung einer auf der Peripherie des Einheitskreises gegebenen Funktion (IV, § 4, 1) und spielt in der räumlichen Potentialtheorie dieselbe Rolle wie die Fouriersche Reihe in der ebenen Potentialtheorie. Unsere Ableitung dieser Reihenentwicklung war rein formal, und wir werden erst im nächsten Kapitel (IX, § 2, 2) Bedingungen formulieren, welche die Konvergenz der Laplaceschen Reihe einer Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ nach sich ziehen.

3. Die Legendreschen Polynome. Wir haben oben die Funktion $P_n(x)$ als den Koeffizienten von r^n in der Entwicklung

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, r^n \tag{17}$$

definiert und wollen, ausgehend von dieser Definition, einige weitere Eigenschaften von $P_n(x)$ ableiten.

a) $P_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades von x, das n-te Legendresche Polynom. In der Tat ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$T = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}(2rx - r^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(2rx - r^2)^2 - \cdots. \tag{18}$$

Zu $P_n(x)$, d. h. zu dem Koeffizienten von r^n, können nur die ersten n Glieder dieser Reihe beitragen, da die späteren durchweg höhere Potenzen von r enthalten. Die Summe der ersten n Glieder ist aber eine ganze rationale Funktion von r und x, die höchstens die n-te Potenz von x enthält. Also kann der Koeffizient von r^n, das ist unser $P_n(x)$, nur eine ganze rationale Funktion höchstens n-ten Grades sein.

Wegen

$$(-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} = \frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2\nu-1)}{2\,.\,4\,\ldots\,\quad 2\nu} = \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\nu!^2}$$

folgt durch nochmalige Anwendung des binomischen Lehrsatzes für die n ersten Summanden von (18) die Darstellung

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\nu!^2}(2rx-r^2)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\binom{\nu}{k}\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\nu!^2}(2rx)^{\nu-k}r^{2k}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\binom{\nu}{k}\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\nu!^2}(2x)^{\nu-k}r^{\nu+k}.$$

Um hieraus $P_n(x)$ zu gewinnen, müssen wir die Glieder mit r^n, für die also $\nu+k=n$, d. h. $\nu=n-k$ ist, zusammenfassen. Man hat also

$$(19)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{2k\leqq n}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!\,(n-k)!\,k!}x^{n-2k},$$

die Summation über $k=0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ erstreckt. Aus (19) folgt, daß $P_n(x)$ genau vom Grade n ist. Sein höchster Koeffizient (der Koeffizient von x^n) ist gleich

$$(20)\qquad l_n = \frac{(2n)!}{2^n n!^2}.$$

Aus (19) ergibt sich ferner

$$(21)\qquad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

d. h. $P_n(x)$ ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es ist somit $P_n(0)=0$ für ungerade n, und nach (19) $P_n(0) = (-1)^{n/2}\frac{n!}{2^n(n/2)!^2}$ für gerade n.

Aus (17) folgt ferner für $x=1$

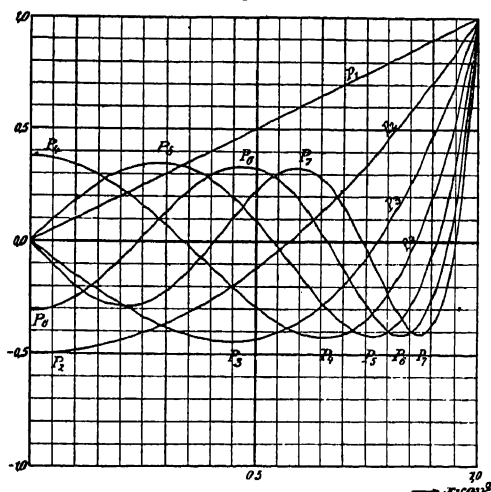
$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)r^n, \quad \text{also} \quad P_n(1)=1, \quad P_n(-1)=(-1)^n.$$

Es ist z. B.

$$P_0(x) = 1, \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$
$$P_1(x) = x, \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \qquad P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \qquad P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).$$

Legendresche Polynome $P_n(x)$ für $n = 3, 4, 5, 6, 7$ [1]).

x	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,0	0,0000	0,3750	0,0000	— 0,3125	0,0000
0,1	— 0,1475	0,3379	0,1788	— 0,2488	— 0,1995
0,2	— 0,2800	0,2320	0,3075	— 0,0806	— 0,2935
0,3	— 0,3825	0,0729	0,3454	0,1292	— 0,2241
0,4	— 0,4400	— 0,1130	0,2706	0,2926	— 0,0146
0,5	— 0,4375	— 0,2891	0,0898	0,3232	0,2231
0,6	— 0,3600	— 0,4080	— 0,1526	0,1721	0,3226
0,7	— 0,1925	— 0,4121	— 0,3652	— 0,1253	0,1502
0,8	0,0800	— 0,2330	— 0,3995	— 0,3918	— 0,2397
0,9	0,4725	0,2079	— 0,0411	— 0,2412	— 0,3678
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Fig. 40

b) Die Polynome $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ bilden ein Orthogonalsystem im Intervall $-1, +1$, d. h. es gilt

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Nach der Definition (17) ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) v^n.$$

---

[1]) Vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, S. 82—84. Leipzig (Teubner) 1923.

Durch Multiplikation und Integration nach x ergibt sich hieraus

$$(23)\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2xu+u^2}\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx\,.\,u^m v^n.$$

Das Integral linker Hand läßt sich aber nach bekannten Methoden berechnen [I, § 2, **3** c)] und in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln. Man erhält hierfür

$$\frac{1}{\sqrt{uv}}\log\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^n v^n.$$

Daraus geht hervor, daß auf der rechten Seite von (23) sämtliche Glieder mit $m \neq n$ verschwinden. Außerdem erkennt man, daß

$$(24)\qquad \int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

sein muß.

c) Das Polynom $P_n(x)$ ist bis auf einen konstanten Faktor die n-te Ableitung von $(x^2-1)^n$:

$$(25)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Der Ausdruck rechter Hand stellt hier ein Polynom n-ten Grades dar, in welchem der Koeffizient von x^n positiv ist. Um zu zeigen, daß es mit dem Legendreschen identisch ist, bezeichnen wir mit $K(x)$ ein beliebiges Polynom von höchstens $(n-1)$-tem Grade und setzen $(x^2-1)^n = v$; dann ist nach den Regeln der Produktintegration:

$$(26)\quad \int_{-1}^{1} v^{(n)}K(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} v^{(n-1)}K'(x)\,dx = \cdots = (-1)^n\int_{-1}^{1} vK^{(n)}(x)\,dx = 0,$$

weil ja $v, v', \ldots, v^{(n-1)}$ für $x = 1$ und $x = -1$ verschwinden und schließlich $K^{(n)}$ der Definition nach Null ist. Setzt man für $K(x)$ der Reihe nach $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, so sieht man aus (26), daß $v^{(n)}$, mithin also die Funktion rechts in (25), zu den Legendreschen Polynomen $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ orthogonal ist. Es gibt aber nach § 1, **3**, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor, nur ein derartiges Polynom, also kann sich $v^{(n)}$ nur um einen solchen Faktor von P_n unterscheiden. Das Glied mit x^n in $v^{(n)}$ rührt von der n-ten Ableitung von x^{2n} her, hat daher den

Koeffizienten $\frac{(2n)!}{n!}$, und daraus folgt durch Vergleich mit (20), daß der Faktor rechts in (25) richtig gewählt ist [1]).

d) Zwischen drei aufeinanderfolgenden Legendreschen Polynomen besteht die Rekursion:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \tag{27}$$

$$[n = 2, 3, 4, \ldots, P_0(x) = 1, P_1(x) = x].$$

Diese Formel ermöglicht eine rasche Berechnung der Polynome $P_n(x)$. Sie läßt sich folgendermaßen beweisen. Ist l_n der Koeffizient von x^n in $P_n(x)$, so ist

$$L(x) = P_n(x) - l x P_{n-1}(x), \quad l = \frac{l_n}{l_{n-1}} \tag{28}$$

ein Polynom $(n-1)$-ten Grades. Nach (20) gilt $l = (2n-1):n$. Nun kann man aber $L(x)$ in der Form

$$L(x) = \gamma_0 P_0(x) + \gamma_1 P_1(x) + \cdots + \gamma_{n-1} P_{n-1}(x)$$

darstellen (vgl. die Bemerkung auf S. 381, Fußnote 1). Wir zeigen zunächst, daß

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-3} = 0$$

ist.

In der Tat folgt mit Rückicht auf die Orthogonalität der P_n und auf Gl. (24), indem man (28) beiderseits mit P_ν multipliziert und dann integriert:

$$\int_{-1}^{1} L(x) P_\nu(x) dx = \frac{2}{2\nu+1}\gamma_\nu = \int_{-1}^{1} [P_n(x) - l x P_{n-1}(x)] P_\nu(x) dx = 0$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n-3).$$

Es ist also

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) + \gamma_{n-1} P_{n-1}(x) + \gamma_{n-2} P_{n-2}(x).$$

Setzt man hier $x = 1$ und $x = -1$, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} = -\frac{n-1}{n}, \quad \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} = \frac{n-1}{n},$$

d. h. $\gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_{n-2} = -\frac{n-1}{n}$, w. z. b. w.

---

[1]) Ein anderer Beweis kann mit Hilfe der Lagrangeschen Umkehrformel (IV, § 2, 2) geführt werden.

e) In **1** haben wir bewiesen, daß $P_n(\cos\gamma)$, wobei $\cos\gamma$ die Bedeutung (5) hat, für beliebige Werte von ϑ', φ' der Differentialgleichung (2) genügt. Wählt man hier $\vartheta' = 0$, d. h. legt man den Punkt ϑ', φ' in den Nordpol der Einheitskugel, so wird $\cos\gamma = \cos\vartheta$, und wir erhalten

$$(29)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{d\,P_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right] + n\,(n+1)\,P_n(\cos\vartheta) = 0.$$

Setzt man $\cos\vartheta = x$, so folgt

$$(30)\qquad \frac{d}{d\,x}[(1-x^2)\,P_n'(x)] + n\,(n+1)\,P_n(x) = 0,$$

d. h. das Polynom $P_n(x)$ genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der sogenannten Legendreschen Differentialgleichung. Diese Eigenschaft der $P_n(x)$ kann auch direkt auf Grund der Orthogonalität [vgl. b)] gezeigt werden. Vgl. z. B. § 4, 1.

f) Es gelten schließlich folgende Differentialbeziehungen:

$$(31)\qquad \begin{cases} P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) & = (2\,n+1)\,P_n(x),\\ P_{n+1}'(x) - x\,P_n'(x) & = (n+1)\,P_n(x),\\ x\,P_n'(x) - P_{n-1}'(x) & = n\,P_n(x),\\ P_{n+1}'(x) - 2\,x\,P_n'(x) + P_{n-1}'(x) & = P_n(x), \end{cases}$$

die man sämtlich z. B. mit Hilfe der Orthogonalität der $P_n(x)$ beweisen kann. Die beiden letzten Formeln ergeben sich übrigens aus den beiden ersten durch einfache Kombination. Wir erwähnen ferner die oft nützlichen Formeln:

$$(31')\qquad \begin{cases} (1-x^2)\,P_n'(x) = n\,P_{n-1}(x) - n\,x\,P_n(x),\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\,\nu+1}{2}\,P_\nu(x) = \frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x}\\ \qquad\qquad = \tfrac{1}{2}\,(P_n'(x) + P_{n+1}'(x)). \end{cases}$$

g) Eine asymptotische Darstellung von $P_n(x)$ für große n findet sich in IX, § 2, 1.

4. Die Gaußsche mechanische Quadratur. Man bezeichne mit $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms $P_n(x)$ in aufsteigender Reihenfolge (vgl. § 1, **4**) und betrachte sämtliche Polynome $A(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, die an den Stellen $x_\nu^{(n)}$ vorgeschriebene Werte y_ν annehmen ($\nu = 1, 2, \ldots, n$):

$$(32)\qquad A(x_1^{(n)}) = y_1,\ A(x_2^{(n)}) = y_2,\ \ldots,\ A(x_n^{(n)}) = y_n.$$

Ein Polynom $A(x)$ ist durch diese n Bedingungen noch nicht eindeutig bestimmt, da es $2\,n$ Koeffizienten besitzt; es gibt vielmehr

eine n-fach unendliche Schar von Polynomen, die den Bedingungen (32) genügen. Wir beweisen nun den wichtigen Satz: die Polynome A, die (32) erfüllen, haben sämtlich die Eigenschaft, daß der Flächeninhalt der Kurve $y = A(x)$ von $x = -1$ bis $x = 1$ der gleiche ist.

Es seien nämlich $A(x)$ und $B(x)$ zwei Polynome, die (32) gegenügen. Dann verschwindet die Differenz $A(x) - B(x)$ für $x = x_\nu^{(n)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, sie muß also $P_n(x)$ als Teiler enthalten:

$$A(x) - B(x) = P_n(x) K(x),$$

wobei $K(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades bezeichnet. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Orthogonalitätseigenschaft der Legendreschen Polynome [Gl. (22)], daß

$$\int_{-1}^{1} [A(x) - B(x)]\, dx = \int_{-1}^{1} P_n(x) K(x)\, dx = 0$$

ist, und hieraus die Behauptung.

Man wähle nun aus der oben definierten n-fach unendlichen Schar von Polynomen dasjenige eindeutig bestimmte Polynom $L(x)$ heraus, welches $(n-1)$-ten Grades ist. Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel gilt

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu^{(n)})(x - x_\nu^{(n)})}. \tag{33}$$

Daraus folgt für irgendein Polynom $A(x)$ der Schar die Formel

$$\int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \int_{-1}^{1} L(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu^{(n)} y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu^{(n)} A(x_\nu^{(n)}), \tag{34}$$

mit

$$g_\nu^{(n)} = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu^{(n)})(x - x_\nu^{(n)})}\, dx \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{35}$$

so daß die $g_\nu^{(n)}$ (Christoffelsche Zahlen) von $A(x)$ unabhängig sind und allein von n abhängen. Sie lassen sich aus $P_n(x)$ berechnen. Man kann übrigens, indem man in (34) für $A(x)$ spezielle Polynome einsetzt, einige wichtige Eigenschaften dieser Zahlen $g_\nu^{(n)}$ ableiten. Für

$$A(x) = \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu^{(n)})(x - x_\nu^{(n)})}\right]^2$$

folgt z. B.

$$g_\nu^{(n)} = \int_{-1}^{1} \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu^{(n)})(x - x_\nu^{(n)})}\right]^2 dx, \tag{35'}$$

woraus hervorgeht, daß die $g_\nu^{(n)}$ sämtlich positiv sind. Wird $A(x) = 1$ gesetzt, so ergibt sich

$$g_1^{(n)} + g_2^{(n)} + \cdots + g_n^{(n)} = 2. \tag{36}$$

Eine andere Eigenschaft der Zahlen $g_n^{(n)}$, auf deren Herleitung wir hier allerdings verzichten, gestattet, der Formel (34) eine elegante geometrische Interpretation zu geben. Man trage von -1 an die positiven Zahlen

$$g_1^{(n)},\ g_1^{(n)} + g_2^{(n)},\ \cdots,\ g_1^{(n)} + g_2^{(n)} + \cdots + g_n^{(n)} = 2$$

auf der Abszissenachse ab. Dann erhält man gewisse Punkte zwischen -1 und 1, welche durch die Nullstellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ getrennt werden[1]. Der Ausdruck rechts in (34) erhält dadurch den Charakter einer Riemannschen Summe (d. i. einer Summe von Rechtecksflächen, die über Teile des Intervalls $-1, +1$ aufgerichtet werden), und zwar der Summe, die hervorgeht, wenn das Intervall $-1, 1$ durch die Punkte

$$-1,\ -1 + g_1^{(n)},\ -1 + g_1^{(n)} + g_2^{(n)},\ \cdots,\ -1 + g_1^{(n)} + \cdots + g_{n-1}^{(n)},\ 1$$

in n Strecken geteilt und in der ν-ten Strecke die zu $x_\nu^{(n)}$ gehörige Ordinate genommen wird. Ist die Funktion ein Polynom höchstens $(2n-1)$-ten Grades, so gibt diese Summe genau den Flächeninhalt im Intervall $-1, 1$ an.

Es sei nun $y = f(x)$ irgendeine stetige Funktion. Dann ist die Summe

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu^{(n)} f(x_\nu^{(n)}) \tag{37}$$

im allgemeinen von

$$J = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

verschieden. Sie gibt aber angenähert den Wert von J an, in dem Sinne, daß

$$\lim_{n \to \infty} S_n = J. \tag{38}$$

Denn nach dem Weierstrassschen Satz (IV, § 6, 1) läßt sich, wenn nur n genügend groß genommen wird, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $(2n-1)$-ten Grades $A(x)$ finden, für das

$$|f(x) - A(x)| < \varepsilon \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

---

[1] T. J. Stieltjes, Ann. Éc. Norm. Sup. (3) 1, 409—426, 1884.

ist. Dann unterscheiden sich aber die Integrale von f und A um höchstens 2ε voneinander; da ferner das Integral von A genau gleich

$$g_1^{(n)} A(x_1^{(n)}) + g_2^{(n)} A(x_2^{(n)}) + \cdots + g_n^{(n)} A(x_n^{(n)}),$$

also bis auf den Betrag $\varepsilon(g_1^{(n)} + g_2^{(n)} + \cdots + g_n^{(n)}) = 2\varepsilon$ gleich S_n ist, so sind S_n und J um höchstens 4ε verschieden.

Die Formel (37) eignet sich also zur angenäherten Berechnung von bestimmten Integralen und ist zu diesem Zwecke von Gauß hergeleitet worden. Ihre Überlegenheit gegenüber elementaren Quadraturformeln (wie die Simpsonsche Regel und deren Verallgemeinerung) besteht darin, daß hier eine Summe von n Gliedern das Integral mit einer Genauigkeit approximiert, die einer Annäherung durch eine Parabel von doppelt so hoher Konstantenzahl $(2n)$ entspricht. Für die praktische Anwendung bedarf es nur der Kenntnis der $x_\nu^{(n)}$ und $g_\nu^{(n)}$, die sich ein für allemal numerisch berechnen lassen. Z. B. ist für[1])

$$\begin{aligned}
n = 2:\ & -x_1 = x_2 = 0{,}5773502692; \quad g_1 = g_2 = 1,\\
n = 4:\ & -x_1 = x_4 = 0{,}8611363116, \quad -x_2 = x_3 = 0{,}3399810436;\\
& g_1 = g_4 = 0{,}3478548451, \quad g_2 = g_3 = 0{,}6521451549,\\
n = 6:\ & -x_1 = x_6 = 0{,}9324695142, \quad -x_2 = x_5 = 0{,}6612093865;\\
& -x_3 = x_4 = 0{,}2386191861;\\
& g_1 = g_6 = 0{,}1713244923, \quad g_2 = g_5 = 0{,}3607615730,\\
& g_3 = g_4 = 0{,}4679139345.
\end{aligned}$$

Die Gaußsche Quadraturformel für $n = 2$ lautet also:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-0{,}5773502692) + f(0{,}5773502692).$$

Ist das Integrationsintervall von vornherein anders gegeben, so führt man es durch eine Substitution der Variablen in -1, 1 über.

5. Die zugeordneten Funktionen. Wir führen die zugeordneten Funktionen durch die Gleichungen

$$(39)\quad P_n^\nu(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\nu P_n^{(\nu)}(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein. Ihre formalen Eigenschaften zeigen viele Analogien zu denen der Legendreschen Polynome. Man zeigt z. B. ähnlich wie in **3** c), daß $(1-x^2)^\nu P_n^{(\nu)}(x)$ zu jedem Polynom $(n-1)$-ten Grades orthogonal ist, d. h.

$$(22')\qquad \int_{-1}^{1} P_n^\nu(x) P_m^\nu(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

---

[1]) Die oberen Indizes von $x_\nu^{(n)}$ und $g_\nu^{(n)}$ sind der Einfachheit halber weggelassen worden.

Für $m = n$ ist dieses Integral $= \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!} \frac{2}{2n+1}$, wie durch eine leichte Rechnung gezeigt werden kann.

Wir wollen hier noch beweisen, daß $y = P_n^\nu(x)$ der Differentialgleichung

$$(40) \qquad (1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

genügt.

Wir gehen von der Differentialgleichung (30) aus. Durch ν-malige Differentiation folgt, daß $u_\nu = P_n^{(\nu)}(x)$ die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 u_\nu}{dx^2} - 2x(\nu+1)\frac{du_\nu}{dx} + [n(n+1) - \nu(\nu+1)]u_\nu = 0$$

erfüllt. Setzt man hier $(\sqrt{1-x^2})^\nu u_\nu = y$, so ergibt sich unmittelbar die Gl. (40).

Auf Grund der Gl. (40) kann durch direktes Einsetzen in (2) gezeigt werden, daß die Ausdrücke

$$(41) \qquad P_n^\nu(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi, \quad P_n^\nu(\cos\vartheta)\sin\nu\varphi$$

Kugelflächenfunktionen n-ter Ordnung darstellen. Wir bemerken schließlich, daß die (41) entsprechenden Kugelfunktionen n-ter Ordnung, ähnlich wie für $\nu = 0$ [1]), homogene ganze rationale Funktionen vom Grade n sind. In der Tat kann $r^n P_n^\nu(\cos\vartheta) e^{i\nu\varphi}$ wegen (19) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(r\sin\vartheta\, e^{i\varphi})^\nu \sum_{2k+\nu\leqq n} r^{2k} b_k (r\cos\vartheta)^{n-2k-\nu}$$
$$= (x+iy)^\nu \sum_{2k+\nu\leqq n} (x^2+y^2+z^2)^k b_k z^{n-2k-\nu},$$

woraus die Behauptung durch Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles folgt.

6. Darstellung der Kugelfunktionen. Wir haben eben gesehen, daß die $2n+1$ Funktionen

$$(42) \quad \begin{cases} P_n(\cos\vartheta), \\ P_n^\nu(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi,\ P_n^\nu(\cos\vartheta)\sin\nu\varphi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Kugelflächenfunktionen n-ter Ordnung sind. Da die Gl. (2) homogen ist, so gilt dasselbe für eine beliebige lineare Kombination derselben:

$$(43) \quad G(\vartheta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\vartheta) + 2\sum_{\nu=1}^{n} P_n^\nu(\cos\vartheta)(a_\nu\cos\nu\varphi + b_\nu\sin\nu\varphi).$$

---

[1]) Wir setzen im folgenden stets $P_n^0(\cos\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$.

Wir wollen den wichtigen Satz beweisen, daß in dieser Form **sämtliche** Kugelflächenfunktionen n-ter Ordnung enthalten sind. Daraus folgt unter anderem, daß eine Kugelfunktion n-ter Ordnung für $n \geqq 0$ eine homogene ganze rationale Funktion vom Grade n ist.

Es sei $F(\vartheta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung. Man kann dann die Koeffizienten von (43) so bestimmen, daß die Differenz $F(\vartheta, \varphi) - G(\vartheta, \varphi) = \Delta(\vartheta, \varphi)$ zu den Funktionen (42) auf der Einheitskugel E orthogonal ist. In der Tat besagt z. B. die Gleichung

$$\int_E \Delta(\vartheta, \varphi)\, P_n^\nu(\cos\vartheta) \cos\nu\varphi\, d\sigma$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta(\vartheta, \varphi)\, P_n^\nu(\cos\vartheta) \cos\nu\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0,$$

daß

$$\int_E F(\vartheta, \varphi)\, P_n^\nu(\cos\vartheta) \cos\nu\varphi\, d\sigma = \int_E G(\vartheta, \varphi)\, P_n^\nu(\cos\vartheta) \cos\nu\varphi\, d\sigma$$

$$= 2\pi a_\nu \int_0^\pi (P_n^\nu(\cos\vartheta))^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

gilt, woraus sich a_ν ergibt. Ähnlich bestimmt man die b_ν.

Wir zeigen andererseits, daß $\Delta(\vartheta, \varphi)$ auch zu sämtlichen Funktionen

$$P_m^\nu(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi, \quad P_m^\nu(\cos\vartheta)\sin\nu\varphi \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m;\ m \neq n)$$

orthogonal ist. Dies gilt allgemein für zwei beliebige Kugelflächenfunktionen verschiedener Ordnung F und Φ. In der Tat seien die Ordnungen derselben n und m $(m \neq n)$, d. h. es sei neben (2) die Gleichung

$$\text{(2')} \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + m(m+1)\Phi = 0$$

erfüllt. Man multipliziere (2) mit Φ und (2') mit F und integriere die Differenz auf der Einheitskugel. Der Integrand des ersten Gliedes links ist gleich der Ableitung von $\sin\vartheta\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial\vartheta} - F\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)$ nach ϑ, so daß die Integration nach ϑ zu Null führt. Ähnlich liefert das zweite Glied, dessen Integrand $\left(\text{abgesehen von dem Faktor } \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)$ die Ableitung von $\Phi\frac{\partial F}{\partial\varphi} - F\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ nach φ ist, den Wert 0. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir setzen nun für einen festen Wert von ν ($\nu \geqq 0$)

$$\int_0^{2\pi} \varDelta(\vartheta, \varphi) \cos \nu \varphi \, d\varphi = \varDelta(\cos \vartheta).$$

Dann ist also für $n = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \ldots$

$$\int_0^{\pi} \varDelta(\cos \vartheta) P_n^{\nu}(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \int_{-1}^{1} \varDelta(x) \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^{\nu} P_n^{(\nu)}(x) \, dx = 0.$$

Die Polynome $P_\nu^{(\nu)}(x)$, $P_{\nu+1}^{(\nu)}(x)$, $P_{\nu+2}^{(\nu)}(x)$, ... haben der Reihe nach den Grad 0, 1, 2, ..., so daß man eine beliebige Potenz x^n linear durch diese $P_n^{(\nu)}(x)$ darstellen kann (vgl. die Bemerkung auf S. 381, Fußnote 1). Hieraus folgt, daß auch die Integrale

$$\int_{-1}^{1} \varDelta(x) \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^{\nu} x^k \, dx = 0$$

sind ($k = 0, 1, 2, \ldots$), so daß nach dem Lerchschen Satze (§ 1, 4) $\varDelta(x) \equiv 0$ ist.

Wir erhalten somit für alle $\nu \geqq 0$

$$\int_0^{2\pi} \varDelta(\vartheta, \varphi) \cos \nu \varphi \, d\varphi = 0$$

und ähnlich

$$\int_0^{2\pi} \varDelta(\vartheta, \varphi) \sin \nu \varphi \, d\varphi = 0,$$

woraus wegen § 1, 4 das identische Verschwinden von $\varDelta(\vartheta, \varphi)$ folgt.

Aus dem Beweis geht auch hervor, daß die Darstellung (43) von $F(\theta, \varphi)$ eindeutig bestimmt ist.

Weitere Darstellungen der Kugelflächen- bzw. Kugelfunktionen werden wir im Kap. XVII kennenlernen.

7. Additionstheorem der Kugelfunktionen. Es sei wie in 1 wieder γ der Winkel zwischen den nach P und P' führenden Fahrstrahlen, deren Richtungen durch ϑ, φ bzw. ϑ', φ' gegeben sind; γ ist also die sphärische Entfernung der beiden Punkte ϑ, φ und ϑ' φ' auf der Einheitskugel. Wir wollen für $P_n(\cos\gamma)$ eine explizite Darstellung mittels $P_n(\cos\vartheta)$, $P_n(\cos\vartheta')$ und der entsprechenden zugeordneten Funktionen geben.

Diese Darstellung lautet

$$\text{(44)} \quad P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta') + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!} P_n^{\nu}(\cos\vartheta) P_n^{\nu}(\cos\vartheta') \cos\nu(\varphi - \varphi')$$

und heißt das Additionstheorem der Kugelfunktionen.

Zum Beweis schicken wir zunächst die Bemerkung voraus, daß $P_n(\cos\gamma)$ wegen (5) ein trigonometrisches Kosinuspolynom n-ter Ordnung von $\varphi - \varphi'$ ist. D. h.

$$P_n(\cos\gamma) = C_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \cos\nu(\varphi - \varphi'),$$

wobei die Koeffizienten $C_\nu(\vartheta, \vartheta')$ von ϑ und ϑ' abhängen und bei Vertauschung derselben unverändert bleiben. Andererseits kann man $P_n(\cos\gamma)$ als Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung nach 6 in der Form

$$P_n(\cos\gamma) = A_0 P_n(\cos\vartheta) + 2\sum_{\nu=1}^{n} P_n^\nu(\cos\vartheta)(A_\nu \cos\nu\varphi + B_\nu \sin\nu\varphi)$$

schreiben, wobei $A_\nu(\vartheta', \varphi')$, $B_\nu(\vartheta', \varphi')$ von ϑ' und φ' abhängen. Man hat also

$$C_\nu(\vartheta, \vartheta')\cos\nu\varphi' = P_n^\nu(\cos\vartheta) A_\nu(\vartheta', \varphi'),$$

so daß

$$C_\nu(\vartheta, \vartheta') = c_\nu P_n^\nu(\cos\vartheta) P_n^\nu(\cos\vartheta')$$

sein muß, wobei c_ν eine Konstante bezeichnet. D. h.

$$P_n(\cos\gamma) = c_0 P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta')$$
$$+ 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu P_n^\nu(\cos\vartheta) P_n^\nu(\cos\vartheta')\cos\nu(\varphi - \varphi').$$

Um die Konstanten c_ν zu ermitteln, setzen wir $\varphi' = 0$ und $\cos\vartheta' = \xi'$. Es entsteht dann die Identität

$$P_n(\xi'\cos\vartheta + i\sqrt{\xi'^2 - 1}\sin\vartheta\cos\varphi)$$
$$= c_0 P_n(\xi') P_n(\cos\vartheta) + 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \left(i\sqrt{\xi'^2 - 1}\right)^\nu P_n^{(\nu)}(\xi') P_n^\nu(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi.$$

Dividiert man beide Seiten durch ξ'^n, so liefert der Grenzübergang $\xi' \to \infty$

$$(45)\quad \begin{cases} (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^n \\ = c_0 P_n(\cos\vartheta) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{n} i^\nu c_\nu \dfrac{n!}{(n-\nu)!} P_n^\nu(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi. \end{cases}$$

Setzt man hier weiter $\cos\vartheta = \xi$, so erhält man wie oben:

$$(1 - \cos\varphi)^n = l_n\left\{c_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu c_\nu \left(\frac{n!}{(n-\nu)!}\right)^2 \cos\nu\varphi\right\},$$

wo l_n die Bedeutung (20) hat. Nun ist aber

$$(1 - \cos\varphi)^n = 2^n\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{2n}$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\left(e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}\left\{\binom{2n}{n} + 2\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\binom{2n}{n+\nu}\cos\nu\varphi\right\},$$

so daß

$$l_n c_\nu \left(\frac{n!}{(n-\nu)!}\right)^2 = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n+\nu}$$

wird, d. h.

$$c_\nu = \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!}. \tag{46}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aus (45) erhalten wir durch Integration die folgenden Darstellungen von $P_n(\cos\vartheta)$ und $P_n^\nu(\cos\vartheta)$:

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^n\, d\varphi, \tag{47}$$

$$i^\nu \frac{n!}{(n+\nu)!} P_n^\nu(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^n \cos\nu\varphi\, d\varphi \tag{48}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Integralformel (47) rührt von Laplace her. Mittels komplexer Integration folgen hieraus die wichtigen Formeln von Dirichlet-Mehler:

$$\left\{\begin{aligned} P_n(\cos\vartheta) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}}\, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}}\, d\varphi. \end{aligned}\right. \tag{47'}$$

Als eine weitere Anwendung erwähnen wir die folgende Formel von Laplace, welche aus (44) ohne Schwierigkeit folgt:

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_E P_n(\cos\gamma_1)\, P_n(\cos\gamma_2)\, d\sigma = P_n(\cos\gamma_{12}). \tag{49}$$

Hier bedeuten γ_1 und γ_2 die sphärischen Entfernungen des bei der Integration veränderlichen Punktes von zwei festen Punkten der Einheitskugel, γ_{12} die sphärische Entfernung der beiden letzteren.

8. Die Legendreschen Funktionen zweiter Art. Die Legendresche Differentialgleichung (30), der $P_n(x)$ genügt, besitzt außer $P_n(x)$ noch ein zweites, von $P_n(x)$ linear unabhängiges Integral. Dieses durch passende Anfangsbedingungen festgelegte Integral $Q_n(x)$

heißt die n-te Legendresche Funktion zweiter Art. Sie wird an der Stelle $x = \pm 1$ logarithmisch unendlich und geht für $x \to \infty$ gegen Null. Man kann zeigen, daß

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - K_n(x) \tag{50}$$

ist, wo $K_n(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades bedeutet. Entwickelt man das erste Glied $\frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1}$ nach abnehmenden Potenzen von x, so stimmt $K_n(x)$ mit dem ganzen rationalen Bestandteil dieser Entwicklung überein. Man hat

$$K_0(x) = 0, \quad K_1(x) = 1, \quad K_2(x) = \tfrac{3}{2} x \quad \text{usw.} \tag{51}$$

Es gilt nach F. Neumann die Darstellung

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\, dt. \tag{52}$$

Man definiert die zugeordneten Funktionen zweiter Art analog wie oben (39) durch

$$Q_n^\nu(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\nu Q_n^{(\nu)}(x). \tag{53}$$

Sie genügen auch der Differentialgleichung (40).

§ 3. Besselsche Funktionen

1. Definition der Funktionen erster Art. In den Anwendungen tritt häufig die schon in VI, § 4, 4 behandelte Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \tag{1}$$

auf, in der ν eine gegebene (nicht notwendig ganze) Zahl bedeutet. Wir nennen sie die Besselsche Differentialgleichung. Man gelangt dazu ähnlich wie in § 2 durch Transformation der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ auf Zylinderkoordinaten r, φ, z, ferner durch den Ansatz

$$u = e^z \cos \nu\varphi\, y(r),$$

wobei nachträglich wieder x statt r geschrieben wird.

Versucht man (1) durch den Ansatz einer mit der ϱ-ten Potenz von x multiplizierten Potenzreihe

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+\varrho} \tag{2}$$

zu integrieren, so wird man durch Einsetzen von (2) in (1) auf folgende Gleichungen für die Koeffizienten a_λ geführt:

$$(3)\quad [(\lambda+\varrho)^2-\nu^2]\,a_\lambda + a_{\lambda-2} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ a_{-2} = a_{-1} = 0).$$

Diese Gleichungen eignen sich in der Tat zu einer rekurrierenden Berechnung der Koeffizienten a_λ. Hierbei ist jedoch folgendes zu beachten. Wird ϱ derart gewählt, daß der Faktor $(\lambda+\varrho)^2-\nu^2$ für keinen Wert von λ verschwindet, d. h.

$$(\lambda+\varrho)^2-\nu^2 \neq 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

so folgt $a_\lambda = 0$ für alle λ, d. h. y verschwindet identisch; diese Wahl von ϱ bietet somit kein Interesse.

Es sei also ϱ derart gewählt, daß für einen Wert $\lambda = \lambda_0$ der erste Koeffizient in (3) verschwindet, d. h. $\varrho = -\lambda_0 + \nu$ wird. Wir setzen zunächst voraus, daß ν keine negative ganze Zahl ist. Aus (3) folgt dann:

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{\lambda_0-1} = 0, \quad a_{\lambda_0+1} = a_{\lambda_0+3} = \cdots = 0$$

und die Koeffizienten $a_{\lambda_0+2}, a_{\lambda_0+4}, \ldots$ lassen sich der Reihe nach aus $a_{\lambda_0} = c$ berechnen:

$$(4)\quad a_{\lambda_0} = c,\ a_{\lambda_0+2} = -\frac{c}{(2+\nu)^2-\nu^2},\ a_{\lambda_0+4} = \frac{c}{[(2+\nu)^2-\nu^2][(4+\nu)^2-\nu^2]}, \ldots.$$

Allgemein hat man

$$(4')\quad \begin{cases} a_{\lambda_0+2k} = \dfrac{(-1)^k c}{[(2+\nu)^2-\nu^2][(4+\nu)^2-\nu^2]\ldots[(2k+\nu)^2-\nu^2]} \\ \qquad = \dfrac{(-1)^k c}{2^{2k}\,1.2\ldots k(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$(5)\quad \begin{cases} y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{\lambda_0+2k}\, x^{\lambda_0+2k+\varrho} \\ \quad = c\,x^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $\Pi(s)$ die Funktion $\Gamma(s+1)$, wobei $\Gamma(s)$ die Eulersche Gammafunktion IV, § 7, (7) ist, so gilt

$$(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k) = \frac{\Pi(\nu+k)}{\Pi(\nu)}.$$

Man pflegt die willkürliche Konstante c in (5) gleich dem reziproken Wert von $2^\nu\Pi(\nu)$ zu wählen und erhält damit für y den Ausdruck

$$(6)\quad \begin{cases} J_\nu(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ \quad = \dfrac{x^\nu}{2^\nu\Pi(\nu)}\left[1 - \dfrac{x^2}{2(2\nu+2)} + \dfrac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots\right]. \end{cases}$$

Diese Funktion $J_\nu(x)$ wird die **Besselsche Funktion ν-ter Ordnung** genannt; sie stellt eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

Unsere Überlegungen bleiben übrigens völlig bestehen, wenn ν durch $-\nu$ ersetzt wird. D. h. die Funktion

$$(6') \qquad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(-\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

genügt ebenfalls der Differentialgleichung (1).

Die Definition (6) behält auch für negative ganze ν, $\nu = -n$, ihren Sinn, wenn man unter $1 : \Pi(s)$ für negative ganze s einfach Null versteht, wie dies mit der Theorie der Gammafunktion im Einklang steht. Man hat alsdann nach (6), da k nur von n an läuft, wenn $k = l + n$ gesetzt und nachher l wieder durch k ersetzt wird,

$$(7) \qquad J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Pi(k+n)\,\Pi(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = (-1)^n J_n(x).$$

Wir werden im folgenden sehen, daß, wenn ν keine ganze Zahl ist, $J_{-\nu}(x)$ und $J_\nu(x)$ linear unabhängig sind, so daß das allgemeine Integral von (1) sich in der Form

$$(7') \qquad y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

schreiben läßt, wo c_1 und c_2 willkürliche Konstanten bezeichnen. Ist dagegen $\nu = n$ eine ganze Zahl, so haben wir auf dem obigen Wege im wesentlichen nur **ein** partikuläres Integral bekommen. Ein zweites Integral, das von $J_n(x)$ wesentlich verschieden ist, läßt sich dann durch andere Überlegungen gewinnen. (Vgl. 2.)

Für $\nu = 0$, $\nu = 1$ erhält man aus (6):

$$(7\,\text{a}) \qquad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2.4)^2} - \frac{x^6}{(2.4.6)^2} + \cdots,$$

$$(7\,\text{b}) \qquad J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 - \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4^2.6} - \frac{x^6}{2.(4.6)^2.8} + \cdots\right].$$

Es geht aus dem Vergleich mit der Exponentialreihe hervor, daß diese Potenzreihen für alle reellen und komplexen Werte von x konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereich. Allgemein ist für nichtnegative ν, da dann $\Pi(\nu+k) > \Pi(\nu)$, zufolge (6):

$$(8) \qquad \left|J_\nu(x)\right| \leqq \frac{1}{\Pi(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi(k)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\nu+2k} = \frac{1}{\Pi(\nu)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\nu} e^{\left(\frac{|x|}{2}\right)^2}.$$

An der Stelle $x = 0$ wird J_0 gleich 1, während alle J_ν verschwinden, wenn $\nu > 0$ und ebenso wenn ν eine negative ganze Zahl ist. Dagegen wird $J_\nu(x)$ bei Annäherung an die Stelle $x = 0$ unendlich, wenn ν negativ, jedoch keine ganze Zahl ist.

Aus (8) sieht man, daß bei festem x die Funktion $J_\nu(x)$ mit wachsendem ν gegen Null konvergiert.

Bezüglich des asymptotischen Verhaltens von $J_\nu(x)$ für große Werte von x oder ν (oder von beiden) verweisen wir auf IX, § 3, 1 und 2.

Im Falle, wenn der Parameter ν die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, d. h. $\nu = n + {}^1/_2$ (n ganz), lassen sich die Besselschen Funktionen $J_\nu(x)$ einfach berechnen. Aus der allgemeinen Formel (6) folgt z. B.

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi({}^1/_2 + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2 + 2k}$$

Nun ist $\Pi({}^1/_2 + k) = \Gamma({}^3/_2 + k) = 1.3\ldots(2k+1).2^{-(k+1)}\sqrt{\pi}.$ Aus der letzten Formel ergibt sich somit

$$(9) \qquad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Ähnlich erhält man

$$(9') \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

und ganz allgemein

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A_n \cos x + B_n \sin x),$$

wobei A_n und B_n gewisse ganze rationale Funktionen höchstens n-ten Grades von $1/x$ sind. Sie lassen sich aus der Formel (6) berechnen. Wir können hiermit sagen, daß die Besselsche Funktion $J_{n+1/2}(x)$ (n ganz) durch trigonometrische und rationale Funktionen darstellbar ist[1]).

In den folgenden Tabellen (a. S. 408) sind einige numerische Werte zusammengestellt, und zwar erstens bei den festen Ordnungen $\nu = 0, 1$ für variable x, dann bei festem x ($x = 8, 12$) für variable n. Fig. 41 zeigt ferner den Verlauf von $J_0(x)$ und $J_1(x)$, während Fig. 42 ein

[1]) Vgl. IX, § 2, (12).

Bild über die Änderung von $J_n(x)$ bei festem x und für wachsende n gibt [1]).

2. Definition der Funktionen zweiter Art. Betrachten wir die Funktion (6') für ein ν, das keine ganze Zahl ist, so ist $\nu + 2k$

Fig. 41

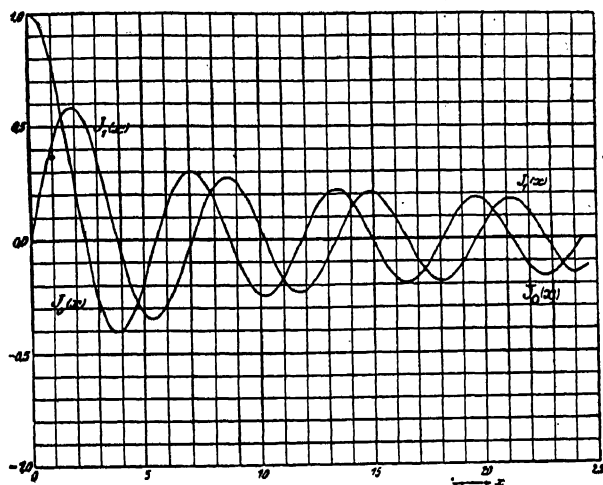
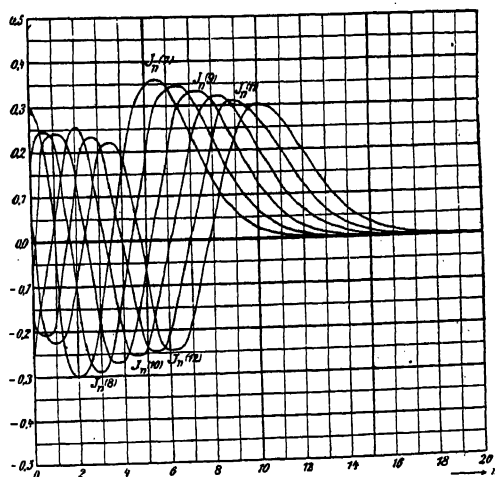



Fig. 42

---

1) Vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, S. 110 und 149. Leipzig (Teubner) 1923.

Besselsche Funktionen 0-ter und 1-ter Ordnung.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	5,5	— 0,0068	— 0,3414	11,0	— 0,1712	— 0,1768
0,5	0,9385	0,2423	6,0	0,1506	— 0,2767	11,5	— 0,0677	— 0,2284
1,0	0,7652	0,4401	6,5	0,2601	— 0,1538	12,0	0,0477	— 0,2234
1,5	0,5118	0,5579	7,0	0,3001	— 0,0047	12,5	0,1469	— 0,1655
2,0	0,2239	0,5767	7,5	0,2663	0,1352	13,0	0,2069	— 0,0703
2,5	— 0,0484	0,4971	8,0	0,1717	0,2346	13,5	0,2150	0.0380
3,0	— 0,2601	0,3391	8,5	0,0419	0,2731	14,0	0,1711	0,1334
3,5	— 0.3801	0,1374	9,0	— 0,0903	0,2453	14,5	0,0875	0,1934
4,0	— 0,3971	— 0,0660	9,5	— 0,1939	0,1613	15,0	— 0,0142	0,2051
4,5	— 0,3205	— 0,2311	10,0	— 0,2459	0,0435	15,5	— 0,1092	0,1672
5,0	— 0,1776	— 0,3276	10,5	— 0,2366	— 0,0789	16,0	— 0,1749	0,0904

Werte der Besselschen Funktionen für die Argumente 8 und 12.

n	$J_n(8)$	$J_n(12)$	n	$J_n(8)$	$J_n(12)$
0	0,17165	0,04769	20	$0,0^6 2081$	$0,0^8 2512$
5	0,18578	— 0,07347	25	$0,0^{10} 3895$	$0,0^6 4418$
10	0,06077	0,30048	30	$0,0^{14} 2583$	$0,0^9 2552$
15	$0,0^3 2926$	0,03161			

$\neq -\nu + 2l$. wenn k und l irgendwelche nicht negative ganze Zahlen bezeichnen. (Sonst würde nämlich $\nu = l - k$ eine ganze Zahl sein.) Es besteht also keine Beziehung von der Form

$$0 \equiv c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\Pi(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} + c_2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Pi(l)\Pi(-\nu+l)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2l},$$

wo die beiden Konstanten c_1 und c_2 nicht zugleich verschwinden. Die Funktionen $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ sind in diesem Falle linear unabhängig.

Anders steht es, wenn ν gleich einer ganzen Zahl $n \geqq 0$ ist (vgl. **1**). Wir wollen dann durch einen Grenzübergang eine Funktion definieren, die gleichfalls der Besselschen Differentialgleichung (1) genügt und von $J_n(x)$ wesentlich verschieden ist. Setzt man nämlich $\nu = n + \varepsilon$, wobei $|\varepsilon|$ zunächst kleiner als 1 vorausgesetzt wird, so genügt der Ausdruck

$$(10) \quad \frac{-\cos\nu\pi\, J_\nu(x) + J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = -\operatorname{ctg}\nu\pi\, J_\nu(x) + \frac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(x)$$

der Differentialgleichung (1), da er die Gestalt (7') ihres allgemeinen Integrals besitzt. Läßt man jetzt ε gegen Null gehen, so erscheint dieser Ausdruck zufolge (7) in der Form 0/0. Sein Grenzwert läßt

sich ermitteln, indem man vor dem Grenzübergang Zähler und Nenner nach ν differenziert. Es wird

$$\left.\frac{\pi \sin \nu\pi\, J_\nu(x) - \cos \nu\pi \dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} + \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu\pi}\right|_{\nu=0} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=-n}.$$

Führt man die Gaußsche Bezeichnung

$$\Psi(z) = \frac{d \log \operatorname{nat} \Pi(z)}{dz} = \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}$$

ein, so ergibt sich durch Differentiation von (6):

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\left[\log \operatorname{nat}\frac{x}{2} - \Psi(\nu+k)\right]$$

$$= J_\nu(x) \log \operatorname{nat}\frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(\nu+k)}{\Pi(k)\,\Pi(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Bezeichnen wir den Grenzwert von (10) mit $-Y_n(x)$, so folgt also mit Berücksichtigung von

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

durch eine leichte Umformung

$$(10\text{a})\quad \begin{cases} Y_n(x) = \dfrac{2}{\pi} J_n(x) \log \operatorname{nat}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(k)+\Psi(n+k)}{\Pi(k)\,\Pi(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ \qquad - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Pi(n-1-k)}{\Pi(k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \end{cases}$$

(Ist $n = 0$, so fehlt das letzte Glied.) Beachtet man schließlich, daß [vgl. IV, § 7, (11')]

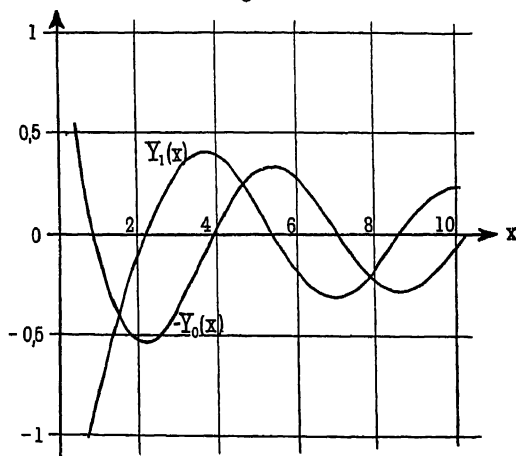
$$\Psi(k) + \Psi(n+k) = -2C + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+k}$$

ist, so ergibt sich die Endformel

$$(11)\quad \begin{cases} Y_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\left(C + \log \operatorname{nat}\dfrac{x}{2}\right) J_n(x) \\ \quad - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right. \\ \left. + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n+k}\right\} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Pi(n-1-k)}{\Pi(k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \end{cases}$$

(Für $n = 0$ fehlt das letzte Glied. Für $k = 0$ ist $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$ durch 0 zu ersetzen.)

Diese Funktion wird als Besselsche Funktion zweiter Art von der Ordnung n bezeichnet. Sie genügt der Besselschen Differentialgleichung (1) für $\nu = n$. Nähert sich x über positive Werte der Null, so wird $Y_n(x)$ wie x^{-n}, bzw. logarithmisch unendlich (Fig. 43). Daraus folgt, da nach 1 $J_n(0)$ endlich ist, daß keine Beziehung von der Form $c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) = 0$ identisch bestehen

Fig. 43

kann. $Y_n(x)$ stellt somit ein von $J_n(x)$ wesentlich verschiedenes zweites partikuläres Integral von (1) dar und das allgemeine Integral läßt sich in der Form

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

schreiben, die also für ganzzahliges ν an Stelle von (7′) tritt.

Man hat z. B. für die Besselsche Funktion zweiter Art nullter Ordnung:

$$\text{(11a)} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} Y_0(x) = \left[C + \log\operatorname{nat}\frac{x}{2}\right] J_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \\ \qquad - \frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}{2!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \cdots. \end{cases}$$

3. Darstellung der Funktionen erster Art in Form eines bestimmten Integrals. Die Besselschen Funktionen $J_n(x)$ (n ganz) lassen sich als die Fourierschen Konstanten einer einfach an-

gebbaren Funktion darstellen. Um dies zu beweisen, benutzen wir folgende Hilfsformel. Es seien

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots, \quad g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots$$

zwei Potenzreihen, die für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren. Dann ist, wenn $n \geqq 0$ und ganz, $|x| \leqq 1$ ist,

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(xe^{i\theta})g(xe^{-i\theta})e^{in\theta}\,d\theta = x^n(a_0 b_n + a_1 b_{n+1} x^2 + \cdots) \\ \qquad = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n+k} x^{n+2k}. \end{cases}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Relationen

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{im\theta}\cdot e^{-in\theta}\,d\theta = 0 \qquad (m,\ n \text{ ganz};\ m \neq n),$$

die mit der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ gleichwertig sind (§ 1, 4).

Man setze nun

$$a_k = b_k = \frac{1}{\Pi(k)}\left(\frac{i}{2}\right)^k, \text{ d. h. } f(z) = g(z) = e^{iz/2}.$$

Dann ist nach (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n+k} x^{n+2k} = i^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k)\,\Pi(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = i^n J_n(x).$$

Man erhält somit aus (12)

$$(13) \qquad i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta}\cdot e^{in\theta}\,d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da $e^{ix\cos\theta}$ eine gerade Funktion ist, also ihr Integral über $\sin n\theta\,d\theta$ verschwindet, so ergibt sich aus (13) weiter:

$$(13') \qquad i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und es gilt die Fouriersche Entwicklung

$$(13'') \qquad e^{ix\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x)\cos n\theta,$$

die wegen (8) für alle x konvergiert. Die Gl. (13′) gilt zufolge (7) auch für negative n. Man darf in (13) links i^n fortlassen, wenn man

im zweiten Exponenten rechts $\theta - \pi/2$ statt θ setzt. Schreibt man dann wieder $-\theta$ für $\theta - \pi/2$, so folgt unter Berücksichtigung der Periodizität des Integranden

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta} \cdot e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}\, d\theta.$$

Setzt man endlich in dieser Formel

$$e^{i(x\sin\theta - n\theta)} = \cos(x\sin\theta - n\theta) + i\sin(x\sin\theta - n\theta),$$

so verschwindet auf der rechten Seite nach Vollführung der Integration der imaginäre Teil, da $\sin(x\sin\theta - n\theta)$ eine ungerade Funktion von θ ist. Man erhält also

$$(14)\quad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

Das ist die ursprüngliche Besselsche Definition der Funktionen $J_n(x)$. Für $n = 0$ folgt hieraus

$$(14')\quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$$

Für reelle x ergibt sich aus (14) die Abschätzung

$$(15)\qquad |J_n(x)| \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man kann (13) auch als komplexes Integral schreiben:

$$(14'')\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{ix\cos z}\, e^{in(z-\pi/2)}\, dz,$$

wobei der Integrationsweg Γ irgend eine reelle Strecke von der Länge 2π ist. Wir erwähnen hier eine wichtige Bemerkung von Sommerfeld [Math. Ann. **47** (1896), S. 335], nach welcher aus dieser Formel auch Y_n, sowie die später (8) zu definierenden Hankelschen Funktionen hervorgehen, wenn der Weg Γ passend gewählt wird (vgl. III, § 3, 2).

4. Beziehungen zwischen den Besselschen Funktionen verschiedener Ordnung. Zwischen den Besselschen Funktionen $J_\nu(x)$ für verschiedene ν bestehen einfache Beziehungen, die eine rekursierende Berechnung dieser Funktionen ermöglichen. Es gelten zunächst die Gleichungen:

$$(16\text{a})\qquad 2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$$

$$(16\text{b})\qquad \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x),$$

die man durch einfaches Einsetzen der Reihendarstellungen (6) und Vergleichen der Koeffizienten beweist.

Durch Elimination von $J_{\nu+1}(x)$ aus (16a) und (16b) folgt ferner:

$$(17\text{a})\quad J_{\nu-1}(x) = J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \text{ oder } x^\nu J_{\nu-1}(x) = \frac{d[x^\nu J_\nu(x)]}{dx}.$$

Andererseits ergibt sich durch Elimination von $J_{\nu-1}(x)$ aus (16a) und (16b):

$$(17\text{b})\quad J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x), \text{ oder } -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) = \frac{d[x^{-\nu} J_\nu(x)]}{dx}.$$

Man bemerkt, daß bei ganzzahligem n (17b) aus (17a) entsteht, wenn ν durch $-\nu$ ersetzt wird.

5. Umformung der Besselschen Differentialgleichung. Wir kommen nochmals auf die an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Besselsche Differentialgleichung (1) zurück, für welche die Besselsche Funktion ν-ter Ordnung $J_\nu(x)$ ein partikuläres Integral ist. Setzt man hier die Transformation $y = x^\alpha z$ an, so kann man über α so verfügen, daß die Gl. (1) in die einfachere $z'' + Pz = 0$ übergeht. Dies wird, wie einfache Nachrechnung zeigt, für $\alpha = -1/2$ erreicht. Es ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 z}{dx^2} + \left(1 + \dfrac{1-4\nu^2}{4x^2}\right) z = 0 \\ \text{oder} \\ \dfrac{d^2 \sqrt{x}\, J_\nu(x)}{dx^2} + \left(1 + \dfrac{1-4\nu^2}{4x^2}\right) \sqrt{x}\, J_\nu(x) = 0. \end{cases}$$

Ein etwas allgemeineres Resultat erhält man, wenn man hier $x = c\xi$ setzt, wo c eine von Null verschiedene Konstante ist. Dann lautet die neue Gleichung

$$(19)\quad \frac{d^2 \sqrt{x}\, J_\nu(cx)}{dx^2} + \left(c^2 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right) \sqrt{x}\, J_\nu(cx) = 0.$$

Hier sowohl als in (18) kann $J_{-\nu}$ an Stelle von J_ν geschrieben werden und, wenn $\nu \geqq 0$ ganz ist, auch Y_ν.

Viele andere Umformungen der Besselschen Differentialgleichung sind in den folgenden allgemeineren Gleichungen enthalten, die man durch direkte Differentiation verifizieren kann:

$$(19')\quad x^2 y'' + (1-2\alpha)\, x y' + [(\beta\gamma x^\gamma)^2 + \alpha^2 - \nu^2\gamma^2] y = 0,\quad y = x^\alpha J_\nu(\beta x^\gamma);$$

$$(19'')\quad \begin{cases} x^2 y'' + (1 - 2ux)\, x y' + [(u^2 - u' + 1)\, x^2 - ux - \nu^2]\, y = 0, \\ \qquad y = e^{\int u\, dx} J_\nu(x). \end{cases}$$

Hierbei ist u eine ganz beliebige Funktion mit stetiger Ableitung

6. Beziehung zwischen den Funktionen erster und zweiter Art. Denkt man sich bei ganzzahligem $v = n \geqq 0$ die erste der Gl. (18) einmal für z_1 und einmal für z_2 angeschrieben, multipliziert wechselweise mit z_2 bzw. z_1 und subtrahiert, so folgt (wenn die Striche Ableitungen nach x bezeichnen) $z_1 z_2'' - z_2 z_1'' = 0$ oder nach Integration $z_1 z_2' - z_2 z_1' =$ konst. Da $z_1 = \sqrt{x} J_n(x)$, $z_2 = \sqrt{x}\, Y_n(x)$ gesetzt werden darf, so erhält man auf diese Weise

$$\sqrt{x} J_n(x) \frac{d\sqrt{x}\, Y_n(x)}{dx} - \sqrt{x}\, Y_n(x) \frac{d\sqrt{x} J_n(x)}{dx}$$
$$= x\,[J_n(x)\, Y_n'(x) - Y_n(x) J_n'(x)] = c.$$

Zur Bestimmung der Konstanten c wollen wir x gegen Null gehen lassen. Wegen (6) und (11) gilt zunächst für $n > 0$

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad J_n'(x) \sim \frac{1}{2\,(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1},$$
$$Y_n(x) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, \qquad Y_n'(x) \sim \frac{n!}{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n-1}$$

Wir erhalten hieraus $c = 2/\pi$. Für $n = 0$ erleidet diese Rechnung eine kleine Modifikation. Man hat

$$J_0(x) \sim 1, \qquad J_0'(x) \sim -\frac{x}{2},$$
$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \log \operatorname{nat} x, \qquad Y_0'(x) \sim \frac{2}{x\pi},$$

woraus wieder das gleiche Ergebnis folgt.

Es ist somit in jedem Falle für ganzzahliges $n \geqq 0$

$$J_n(x)\, Y_n'(x) - Y_n(x) J_n'(x) = \frac{2}{\pi x}. \tag{20}$$

7. Bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen. Auf Grund der Gl. (19) gelingt es leicht, einige Integralformeln für die Besselschen Funktionen zu gewinnen, welche bei der näheren Untersuchung dieser Funktionen vorteilhaft benutzt werden können (vgl. **10**).

Liegen ganz allgemein zwei Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \varphi(x) u = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \psi(x) v = 0$$

vor, so gilt

$$u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} = (\varphi - \psi) u v, \quad \left[u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\right]_a^b = \int_a^b (\varphi - \psi)\, u v \, dx.$$

Setzt man hier

$$\varphi(x) = \alpha^2 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}, \quad \psi(x) = \beta^2 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2},$$

so können wir mit Rücksicht auf (19)

$$u = \sqrt{x}\, J_\nu(\alpha x), \quad v = \sqrt{x}\, J_\nu(\beta x)$$

schreiben; aus der eben abgeleiteten Beziehung folgt also

$$(21) \quad \begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2) \int\limits_a^b x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx \\ \qquad = [x\{\beta J_\nu(\alpha x) J'_\nu(\beta x) - \alpha J_\nu(\beta x) J'_\nu(\alpha x)\}]_a^b. \end{cases}$$

Mit Benutzung der ersten Formel (17b) geht dies in

$$(21') \quad \begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2) \int\limits_a^b x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx \\ \qquad = [x\{\alpha J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)\}]_a^b \end{cases}$$

über. Ähnliche Formeln wie (21) gelten auch für

$$\int\limits_a^b x J_n(\alpha x) Y_n(\beta x)\, dx \quad \text{und} \quad \int\limits_a^b x Y_n(\alpha x) Y_n(\beta x)\, dx.$$

Aus (21) und (21') folgt, wenn $a = 0$, $b = 1$ gewählt wird, $\nu > -1$,

$$(22) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int\limits_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx = \beta J_\nu(\alpha) J'_\nu(\beta) - \alpha J_\nu(\beta) J'_\nu(\alpha)$$

und

$$(22') \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int\limits_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx = \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta).$$

Differenziert man hier beiderseits nach α und setzt nachher $\alpha = \beta$, so ergibt sich

$$(23) \quad 2\alpha \int\limits_0^1 x J_\nu^2(\alpha x)\, dx = J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\alpha) + \alpha[J_\nu(\alpha) J'_{\nu+1}(\alpha) - J_{\nu+1}(\alpha) J'_\nu(\alpha)].$$

8. Funktionen dritter Art (Hankelsche Funktionen). Wir wollen jetzt zeigen, daß das für $x > 0$ konvergente Integral[1])

$$(24) \quad g(x) = e^{-ix} \int\limits_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{-1/2}\, du$$

---

[1]) Man kommt ganz naturgemäß auf (24), wenn man auf die Differentialgleichung (25) die sogenannte Laplacesche Transformation anwendet.

der Besselschen Differentialgleichung für $\nu = 0$, also nach (1) der Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + x^2 y = 0 \tag{25}$$

genügt. Es ist in (24) derjenige Wert von $(u - i u^2)^{-1/2}$ zu nehmen, der einen positiven reellen Teil hat $(u > 0)$.

Bei Differentiation nach x multipliziert sich der Integrand von (24) mit $-(2u + i)$ und da $(2u + i)^2 + 1 = 4i(u - iu^2)$ ist, so hat man

$$x^2 g''(x) + x g'(x) + x^2 g(x) \tag{24'}$$

$$= 4 i x^2 e^{-ix} \int_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{1/2} du - x e^{-ix} \int_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{-1/2} (2u + i) du.$$

Durch Produktintegration folgt

$$\int_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{1/2} du = \frac{1}{4x} \int_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{-1/2} (1 - 2iu) du$$

und hieraus das Verschwinden der rechten Seite von (24'), also die Behauptung, daß (24) eine Lösung von (25) ist.

Ersetzt man i durch $-i$, so wird die so entstehende Funktion $\bar{g}(x)$ wiederum eine Lösung von (25). Man nennt

$$\left\{\begin{aligned} H_0^{(1)}(x) &= \frac{2}{\pi} e^{-\frac{i\pi}{4}} \bar{g}(x) = \frac{2}{\pi} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-2ux} (u + iu^2)^{-1/2} du, \\ H_0^{(2)}(x) &= \frac{2}{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} g(x) = \frac{2}{\pi} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-2ux} (u - iu^2)^{-1/2} du \end{aligned}\right. \tag{26}$$

die Besselschen Funktionen dritter Art (Hankelsche Funktionen) von der Ordnung 0. Sie lassen sich linear durch J_0 und Y_0 ausdrücken. Es gilt, wie wir zeigen wollen,

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + i Y_0(x), \qquad H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - i Y_0(x), \tag{27}$$

d. h. $(x > 0)$

$$\left\{\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{2}{\pi} \Re\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-2ux} (u + iu^2)^{-1/2} du, \\ Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \Im\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-2ux} (u + iu^2)^{-1/2} du. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Formel (28). Setzt man $u = \operatorname{ctg}\varphi$, so ergibt sich nach der Moivreschen Formel

$$(u + i u^2)^{-1/2} = \operatorname{ctg}^{-1/2}\varphi (1 + i \operatorname{ctg}\varphi)^{-1/2}$$
$$= \cos^{-1/2}\varphi \sin\varphi (\sin\varphi + i\cos\varphi)^{-1/2} = \cos^{-1/2}\varphi \sin\varphi\, e^{\frac{i}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Daher ist der reelle Teil von $H_0^{(1)}(x)$ gleich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x\operatorname{ctg}\varphi}\cos^{-1/2}\varphi \sin\varphi \,.\, \cos(x + \varphi/2 - \pi/2)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Wegen $e^{-2x\operatorname{ctg}\varphi} \leqq 1$ konvergiert dieses Integral (vgl. I, § 4, 1) für $x \to 0$ gegen

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-1/2}\varphi \sin\varphi \,.\, \cos(\varphi/2 - \pi/2)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = 1.$$

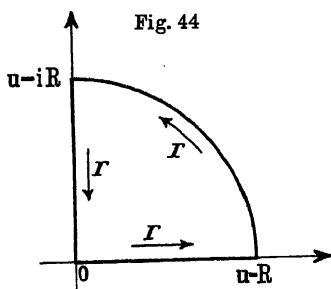
Daraus folgt wegen $J_0(0) = 1$ und $Y_0(0) = -\infty$ seine Identität mit $J_0(x)$, d. h.

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x\operatorname{ctg}\varphi}\frac{\sin(x + \varphi/2)}{\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}}\,d\varphi. \tag{28'}$$

Weitere Darstellungen der Besselschen Funktionen erhält man durch Anwendung der Sätze über komplexe Integration (III, § 3, 2). Wir bezeichnen mit $f(u)$ den Integranden von (24) und es sei wieder $x > 0$. Diese Funktion $f(u)$ ist regulär, wenn u im ersten Quadranten liegt, d. h. $0 < \operatorname{arc} u < \pi/2$ ist. Das komplexe Kurvenintegral $\int_\Gamma f(u)\,du$, erstreckt längs der Kurve Γ der Fig. 44, hat somit den Wert 0.

Fig. 44

Die Kurve Γ besteht hierbei aus folgenden Teilen: a) der Strecke $(0, R)$ der reellen Achse, b) dem Bogen $0 \leqq \operatorname{arc} u \leqq \pi/2$ des Kreises um den Nullpunkt vom Radius R, c) der Strecke $(0, iR)$ der imaginären Achse. Man hat also

$$\int_0^R f(u)\,du + iR\int_0^{\pi/2} f(R e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, d\varphi - i\int_0^R f(iu)\,du = 0.$$

wenn wir für f seinen Wert einsetzen und $R > 1$ wählen,

$$|f(Re^{i\varphi})| = \frac{e^{-2Rx\cos\varphi}}{\sqrt{R|1 - iRe^{i\varphi}|}} \leqq \frac{1}{\sqrt{R(R-1)}}.$$

geht hervor, daß das zweite Glied in der obigen Summe mit dem R gegen 0 konvergiert, folglich

$$\int_0^{\infty} f(u)\,du = i\int_0^{\infty} f(iu)\,du = i\int_0^{\infty}\frac{e^{-2iux}}{\sqrt{iu(1+u)}}\,du = e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2iux}}{\sqrt{u(1+u)}}\,du.$$

Man hat also nach (26), wenn $2u + 1 = v$ gesetzt wird,

$$(29)\qquad \begin{cases} H_0^{(2)}(x) = \dfrac{2}{\pi}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\displaystyle\int_0^{\infty} f(u)\,du = \frac{2i}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{e^{-ixv}}{\sqrt{v^2-1}}\,dv, \\[2ex] H_0^{(1)}(x) = -\dfrac{2i}{\pi}\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{ixv}}{\sqrt{v^2-1}}\,dv, \end{cases}$$

und endlich

$$(30)\qquad J_0(x) = \Re H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\sin xv}{\sqrt{v^2-1}}\,dv.$$

Die Formeln (29) gelten übrigens auch für komplexe x mit $\Im x < 0$ bzw. $\Im x > 0$. Besonders wichtig ist die spezielle Funktion [1])

$$(31)\qquad K_0(x) = \frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(ix) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-xv}}{\sqrt{v^2-1}}\,dv \qquad (x > 0).$$

Die Funktionen dritter Art n-ter Ordnung können durch die Gleichungen

$$(32)\quad H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x), \qquad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

definiert werden. Sie genügen ebenfalls der Besselschen Differentialgleichung und spielen bei der Berechnung des asymptotischen Ausdruckes von $J_n(x)$ und $Y_n(x)$ für große x eine Rolle (vgl. IX, § 3, **1**).

9. Einige Integralformeln. Mit Hilfe der in IV, § 3, **3** bewiesenen Fourierschen Integralformel (11) gelingt es leicht, einige bestimmte Integrale, in denen $J_0(x)$ vorkommt, zu berechnen. Man setze darin zuerst

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } |x| < 1 \text{ und } 0 \text{ für } |x| > 1.$$

---

[1]) Vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, S. 134—135. Leipzig (Teubner) 1923.

Diese Funktion erfüllt nicht die in IV, § 3, **3** formulierten Bedingungen, da sie für $x = 1$ unendlich wird. Der dort gegebene Beweis bleibt aber offensichtlich auch dann gültig, wenn $f(x)$ an endlich vielen Stellen derart unendlich wird, daß das Integral von $|f(x)|$ konvergiert, wenn ferner ξ mit keiner Unendlichkeitsstelle von $f(x)$ zusammenfällt. Es ergibt sich also mit Beachtung von (14')

$$(33) \quad \int_0^\infty J_0(x) \cos a x \, dx = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \text{ für } |a| < 1 \text{ und } 0 \text{ für } |a| > 1.$$

Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{für } |x| > 1, \\ 0 & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$$

wird das Integral im Unendlichen divergent. Trotzdem bleibt, wie eine direkte Analyse zeigt, die Fouriersche Integralformel auch jetzt gültig und man erhält wegen (30)

$$(33') \quad \int_0^\infty J_0(x) \sin a x \, dx = \begin{cases} \pm \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} \text{ für } a > 1, \text{ bzw. für } a < -1, \\ 0 \text{ für } |a| < 1. \end{cases}$$

Aus (14') folgt ferner durch Produktintegration

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos u x}{\sqrt{1-u^2}} du = \cos x + \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \sin u x \arcsin u \, du.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir das Integral

$$\int_0^\infty \sin a x \, J_0(x) \frac{dx}{x}$$

berechnen. Es ist zunächst nach I, § 4, (18)

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x \cos x}{x} dx = \begin{cases} \pm \pi/2 \text{ für } a > 1, \text{ bzw. für } a < -1, \\ 0 \text{ für } |a| < 1. \end{cases}$$

Man setze in der Fourierschen Formel

$$f(u) = \arcsin u \text{ für } |u| < 1 \text{ und } 0 \text{ für } |u| > 1;$$

es folgt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin a x \, dx \int_0^1 \sin u x \arcsin u \, du = \begin{cases} \arcsin a & \text{für } |a| < 1, \\ 0 & \text{für } |a| > 1. \end{cases}$$

Wir haben somit das folgende Endresultat:

$$(34)\qquad \int_0^\infty \sin ax\, J_0(x)\frac{dx}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{für} \quad a > 1, \\ -\pi/2 & \text{„} \quad a < -1, \\ \arcsin a & \text{„} \quad |a| < 1. \end{cases}$$

Für die Anwendungen kommt noch die folgende Formel in Frag welche sich mittels (7a) leicht zeigen läßt:

$$(35)\qquad \int_0^\infty e^{-p^2x^2} J_0(ax)\,x\,dx = \frac{1}{2p^2}e^{-\frac{a^2}{4p^2}} \qquad (p \neq 0).$$

Es sei schließlich ohne Beweis eine für die mathematische Phys äußerst wichtige Integralformel von Hankel erwähnt[1]), welche f $\nu = \pm\frac{1}{2}$ [vgl. (9) und (9')] in die Fouriersche übergeht.

Die Funktion $F(x)$ genüge in jedem endlichen Intervall d Dirichletschen Bedingung, außerdem sei das Integral

$$\int_0^\infty |F(x)|\sqrt{x}\,dx$$

konvergent. Dann gilt für $\nu \geqq -\frac{1}{2}$, $\xi > 0$

$$(36)\qquad \int_0^\infty J_\nu(u\xi)\,u\,du \int_0^\infty F(x)\,J_\nu(ux)\,x\,dx = \frac{F(\xi+0)+F(\xi-0)}{2}.$$

10. Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen. Auf Grun der bisher dargelegten Eigenschaften der Besselschen Funktione $J_\nu(x)$ ist es nicht schwer, einiges über die Lage ihrer Nullstelle auszusagen. Wir setzen dabei $\nu > -1$ voraus. Die triviale Nul stelle $x = 0$ (für $\nu > 0$) sei stets außer acht gelassen.

Aus der Definitionsgleichung (6) folgt, da nur jede zweite Poten von x darin auftritt, daß mit α zugleich auch $-\alpha$ eine Nullstel von $J_\nu(x)$ ist; ferner, daß $J_\nu(x)$ keine rein imaginären Nullstelle besitzen kann.

Aus (22) ergibt sich aber bedeutend mehr, nämlich, daß $J_\nu(x$ keine komplexen Wurzeln besitzt. In der Tat sei in (22)

$$\alpha = p + qi, \quad \beta = p - qi \quad (p \neq 0;\ q \neq 0)$$

gesetzt und es sei $J_\nu(\alpha) = 0$. Da sämtliche Koeffizienten in de Definitionsgleichung (6) von $J_\nu(x)$ reell sind, so muß auch $J_\nu(\beta) =$ sein. Es ist ferner $J_\nu(\beta x) = \overline{J_\nu(\alpha x)}$, wobei der Strich den Über

[1]) H. Hankel, Math. Ann. 8 (1875), S. 476—483.

gang zu den konjugiert-komplexen Werten andeutet. Man hat also, da $\alpha^2 - \beta^2 = 4pqi \neq 0$ ist, zufolge (22):

$$\int_0^1 x|J_\nu(\alpha x)|^2 dx = 0;$$

dies ist aber unmöglich, da daraus das identische Verschwinden von $J_\nu(\alpha x)$ folgen würde. Gibt es also überhaupt Nullstellen von $J_\nu(x)$, so müssen sie sämtlich reell und paarweise von entgegengesetztem Vorzeichen sein[1]).

Es gelten nun die folgenden Sätze:

a) $J_\nu(x)$ und $J_{\nu+1}(x)$ haben keine gemeinschaftlichen Nullstellen, außer eventuell $x = 0$.

b) Sämtliche von 0 verschiedenen Nullstellen von $J_\nu(x)$ sind einfach.

c) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden positiven Nullstellen von $J_\nu(x)$ liegt eine und nur eine Nullstelle sowohl von $J_{\nu-1}(x)$ als auch von $J_{\nu+1}(x)$.

Die erste Behauptung ergibt sich aus (22′). Wäre nämlich β eine solche Nullstelle, so würde für jedes α mit $\alpha^2 \neq \beta^2$

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = 0$$

gelten. Für $\alpha \to \beta$ sieht man, daß dies unmöglich ist. Genau so folgt die zweite Behauptung aus (22), indem man beweist, daß $J_\nu(\beta)$ und $J'_\nu(\beta)$ nicht zugleich verschwinden können.

Um c) zu beweisen, betrachte man zwei aufeinanderfolgende positive Nullstellen α und β $(\alpha < \beta)$ von $J_\nu(x)$, also auch von $x^\nu J_\nu(x)$. Dann folgt aus der zweiten Form der Gl. (17a) nach dem sogenannten Rolleschen Satz, daß zwischen α und β mindestens eine Nullstelle von $x^\nu J_{\nu-1}$, also auch von $J_{\nu-1}$ liegen muß. Derselbe Schluß auf (17b) angewandt, liefert den zweiten Teil der Behauptung.

Aus der Kombination der beiden Resultate folgt weiter, daß nur eine Nullstelle von $J_{\nu-1}(x)$ bzw. $J_{\nu+1}(x)$ in das genannte Intervall fällt. Würden nämlich zwei Nullstellen α' und β' etwa von $J_{\nu-1}(x)$ im Intervall (α, β) liegen, so würde sich nach dem Vorigen ergeben, daß $J_\nu(x)$ im Intervall (α', β') mindestens eine Nullstelle besitzt. Dies widerspricht jedoch der Annahme, daß α und β zwei aufein-

---

[1]) Für $\nu < -1$ hat $J_\nu(x)$ auch komplexe Nullstellen. Die Anzahl derselben hat A. Hurwitz bestimmt, Math. Ann. **33** (1889), S. 246—266.

anderfolgende Nullstellen von $J_\nu(x)$ sind. Damit ist c) in vollem Umfang bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß $J_0(x)$ unendlich viele Nullstellen besitzt. In der Tat ist der Integrand in (28′) positiv für $0 < x \leqq {}^3/_4\pi$ und negativ für $\pi < x \leqq {}^7/_4\pi$. Es liegt also die kleinste positive Nullstelle von $J_0(x)$ im Intervall $({}^3/_4\pi,\ \pi)$. Man setze ferner in (28′): $x = (k + \varepsilon)\pi$, wobei k eine ganze Zahl und $0 \leqq \varepsilon < 1$ ist. Dann ergibt sich

$$J_0(x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varepsilon\pi + \varphi/2)}{\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}}\, e^{-2x \operatorname{ctg}\varphi}\, d\varphi.$$

Ist also $\varepsilon \leqq {}^3/_4$, so ist $\operatorname{sgn} J_0(x) = (-1)^k$. Daraus folgt, daß zwischen $(k + {}^3/_4)\pi$ und $(k+1)\pi$ ein Zeichenwechsel von $J_0(x)$ eintreten muß, was die Existenz einer Nullstelle in diesem Intervall zur Folge hat.

Wegen c) ergibt sich hieraus zugleich die Existenz von unendlich vielen Nullstellen für alle $J_n(x)$ mit ganzzahligem n. Dasselbe gilt übrigens, wie man leicht zeigen kann, für alle $J_\nu(x)$. Hieraus folgt nach dem Rolleschen Satze, daß die Funktionen $\alpha x J'_\nu(x) + \beta J_\nu(x)$ (α, β Konstanten, $\alpha \neq 0$) ebenfalls unendlich viele reelle Nullstellen besitzen; in der Tat stimmen diese Funktionen, abgesehen von einem unwesentlichen Faktor, mit der Ableitung von $x^c J_\nu(x)$ überein, wo $c = \dfrac{\beta}{\alpha}$ ist.

Die folgende Tabelle gibt die positiven Nullstellen

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k < \cdots$$

von $J_0(x)$ für einige Werte von k an. Man sieht, daß die Differenz $\xi_k - \xi_{k-1}$ sehr rasch gegen π konvergiert (vgl. IX, § 3, 1).

k	ξ_k	k	ξ_k
1	2,404 83	4	11,791 53
2	5,520 08	5	14,930 92
3	8,653 73	6	18,071 06

Die Nullstellen der Besselschen Funktionen spielen in der Theorie der Schwingungen von elastischen Körpern eine wichtige Rolle.

11. Zusammenhang mit den Kugelfunktionen. Die Besselschen Funktionen stehen zu den Legendreschen Polynomen $P_n(x)$ in ein-

facher Beziehung. Setzt man in der Laplaceschen Formel § 2, (47) $x = \cos(\xi/n)$, so wird

$$x + \sqrt{x^2-1}\cos t = \cos\frac{\xi}{n} + i\sin\frac{\xi}{n}\cos t = 1 + \frac{i\xi\cos t + \varepsilon_n}{n},$$

wobei $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ ist. Man hat somit mit Rücksicht auf (13)

$$(37)\qquad \lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\xi\cos t}\,dt = J_0(\xi).$$

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen den in § 2, 5 definierten zugeordneten Funktionen und $J_\nu(\xi)$. Aus § 2, (48) folgt auf die gleiche Weise, wie oben

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+\nu)!}P_n^\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = \frac{i^{-\nu}}{\pi}\int_0^\pi e^{i\xi\cos t}\cos\nu t\,dt = J_\nu(\xi).$$

Hierbei ist ν eine beliebige positive ganze Zahl. Wegen

$$\frac{n!}{(n+\nu)!}\sin^\nu\frac{\xi}{n} \sim \left(\frac{\xi}{n^2}\right)^\nu$$

ergibt sich hieraus

$$(37')\qquad \lim_{n\to\infty} n^{-2\nu}P_n^{(\nu)}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = \xi^{-\nu}J_\nu(\xi)\qquad(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 4. Spezielle Polynome

1. Jacobische (hypergeometrische) Polynome. In § 1 haben wir die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome durch die Orthogonalitätseigenschaft

$$(1)\qquad \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q_m(x)Q_n(x)\,dx = \begin{cases}0 \text{ für } m \neq n,\\ 1 \text{ für } m = n\end{cases}\quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert, wobei $Q_n(x) = Q_n(\alpha, \beta; x)$ ein bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmtes Polynom n-ten Grades bezeichnet; α und β sind beliebige Konstanten > -1. Von den zahlreichen Eigenschaften dieser Polynome beweisen wir hier bloß die einzige, daß sie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2)\quad x(1-x)y'' + [\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

genügen.

Diese Gleichung ist mit der folgenden gleichwertig:

$$(3)\qquad \frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}\frac{dy}{dx}\right] = c\,x^\alpha(1-x)^\beta y,$$

wo $c = -n(n+\alpha+\beta+1)$ ist. Da hier y ein Polynom n-ten Grades bedeutet, so ist der linksstehende Ausdruck $u(x)$ von der Form $u(x) = x^\alpha(1-x)^\beta K(x)$, wobei $K(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist. Können wir zeigen, daß

$$\int_0^1 u(x)x^\nu dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ist, so folgt wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Polynome $Q_n(x)$, daß $K(x) = k \cdot y$ ist; k bedeutet eine Konstante. Man erhält durch Produktintegration

$$\int_0^1 u(x)x^\nu dx = -\nu\int_0^1 x^{\alpha+\nu}(1-x)^{\beta+1}\frac{dy}{dx}dx,$$

weil α und $\beta > -1$ sind. Nach nochmaliger Produktintegration folgt

$$\int_0^1 u(x)x^\nu dx = \nu\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta y[(\alpha+\nu)x^{\nu-1}-(\alpha+\nu+\beta+1)x^\nu]dx = 0,$$

w. z. b. w.

Die Bestimmung der Konstanten k geschieht durch Vergleichung der höchsten Koeffizienten von x in (3), nachdem dort $y = Q_n(x)$ gesetzt worden ist. Es ergibt sich als Koeffizient von $x^{\alpha+n}(1-x)^\beta$ gerade $c = -n(n+\alpha+\beta+1)$.

Diese Gl. (2) ist ein Spezialfall der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0,$$

deren im Punkte $x = 0$ reguläre Lösung durch die hypergeometrische Reihe

$$y = F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\;b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\quad c(c+1)\ldots(c+n-1)}x^n$$

dargestellt ist (vgl. IV, § 2, 3 und VI, § 4, 5). In unserem Falle hat man $a = -n$, $b = n+\alpha+\beta+1$ (oder umgekehrt), ferner $c = \alpha+1$ zu setzen. Es ist also

$$Q_n(\alpha, \beta; x) = \text{konst}\; F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; x).$$

Die Polynome $Q_n(\alpha, \beta; x)$ sind somit abbrechende hypergeometrische Reihen.

Die Polynome

$$Q_n\left(\alpha, \beta; \frac{1-x}{2}\right) = Q_n^*(x)$$

erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$(1') \quad \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta Q_m^*(x) Q_n^*(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sie reduzieren sich (bis auf einen konstanten Faktor) auf die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ für $\alpha = \beta = 0$ und auf die Tschebyscheffschen Polynome

$$(4) \quad \begin{cases} T_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}, \\ U_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

für $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

2. Laguerresche Polynome. Die Laguerreschen Polynome $L_n(x)$ lassen sich durch die Orthogonalitätseigenschaft

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ 1 \text{ für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

definieren (vgl. § 1, 4). Sie genügen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(6) \qquad x y'' + (1-x) y' + n y = 0,$$

die man ebenso verifiziert, wie oben die Gl. (2). Zu dieser Gleichung steht die folgende in enger Beziehung:

$$(6') \qquad x z'' + (1+x) z' + (n+1) z = 0,$$

welche, wie man leicht zeigt, das Integral $z = e^{-x} y = e^{-x} L_n(x)$ besitzt.

Es gelten die Formeln

$$(7) \quad \begin{cases} L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^n = 1 - \dbinom{n}{1} \dfrac{x}{1!} + \dbinom{n}{2} \dfrac{n^2}{2!} - \cdots + \dfrac{(-x)^n}{x!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \dfrac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}, \\ n L_n(x) = (2n - x - 1) L_{n-1}(x) - (n-1) L_{n-2}(x) \\ \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots), \\ L_0(x) + L_1(x) + \cdots + L_n(x) = -L'_{n+1}(x). \end{cases}$$

Die Laguerreschen Polynome lassen sich folgendermaßen verallgemeinern. Für jeden Wert von $k > -1$ gibt es Polynome $L_n^{(k)}(x)$ mit der Orthogonalitätseigenschaft

$$(8)\quad \int_0^\infty e^{-x} x^k L_m^{(k)}(x) L_n^{(k)}(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ 1 \text{ für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sie haben wie die Laguerreschen Polynome $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$ lauter positive, voneinander verschiedene Wurzeln (§ 1, 4). Sie genügen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(9)\quad x y'' + (k + 1 - x) y' + n y = 0.$$

Die Funktion $z = e^{-x} x^k L_n(x)$ genügt der Gleichung

$$(9')\quad x z'' + (1 - k + x) z' + (n + 1) z = 0.$$

Besonders bemerkenswert sind die Spezialfälle $k = -1/2$ und $k = 1/2$, in welchen diese Polynome zu den sogenannten Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$ in enger Beziehung stehen. Letztere werden durch die Orthogonalitätsforderung

$$(10)\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert (vgl. 3). Bevor wir diese Polynome näher betrachten, zeigen wir, daß

$$(11)\quad H_{2\nu}(x) = \text{konst.}\, L_\nu^{(-1/2)}(x^2), \quad H_{2\nu+1}(x) = \text{konst.}\, x L_\nu^{(1/2)}(x^2)$$

ist. In der Tat läßt sich z. B. $H_{2\nu}(x)$ durch die Gleichungen

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_{2\nu}(x) x^r\, dx = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1)$$

kennzeichnen. Können wir

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} L_\nu^{(-1/2)}(x^2) x^r\, dx = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1)$$

beweisen, so folgt hieraus die Behauptung. Nun ist für ungerade r das Verschwinden dieses Integrals selbstverständlich, da dann der Integrand eine ungerade Funktion ist. Es bleibt also nur übrig

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} L_\nu^{(-1/2)}(x^2) x^{2s}\, dx = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

zu zeigen. Man hat

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} L_\nu^{(-1/2)}(x^2) x^{2s}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} L_\nu^{(-1/2)}(x) x^s\, dx,$$

und das Integral rechts ist nach der Definition von $L_\nu^{(-1/2)}(x)$ gleich 0. Ähnlich beweist man die Gleichung für $H_{2\nu+1}(x)$.

3. Hermitesche Polynome. Die durch (10) definierten Hermiteschen Polynome (vgl. auch § 1, 4) können aus der folgenden Formel berechnet werden:

$$e^{-x^2} H_n(x) = c_n \frac{d^n}{d x^n} e^{-x^2}, \tag{12}$$

wobei c_n eine Konstante ist. Die Hermiteschen Funktionen $e^{-x^2} H_n(x)$ entstehen somit im wesentlichen durch fortgesetzte Differentiation der Funktion e^{-x^2}.

Man beweist dies folgendermaßen. Die rechte Seite von (12) ist offenbar von der Form $e^{-x^2} K(x)$, wo $K(x)$ ein Polynom n-ten Grades bezeichnet. Können wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} K(x) x^\nu dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

zeigen, so folgt, daß $H_n(x) =$ konst. $K(x)$ ist. Nun ergibt sich durch n-malige partielle Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} K(x) x^\nu dx = c_n \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu \left(\frac{d^n}{d x^n} e^{-x^2}\right) dx$$
$$= (-1)^n c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n x^\nu}{d x^n} dx = 0,$$

da doch sämtliche Derivierten von e^{-x^2} für $x = \pm\infty$ verschwinden.

Es ist zweckmäßig, für die Konstante c_n in (12) den Wert $(-1)^n$ zu wählen. Man hat dann

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad \text{usw.}$$

Das Integral (10) erhält bei dieser Normierung für $m = n$ den Wert $2^n n! \sqrt{\pi}$.

Die Hermiteschen Polynome $H_n(x)$ genügen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 2x \frac{d y}{d x} + 2 n y = 0, \tag{13}$$

die man analog verifizieren kann, wie oben die Gl. (2), (7) und (9).

Wegen (12) gilt ferner

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \frac{d^n}{d x^n} e^{-x^2} = e^{-z^2 + 2zx}. \tag{14}$$

Für $x = 0$ folgt hieraus

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{2\nu}(0) = (-1)^\nu \dfrac{(2\nu)!}{\nu!}, \quad H'_{2\nu+1}(0) = (-1)^\nu \dfrac{(2\nu+2)!}{(\nu+1)!} \\ \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{array} \right. \tag{15}$$

Aus (14) ergibt sich leicht die Rekursionsformel

$$(16)\quad H_{n+1}(x) - 2x\, H_n(x) + 2n\, H_{n-1}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Andererseits folgt aus (12) durch Differentiation:

$$(17)\qquad H_{n+1}(x) = -H_n'(x) + 2x H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Vergleicht man dies mit (16), so ergibt sich

$$(18)\qquad H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mit den Polynomen $H_n(x)$ sind die durch

$$(12')\qquad e^{-\frac{x^2}{2}} H_n^*(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

definierten Polynome $H_n^*(x)$ eng verbunden. Es ist

$$(19)\qquad H_n^*(x) = \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^n}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Lehrbücher

1. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2 Bände. Berlin (Reimer). 2. Aufl. 1878, 1881.
2. P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig (Teubner). 1908.
3. G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge (University press). 1922.
4. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik. I. Berlin (Springer). 1924. Vgl. insbesondere Kap. 2 und 7.
5. E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis. Cambridge (University press). 4. Aufl. 1927.

Neuntes Kapitel

Die aus den Randwertproblemen entspringenden Reihenentwicklungen

§ 1. Entwicklung nach den Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Differentialgleichungen

1. Rückblick auf die Theorie der trigonometrischen Reihen. Zu der in IV, § 4 behandelten Fourierschen Entwicklung kann man auch in folgender Weise gelangen (vgl. VII, § 1, 4). Es liege die Aufgabe vor, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ zu integrieren; λ bezeichnet einen Parameter. Man zeigt leicht, daß für λ nur die Werte

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

in Betracht kommen. Die zugehörigen Lösungen

$$y = \text{konst.} \sin n x \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

genügen den obigen Randbedingungen.

Es sei nun eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(x) \tag{4}$$

vorgelegt, wo $f(x)$ eine der Randbedingung $y(0) = y(\pi) = 0$ genügende, für $0 \leqq x \leqq \pi$ definierte Funktion bedeutet. Zur Integration dieser Gleichung mit der eben erwähnten Randbedingung kann man folgendermaßen verfahren. Wir entwickeln $f(x)$ in eine Fouriersche Sinusreihe

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin n x + \cdots [1]).$$

Dann genügt, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Funktion

$$y(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin n x$$

formal der Gl. (4) und erfüllt auch die Randbedingungen. Wir sehen somit, daß die Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine Fouriersche Reihe als ein ganz natürliches Problem auftritt, wenn man Differentialgleichungen der Form (4) mit den genannten Randbedingungen integrieren will. Auf solche Differentialgleichungen führt bekanntlich das Problem der erzwungenen Schwingungen.

In IV, § 4 haben wir bewiesen, daß die Fouriersche Reihe einer der Dirichletschen Bedingung genügenden Funktion konvergiert. Die in VII, § 4 gewonnenen allgemeinen Sätze (und ebenso die aus der Theorie der Integralgleichungen sich ergebenden, vgl. XIII, § 2, 3) liefern für den speziellen Fall der Fourierschen Reihe etwas weniger, nämlich die Entwickelbarkeit von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen. Wir wollen hier den folgenden allgemeineren Satz formulieren: Die Fouriersche Entwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung $f(x)$ (I, § 1, 2) konvergiert überall, und zwar gegen $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, also insbesondere gegen $f(x)$, wenn f an

[1]) Man kann die Definition von $f(x)$ vermöge der Gleichung $f(-x) = -f(x)$ auf $-\pi, 0$ ausdehnen. Dann fallen in der Fourierschen Entwicklung von $f(x)$ sämtliche Kosinusglieder fort.

der Stelle x stetig ist. Ein entsprechender Satz gilt, wie wir weiter unten sehen werden, für eine große Anzahl von anderen Reihenentwicklungen.

2. Allgemeiner Fall. In kurzer Rekapitulation des in VII, § 4 Ausgeführten kommen wir jetzt auf den folgenden allgemeineren Fall. Es seien $r(x)$ und $q(x)$ gegebene analytische Funktionen im Intervall α, β. Wir betrachten die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung [VII, § 4, (1); die dort positiv vorausgesetzte Funktion p sei jetzt $= 1$ gesetzt]

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} - hy = 0 \text{ für } x = \alpha, \quad \frac{dy}{dx} - Hy = 0 \text{ für } x = \beta$$

(dritte Randwertaufgabe, VII, § 1, 2). Es seien λ_n die Eigenwerte, $\varphi_n(x)$ die entsprechenden normierten Eigenfunktionen $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Wir setzen voraus, daß sämtliche Eigenwerte λ_n von Null verschieden sind.

Es liege nun analog wie in dem vorhin behandelten Spezialfall die allgemeinere Aufgabe vor, die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x)$$

mit den Randbedingungen (6) zu integrieren, wobei $f(x)$ denselben Randbedingungen genügt. Zu diesem Zwecke entwickele man $f(x)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$. Es sei

$$(8) \qquad f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots;$$

nimmt man an, daß diese Reihe für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ gleichmäßig konvergiert, so ergibt sich durch Multiplikation mit $\varphi_n(x)$ und Integration mit Rücksicht auf die Orthogonalität der $\varphi_n(x)$

$$a_n = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi_n(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man betrachte nun die Funktion

$$(9) \qquad y = -\frac{a_1}{\lambda_1}\varphi_1(x) - \frac{a_2}{\lambda_2}\varphi_2(x) - \cdots - \frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) - \cdots.$$

Sie genügt zunächst den vorgeschriebenen Randbedingungen, da diese linear sind. Weiter hat man

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\lambda_n\varphi_n(x) = f(x).$$

Die Entwicklung (9) liefert also tatsächlich ein Integral der Differentialgleichung (7), das überdies den vorgeschriebenen Randbedingungen genügt.

Diese Überlegung ist rein formaler Natur. Die Konvergenz der hier auftretenden Reihen und die Zulässigkeit der Entwicklung kann nur unter gewissen Stetigkeitsbedingungen, die $f(x)$ zu erfüllen hat, behauptet werden.

Wir erwähnen hier, ohne auf die Beweise näher einzugehen, einen wichtigen Spezialfall, in welchem die Verhältnisse äußerst einfach sind[1]). Dies ist der Fall, wenn $r(x)$ im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ beständig positiv ist. Dann läßt sich die Gl. (5) in die folgende transformieren:

$$(10) \qquad \frac{d^2 v}{d z^2} + Q(z) v + \lambda v = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(11) \quad \frac{dv}{dz} - h'v = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, \quad \frac{dv}{dz} - H'v = 0 \quad \text{für} \quad z = \pi,$$

vorausgesetzt, daß $r(x)$ derart normiert ist, daß $\int_\alpha^\beta [r(x)]^{-1/2} dx = \pi$ gilt. (Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit.) Die Eigenwerte $\lambda_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sind alsdann, wie dies von Liouville und Hobson [vgl. Lond. M. S. Proc. (2) **6** (1908), S. 349] bewiesen wurde, von der Form

$$(12) \qquad \lambda_n = \left(n + \frac{\gamma_n}{n}\right)^2 \quad (|\gamma_n| < \gamma),$$

während die Eigenfunktionen

$$(13) \qquad v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz + \frac{\beta(z) \sin nz}{n} + \frac{\alpha_n(z)}{n^2},$$

wo γ_n, $\beta(z)$ und $\alpha_n(z)$ für alle n und für $0 \leqq z \leqq \pi$ dem absoluten Betrage nach unter einer festen Schranke bleiben. In diesem Falle ist die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen $v_n(z)$ gleichzeitig konvergent bzw. divergent mit der entsprechenden trigonometrischen Entwicklung.

In den folgenden beiden Paragraphen werden wir die Entwicklungen behandeln, welche nach den Legendreschen Polynomen bzw.

---

[1]) Vgl. A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Zweite Mitteilung.) Habilitationsschrift Göttingen (1909). Abgedruckt in den Math. Ann. **71** (1911), S. 38—53.

Besselschen Funktionen fortschreiten. Beide Funktionenklassen lassen sich als Eigenfunktionen von Differentialgleichungen der Form (5) mit geeigneten Randbedingungen auffassen. Zwei Entwicklungstypen, bei denen das Integrationsintervall unendlich ist, sollen vorerst kurz erwähnt werden.

3. Brunssche Reihe. Entwicklungen nach Hermiteschen Polynomen. In der Kollektivmaßlehre (auch in der Theorie der Wärmeleitung) finden Entwicklungen Anwendung, die nach den sukzessiven Ableitungen der von Gauß benutzten „Fehlerfunktion" e^{-x^2} fortschreiten. (Brunssche Reihe.) Aus VIII, § 4, **3** folgt [vgl. (12)], daß diese Ableitungen, abgesehen vom Faktor e^{-x^2}, mit den sogenannten Hermiteschen Polynomen identisch sind, so daß die Entwicklungstheorie der Brunsschen Reihe aufs engste mit der nach Hermiteschen Polynomen zusammenhängt.

Es sei $f(x)$ eine für $-\infty < x < +\infty$ definierte, in jedem endlichen Intervall beschränkte und integrable Funktion, für welche die „Momente"

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^n\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

existieren. Die Koeffizienten der Brunsschen Reihe

$$(15) \quad \begin{cases} f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots, \\ \varphi_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \end{cases}$$

ergeben sich mit Beachtung der in VIII, § 4, **3** bewiesenen Orthogonalität der Hermiteschen Polynome folgendermaßen:

$$(16) \quad c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} f(x)\varphi_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x)\, dx.$$

Man sieht, daß der n-te Koeffizient c_n eine homogene lineare Verbindung der $n+1$ ersten Momente (14) ist. Diese Tatsache ist für manche Anwendungen von Bedeutung.

Aus der Theorie der Integralgleichungen ergeben sich unmittelbar keine Entwicklungstheoreme für diese Reihen. Die Hermiteschen Polynome lassen sich zwar als Eigenfunktionen eines leicht angebbaren Kernes auffassen [vgl. W. Myller-Lebedeff, Math. Ann. **64** (1907), S. 388—416], dieser Kern genügt aber nicht den in der Vorbemerkung zu XII dargelegten Bedingungen. Man kann jedoch

durch eine direkte Behandlung dieses singulären Falles zeigen, daß der folgende Satz gilt[1]):

Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $-\infty, \infty$ definiert und genüge in jedem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung. Außerdem mögen die Integrale

$$(17\text{a}) \qquad \int_1^\infty e^{\frac{x^2}{2}} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx, \qquad \int_{-\infty}^{-1} e^{\frac{x^2}{2}} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$$

konvergieren, und es gelte für $X \to +\infty$

$$(17\text{b}) \quad \lim X \int_X^\infty e^{x^2} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 dx = \lim X \int_{-\infty}^{-X} e^{x^2} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 dx = 0\,^{2)}.$$

Dann konvergiert die Brunssche Reihe (15) gegen

$$\tfrac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)],$$

und zwar gleichmäßig in jedem Intervall, wo die Funktion $f(x)$ stetig ist.

Aus der Existenz der Integrale (17a) folgt natürlich die Existenz der Momente (14).

Die Bedingungen (17a) und (17b) sind z. B. erfüllt, wenn $e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$ für $x \to \pm\infty$ die Größenordnung einer positiven Potenz von $1 : x$ besitzt.

4. Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen. Die in VIII, § 4, 2 hergeleitete Orthogonalitätseigenschaft der dort definierten Polynome $L_n^{(k)}(x)$ gestattet, Entwicklungen nach diesen Polynomen anzusetzen, deren Koeffizienten sich nach den in VIII, § 1 angegebenen

[1]) Hinsichtlich der Bedeutung dieser Entwicklungen in der Kollektivmaßlehre vgl. die Arbeit von R. v. Mises, Über die Grundbegriffe der Kollektivmaßlehre [Jahresber. d. D. Math.-Ver. **21** (1912), S. 9—20]; bezüglich der Entwicklungen nach Hermiteschen und ebenso nach den in 4 behandelten Laguerreschen Polynomen verweisen wir auf die Züricher Dissertation von W. Rotach (1925), sowie auf eine Arbeit von G. Szegö in der Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 87—115.

[2]) Das Theorem bleibt auch dann richtig, wenn man die Bedingungen (17a), (17b) durch die einzige Bedingung ersetzt, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \, |f(x)| \, |x|^{3/2} \, dx$$

existiert. [Daraus folgt offenbar (17a), nicht jedoch (17b).] In der zitierten Abhandlung von W. Rotach (S. 6) ist diese Bedingung irrtümlich formuliert; die berichtigte Form derselben verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. Plancherel.

allgemeinen Formeln (4) und (5) bestimmen lassen. Für den Fall $k = -1/2$ bzw. $k = 1/2$ sind diese Entwicklungen mit den in **3** behandelten Brunsschen Reihen verwandt. Für $k = 0$ erhält man die Entwicklungen nach den Laguerreschen Polynomen.

Dieser letzte Fall soll etwas ausführlicher betrachtet werden. Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ definiert, in jedem endlichen Intervall beschränkt und integrabel, ferner seien die Integrale

$$(18) \qquad \int_0^\infty e^{-x} f(x) x^n \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

konvergent. Die Koeffizienten der Laguerreschen Entwicklung

$$(19) \quad f(x) = d_0 L_0(x) + d_1 L_1(x) + d_2 L_2(x) + \cdots + d_n L_n(x) + \cdots$$

ergeben sich wegen VIII, § 4, (5) zu

$$(20) \qquad d_n = \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_n(x) \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Genügt die Funktion $f(x)$ in jedem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung und wird sie für $x \to \infty$ höchstens wie

$$e^{\frac{x}{2}} : x^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

unendlich, so konvergiert (19) für jedes positive x gegen

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

und zwar gleichmäßig in jedem Intervall, wo $f(x)$ stetig ist.

§ 2. Entwicklung nach Kugelfunktionen einer Veränderlichen

1. Asymptotisches Verhalten der Legendreschen Polynome. Die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ haben wir in VIII, § 2, 1 durch ihre erzeugende Funktion

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = P_0(x) + P_1(x) r + \cdots + P_n(x) r^n + \cdots \quad (|r| < 1)$$

definiert. Daraus ergibt sich eine asymptotische Formel für $P_n(x)$ bei großen Werten von n, welche für $-1 < x < 1$ gültig ist.

Zur Herleitung derselben setzen wir $x = \cos\theta$, wo θ zwischen 0 und π liegt, und schreiben $e^{i\theta} = z$. Man hat

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - rz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - rz^{-1}}} \cdot$$

Es ist nun

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2 + \cdots + g_n \xi^n + \cdots,$$

wenn wir der Kürze halber

$$g_0 = 1; \quad g_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

schreiben. Durch Multiplikation der beiden in (2) auftretenden Potenzreihen (IV, § 2, **2**) folgt

$$(3) \qquad P_n(x) = g_0 g_n z^n + g_1 g_{n-1} z^{n-2} + \cdots + g_n g_0 \frac{1}{z^n} \; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Schreibt man $x = \cos\theta$, so ist in der letzten Formel $z = e^{i\theta}$ zu setzen.

Faßt man in (3) die symmetrischen Glieder zusammen, so erhält man wegen

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta, \quad z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}} = 2\cos(n-1)\theta, \ldots$$

$$(3') \qquad P_n(\cos\theta) = g_0 g_n \cos n\theta + g_1 g_{n-1} \cos(n-2)\theta + \cdots + g_n g_0 \cos n\theta.$$

Daraus ist ersichtlich, daß $P_n(\cos\theta)$ ein trigonometrisches (Kosinus-) **Polynom** n-ter Ordnung ist mit lauter nicht negativen Koeffizienten [1]).

Aus (3′) folgt, daß $P_n(\cos\theta)$ gleich dem reellen Teil von

$$(4) \qquad 2 g_n e^{in\theta} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' g_\nu \frac{g_{n-\nu}}{g_n} e^{-2i\nu\theta}$$

ist; das Zeichen Σ' bedeutet hier, daß für gerade n zu dem letzten Gliede $\nu = n/2$ der Faktor $^1/_2$ hinzukommt. Diese Summe geht, wie wir beweisen wollen, für $n \to \infty$ in die wegen IV, § 1, **3** b) konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu e^{-2i\nu\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}} e^{i(\theta/2 - \pi/4)}$$

über.

Die Berechtigung dieses Grenzüberganges beruht auf dem folgenden, durch Abelsche Umformung [vgl. IV, § 1, **3** b)] beweisbaren Hilfssatze: Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_l$ beliebige komplexe, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ positive und monoton wachsende Konstanten. Es sei ferner C das Maximum der Zahlen

$$|c_1|, \quad |c_1 + c_2|, \ldots, \quad |c_1 + c_2 + \cdots + c_l|.$$

[1]) Daraus folgt z. B. $|P_n(\cos\theta)| \leq g_0 g_n + g_1 g_{n-1} + \cdots + g_n g_0 = P_n(1) = 1$, d. h. $|P_n(x)| \leq 1$ für $-1 \leq x \leq 1$.

Dann ist

$$|\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_l c_l| \leqq 2\,\lambda_l\, C.$$

Wegen der Wallisschen Formel $g_n \sim (n\pi)^{-1/2}$ (IV, § 7, 4) konvergiert nun das Glied mit $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ in der Summe (4) gegen 0; es genügt also zu zeigen, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} g_\nu\, e^{-2i\nu\theta}\left(\frac{g_{n-\nu}}{g_n} - 1\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} + \sum_{\nu=m}^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Hier bezeichnet m eine positive ganze Zahl, und es ist $n \geqq 2m$. Wir wenden den Hilfssatz auf die Summe II an. Da die Faktoren in der Klammer positiv und wachsend sind, so hat man

$$|\mathrm{II}| \leqq 2\left(\frac{g_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{g_n} - 1\right) C_m,$$

wobei C_m die obere Grenze der Summen

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+k} g_\nu e^{-2i\nu\theta}\right| \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

bedeutet. Bei festem m und für $n \to \infty$ konvergiert I gegen 0 und der Faktor von C_m gegen $2\,(\sqrt{2} - 1)$. Da C_m selbst für genügend große m beliebig klein wird, folgt hieraus die Behauptung.

Man hat somit für $0 < \theta < \pi$

$$P_n(\cos\theta) = 2\,g\ \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\,\sin\theta}} + \varepsilon_n\, g_n,$$

d. h.

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\eta_n}{\sqrt{n}}, \tag{5}$$

wo ε_n und η_n für $n \to \infty$ gegen 0 gehen, und zwar gleichmäßig in jedem Intervall $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Man nennt (5) die Laplacesche Formel.

Aus (5) folgt z. B., daß $P_n(x)$ für $-1 < x < 1$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert, und zwar so stark wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ganz anders verhält sich dagegen $P_n(x)$, wenn x reell und $|x| > 1$, bzw. wenn x komplex ist. Dann wächst $P_n(x)$ für $n \to \infty$ ins Unendliche,

und zwar gilt, wie man durch Anwendung der in § 3, 2 darzulegenden Paßmethode beweist, die asymptotische Formel

$$(5') \qquad P_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^2-1}}.$$

Hierbei ist diejenige Bestimmung der Wurzeln

$$\sqrt{x^2-1}, \quad \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}, \quad \sqrt[4]{x^2-1}$$

zu wählen, welche für $x > 1$ reell und positiv ist.

2. Entwicklung nach Legendreschen Polynomen. Die Laplacesche Reihe. Es sei $f(x)$ eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ definierte beschränkte und integrable Funktion. Unter der zugehörigen Legendreschen Reihe versteht man die Entwicklung

$$(6) \qquad a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x) + \cdots,$$

wobei $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet und

$$(7) \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(\xi) P_n(\xi)\, d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Diese Definition steht offenbar im Einklang mit unserer allgemeinen Definition der Entwicklung nach orthogonalen Funktionen (vgl. VIII, § 1), da die normierten Orthogonalfunktionen in diesem Falle die folgenden sind:

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Legendresche Reihe (6) stimmt für $x = \cos\vartheta$ mit der in VIII, § 2, 2 definierten Laplaceschen Reihe einer Funktion $f(\vartheta, \varphi) = f(\cos\vartheta)$ überein, die auf den Breitenkreisen der Einheitskugel konstant ist. In der Tat gilt wegen VIII, § 2, (44)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')]\, d\varphi = P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta').$$

Für die Legendresche Reihe gelten die Sätze von VIII, § 1, insbesondere der Parsevalsche Satz:

$$(8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} a_n^2 = \int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx.$$

Man hat also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Bezeichnet man mit $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Legendreschen Reihe, so besagt (8), daß

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx = 0$$

ist, d. h. die Legendresche Reihe konvergiert „im Mittel" (vgl. VIII, § 1, **1**) gegen die gegebene Funktion. Dagegen konvergieren die Partialsummen $s_n(x)$ nicht notwendig im gewöhnlichen Sinne, selbst dann nicht, wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist. Sie konvergieren immer dann, wenn die Funktion $f(x)$ der Dirichletschen Bedingung (IV, § 3, **1**) genügt, ähnlich also wie bei den Fourierschen Reihen.

Diese Ähnlichkeit zwischen dem Verhalten der Legendreschen und Fourierschen Reihen wird (wenigstens für $-1 < x < 1$) durch den folgenden wichtigen Satz klargelegt:

Es sei $f(x)$ eine beschränkte und integrable Funktion für $-1 \leqq x \leqq 1$, und $s_n(x)$ bezeichne die n-te Partialsumme der zugehörigen Legendreschen Reihe. Ähnliche Bedeutung habe $\sigma_n(\theta)$ für die Kosinusreihe, in welche sich die Funktion

$$f(\cos\theta)\sin\theta \quad \text{für} \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

entwickeln läßt. Dann ist für $0 < \theta < \pi$

$$\lim_{n \to \infty} \left[s_n(\cos\theta) - \frac{\sigma_n(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] = 0 \text{ [1]}.$$

Die beiden Entwicklungen sind somit zu gleicher Zeit konvergent bzw. divergent. Damit ist die Untersuchung der Legendreschen Reihen im Innern des Intervalls $(-1, 1)$ im wesentlichen auf die der Fourierschen Reihen zurückgeführt.

Die Behandlung der Laplaceschen Reihe (VIII, § 2, **1**) bereitet erheblich größere Schwierigkeiten. Es sei $f(\vartheta, \varphi)$ eine auf der Einheitskugel definierte, beschränkte und integrable Funktion,

$$f(\vartheta, \varphi) = Y_0(\vartheta, \varphi) + Y_1(\vartheta, \varphi) + \cdots + Y_n(\vartheta, \varphi) + \cdots \tag{9}$$

ihre Laplacesche Reihe; hierbei ist

$$\left\{ \begin{aligned} & Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' \\ & [\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')]. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

---

[1]) W. H. Young, Sur les séries de polynomes de Legendre. Comptes Rendus (Paris) **165** (1917), S. 696—699; A. Haar, Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. Math. Ann. **78** (1918), S. 121—136.

Diese Reihe ist unter der alleinigen Voraussetzung der Stetigkeit von f ebenfalls nicht notwendig konvergent. Sie ist dagegen konvergent im Nordpol $\vartheta = 0$, wenn der Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi)\, d\varphi = F(\vartheta)$$

als Funktion der Poldistanz ϑ der Dirichletschen Bedingung genügt. Analoges gilt für andere Punkte der Einheitskugel.

Die Reihe (9) reduziert sich im Nordpol $\vartheta = 0$ auf die Legendresche Reihe (6) der durch $f(x) = f(\cos\vartheta) = F(\vartheta)$ definierten Funktion für $x = 1$.

3. Beispiele. Um eine Potenzreihe in eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende umwandeln zu können, befassen wir uns mit der Entwicklung von x^n nach Legendreschen Polynomen. Es sei

$$x^n = a_n^{(n)} P_n(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \cdots + a_0^{(n)} P_0(x);$$

dann ist

$$a_\nu^{(n)} = \frac{2\nu + 1}{2}\int_{-1}^{1} x^n P_\nu(x)\, dx \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Es ist zunächst klar, daß $a_{n-1}^{(n)} = a_{n-3}^{(n)} = a_{n-5}^{(n)} = \cdots = 0$ ist, weil für solche ν der Integrand eine ungerade Funktion ist. Es sei also $\nu \equiv n$ (mod. 2). Mit Benutzung der Formel VIII, § 2, (25) erhält man

$$a_\nu^{(n)} = \frac{2\nu + 1}{2^{\nu+1}\nu!}\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2 - 1)^\nu\, dx,$$

also nach ν-maliger teilweiser Integration

$$a_\nu^{(n)} = (-1)^\nu \frac{2\nu + 1}{2^{\nu+1}\nu!}\, n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\int_{-1}^{1} x^{n-\nu}(x^2 - 1)^\nu\, dx.$$

Hieraus folgt nach der Substitution $x^2 = y$ und nach I, § 4, (24)

$$a_\nu^{(n)} = (2\nu + 1)\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+2)}{(n+\nu+1)(n+\nu-1)\ldots(n-\nu+3)}$$
$$(\nu = n,\ n-2,\ n-4, \ldots).$$

Man hat somit

$$(11)\quad \begin{cases} x^n = \dfrac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\Big[(2n+1)P_n(x) + (2n-3)\dfrac{2n+1}{2}P_{n-2}(x) \\ \qquad + (2n-7)\dfrac{(2n+1)(2n-1)}{2.4}P_{n-4}(x) + \cdots\Big]. \end{cases}$$

Als Anwendung betrachten wir die Entwicklung

$$e^{ixy} = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) + \cdots$$

und stellen uns die Aufgabe, die Koeffizienten c_n, welche Funktionen von y sind, zu bestimmen. Es ist

$$e^{ixy} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} \left[\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu^{(m)} P_\nu(x)\right],$$

d. h.

$$c_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} a_n^{(m)}.$$

Daraus folgt, wenn man $m = n + 2k$ setzt,

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{n+2k}}{(n+2k)!}(2n+1)\frac{(n+2k)!}{(2k+1)!(2n+2k+1)(2n+2k-1)\ldots(2k+3)}$$

$$= \frac{i^n y^n (2n+1)}{1.3\ldots(2n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{2.4\ldots 2k.(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Mit Rücksicht auf die in VIII, § 3 gegebene Definition der Besselschen Funktionen läßt sich dieser Ausdruck folgendermaßen schreiben:

$$c_n = i^n (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y^{-1/2} J_{n+1/2}(y),$$

d. h.

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ixy} P_n(x)\,dx = i^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y^{-1/2} J_{n+1/2}(y). \tag{12}$$

§ 3. Entwicklung nach Besselschen Funktionen

1. Asymptotisches Verhalten für große x. Wir wollen zunächst eine halbkonvergente Entwicklung (vgl. IV, § 1, 4) der Besselschen Funktion $J_0(x)$ herleiten, welche diese für genügend große x mit beliebiger Genauigkeit durch gewisse einfache (trigonometrische) Funktionen ausdrückt.

Aus der ersten Formel (26) in VIII, § 3 folgt für $x > 0$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{-1/2} du, \tag{1}$$

wofür wir hier $P_0(x) + i Q_0(x)$ schreiben. Es ist also

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} (P_0(x) + i Q_0(x)) \tag{2}$$

und wegen VIII, § 3, (27)

$$(3)\quad \begin{cases} J_0(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left[P_0(x)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - Q_0(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \\ \qquad = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left[P_0(x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + Q_0(x)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]. \end{cases}$$

Aus (1) folgt sofort:

$$(4)\quad P_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2}\left[\left(1-\frac{iu}{2x}\right)^{-1/2} + \left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{-1/2}\right]du.$$

Man hat aber nach dem Taylorschen Satze

$$\left(1-\frac{iu}{2x}\right)^{-1/2} + \left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{-1/2} = 2\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1.3\ldots(4k-1)}{2.4\ldots 4k}\left(\frac{u}{2x}\right)^{2k} + h_{m+1},$$

wobei

$$h_{m+1} = (-1)^{m+1}\frac{1.3\ldots(4m+3)}{2.4\ldots(4m+4)}\left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2}$$
$$\left[\left(1-\vartheta\frac{iu}{2x}\right)^{-2m-5/2} + \left(1+\vartheta\frac{iu}{2x}\right)^{-2m-5/2}\right]$$

und $0 < \vartheta < 1$ ist. Setzt man hier $\dfrac{\vartheta u}{2x} = \operatorname{tg}\varphi$, so läßt sich der Klammerausdruck folgendermaßen schreiben:

$$(1 - i\operatorname{tg}\varphi)^{-2m-5/2} + (1 + i\operatorname{tg}\varphi)^{-2m-5/2},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Moivresche Formel

$$(\cos\varphi)^{2m+5/2}[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{-2m-5/2} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2m-5/2}]$$
$$= 2(\cos\varphi)^{2m+5/2}\cos(2m+5/2)\varphi.$$

Es gilt somit die Abschätzung

$$|h_{m+1}| < 2\frac{1.3\ldots(4m+3)}{2.4\ldots(4m+4)}\left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2}.$$

Aus (4) ergibt sich also mit Rücksicht auf

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{2k-1/2}du = \Gamma(2k+1/2) = (2k-1/2)(2k-3/2)\cdots 1/2\,\Gamma(1/2)$$
$$= \sqrt{\pi}\,\frac{1.3\ldots(4k-1)}{2^{2k}}$$

das folgende Resultat:

$$(5)\quad \begin{cases} P_0(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{[1.3\ldots(4k-1)]^2}{(2k)!\,(8x)^{2k}} + R_{m+1}\,^{1)}, \\ \text{mit} \\ \qquad |R_{m+1}| < \frac{[1.3\ldots(4m+3)]^2}{(2m+2)!\,(8x)^{2m+2}}. \end{cases}$$

Ganz ähnlich folgt

$$(6)\quad \begin{cases} Q_0(x) = -\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{[1.3\ldots(4k+1)]^2}{(2k+1)!\,(8x)^{2k+1}} + S_{m+1}, \\ \text{mit} \\ \qquad |S_{m+1}| < \frac{[1.3\ldots(4m+5)]^2}{(2m+3)!\,(8x)^{2m+3}}. \end{cases}$$

Man kann übrigens zeigen — und dies ist für die numerische Berechnung wichtig —, daß R_{m+1} und S_{m+1} von demselben Vorzeichen sind wie das erste vernachlässigte Glied. Für $m = 0$ erhält man

$$\lim_{x\to\infty} P_0(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} Q_0(x) = 0$$

und

$$(7)\quad J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{x}}, \quad \text{mit } \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Die Besselsche Funktion $J_0(x)$ nähert sich also der Null, und zwar so stark wie $x^{-1/2}$, wenn x über die positiven Zahlen ins Unendliche wächst. Im übrigen verhält sich $\sqrt{x}\,J_0(x)$ für große x wie die Sinusfunktion (vgl. Fig. 41 auf S. 407).

Analoge Formeln gelten für die anderen Besselschen Funktionen, auf deren Herleitung wir jedoch verzichten. Wir führen hier nur die Resultate an. Es sei

$$(8)\quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_\nu(x)\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_\nu(x)\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right]$$

und (wenn ν eine positive ganze Zahl ist)

$$(9)\quad Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-P_\nu(x)\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_\nu(x)\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right].$$

---

1) Für $k = 0$ ist $[1.3\ldots(4k-1)]^2$ durch 1 zu ersetzen.

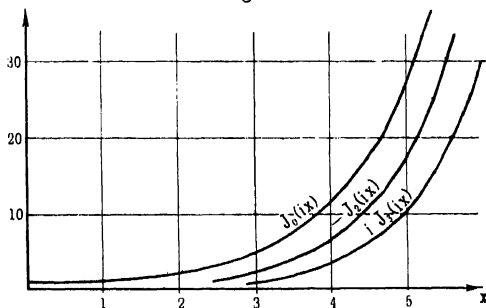
Dann hat man für $\nu > 0$, $x > 0$ mit Benutzung des Gaußschen Symbols $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$,

$$(10)\quad \begin{cases} P_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dfrac{\Pi(\nu + 2k - {}^1/_2)}{\Pi(2k)\Pi(\nu - 2k - {}^1/_2)} \dfrac{1}{(2x)^{2k}} + R_{m+1}, \\ \text{mit} \\ |R_{m+1}| < \dfrac{\Pi(\nu + 2m + {}^3/_2)}{\Pi(2m+2)|\Pi(\nu - 2m - {}^5/_2)|} \dfrac{1}{(2x)^{2m+2}} \\ (2m > \nu - {}^5/_2). \end{cases}$$

Ferner

$$(11)\quad \begin{cases} Q_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dfrac{\Pi(\nu + 2k + {}^1/_2)}{\Pi(2k+1)\Pi(\nu - 2k - {}^3/_2)} \dfrac{1}{(2x)^{2k+1}} + S_{m+1}, \\ \text{mit} \\ |S_{m+1}| < \dfrac{\Pi(\nu + 2m + {}^5/_2)}{\Pi(2m+3)|\Pi(\nu - 2m - {}^7/_2)|} \dfrac{1}{(2x)^{2m+3}} \\ (2m > \nu - {}^7/_2). \end{cases}$$

Die Reihen (10) und (11) sind, wenn man $m = \infty$ setzt, im allgemeinen divergent. Der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden

Fig. 45

Gliedern strebt, wie man sich leicht überzeugt, mit wachsendem Index ins Unendliche. Doch eignen sie sich, wie wir eben gesehen haben, zur angenäherten Berechnung der linksstehenden Funktionen, wenn man nur eine feste Anzahl von Gliedern in Betracht zieht und x als genügend groß annimmt. Sie sind halbkonvergent im Sinne von IV, § 1, 4.

Ganz anders verhalten sich die Besselschen Funktionen für komplexe Werte des Arguments. Abgesehen von einer unwesentlichen Modifikation der Restabschätzung gelten (10) und (11) auch für beliebige komplexe x, $|\operatorname{arc} x| < \pi$; sie zeigen, daß die Besselschen

Funktionen für $x = r e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, mit wachsendem r gegen Unendlich konvergieren, und zwar wie $r^{-1/2} e^{r|\sin\theta|}$. Für rein imaginäre Argumente $x = ir$, $r \to +\infty$, wachsen sie z. B. wie $r^{-1/2} e^r$ (vgl. die Fig. 45).

Hieraus folgt wegen VIII, § 3, (32) für $-\pi < \operatorname{arc} x < \pi$

$$(12)\qquad \begin{cases} H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \exp\left(ix - i\pi \dfrac{2n+1}{4}\right), \\ H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \exp\left(-ix + i\pi \dfrac{2n+1}{4}\right). \end{cases}$$

Für die in VIII, § 3, (31) definierte Funktion $K_0(x)$ erhalten wir also, wenn $x \to +\infty$,

$$(13)\qquad K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}.$$

2. Die Debyeschen Formeln. Die Paßmethode. Es sei noch erwähnt, daß für die Besselschen Funktionen $J_\nu(x)$ mit gleichzeitig wachsendem ν und x, jedoch mit festem $\frac{x}{\nu}$, P. Debye eine asymptotische Formel gegeben hat[1]. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß $\nu = n$ positiv ganzzahlig und $\frac{x}{\nu} = a$ konstant, $a > 1$ ist. Den Ausgangspunkt bilden dann die Formeln von VIII, § 3, 3, insbesondere

$$(14)\qquad J_n(an) = \frac{1}{2\pi} \int e^{in\left(a\cos z + z - \frac{\pi}{2}\right)} dz;$$

das Integral kann hier wegen des Cauchyschen Satzes längs einer beliebigen Kurve Γ, die von 0 bis 2π führt, erstreckt werden. Um diese möglichst vorteilhaft zu wählen, bestimmen wir zunächst die Stellen, wo die Ableitung des Integranden verschwindet (Sattelpunkte, Pässe); d. h.

$$-a\sin z + 1 = 0, \quad \sin z = \frac{1}{a}.$$

Es seien x_0 und $\pi - x_0$ die beiden in das Intervall $(0, 2\pi)$ fallenden Wurzeln dieser Gleichung, $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Wir wählen für Γ den Streckenzug $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \cdots + \mathrm{VII}$, bestimmt durch folgende Punkte:

$$z = 0,\ i\varepsilon,\ x_0 - \varepsilon + i\varepsilon,\ x_0 + \varepsilon - i\varepsilon,\ \pi - x_0 - \varepsilon - i\varepsilon,\ \pi - x_0 + \varepsilon + i\varepsilon,\ 2\pi + i\varepsilon,\ 2\pi.$$

Über die Abhängigkeit der positiven Größe ε von n wird später verfügt.

---

[1]) Math. Ann. **67** (1909), S. 535—558; Münch. Ber. **40** (1910), Nr. 5. Vgl. auch J. W. Nicholson, Phil. Mag. (6) **14** (1907), S. 697—707.

Auf der ersten Strecke I ist $z = i v$, $0 \leqq v \leqq \varepsilon$, so daß der Betrag des Integranden e^{-nv} ist; der entsprechende Teil von (14) ist somit höchstens von der Größenordnung $1/n$. Ähnliches gilt für die letzte Strecke VII.

Auf II ist $z = u + i\varepsilon$, $0 \leqq u \leqq x_0 - \varepsilon$. Der reelle Teil des Exponenten in (14) ist dann, wie eine leichte Rechnung zeigt, gleich

$$n\left(a \sin u \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} - \varepsilon\right) \leqq n\left(a \sin(x_0 - \varepsilon)\frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} - \varepsilon\right)$$
$$= n\left(\cos\varepsilon \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} - \varepsilon - a \cos x_0 \sin\varepsilon \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2}\right).$$

Für kleine Werte von ε lautet die Entwicklung des Klammerausdruckes:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \cdots\right)\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots\right) - \varepsilon - a \cos x_0 \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots\right)\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots\right)$$
$$= - a \cos x_0 \,.\, \varepsilon^2 + \cdots.$$

Wählt man also $\varepsilon = n^{-k}$, $0 < k < 1/2$, so ist der bezügliche Teil des Integrals höchstens von der Größenordnung $\exp(-c n^{1-2k})$, $c > 0$. Ähnlich erledigt man IV und VI. Es bleiben nunmehr III und V übrig, d. h. die beiden Strecken, welche durch die Sattelpunkte hindurchgehen.

Wir setzen $z = x_0 + \delta - i\delta$, $-\varepsilon \leqq \delta \leqq \varepsilon$. Entwicklung in der Umgebung von x_0 liefert

$$a \cos z + z - \frac{\pi}{2} = a \cos x_0 + x_0 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \cos x_0 (z - x_0)^2$$
$$+ (z - x_0)^3 A(z),$$

wobei $|A(z)|$ beschränkt bleibt. Der Höchstwert des Restgliedes ist also von der Größenordnung $\varepsilon^3 = n^{-3k}$, was mit n multipliziert gegen Null geht, sofern $k > 1/3$ gewählt wird. Wir haben also nur

$$\frac{1 - i}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{in\left(a \cos x_0 + x_0 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \cos x_0 (\delta - i\delta)^2\right)} d\delta$$

zu beachten. Ähnlich liefert V:

$$\frac{1 + i}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{in\left(a \cos(\pi - x_0) + \pi - x_0 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \cos(\pi - x_0)(\delta + i\delta)^2\right)} d\delta.$$

Da dies der zum vorigen konjugierte Ausdruck ist, so ergibt sich schließlich der reelle Teil von

$$\frac{1 - i}{\pi} e^{in\left(a \cos x_0 + x_0 - \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-a n \cos x_0 \,.\, \delta^2} d\delta.$$

Das letzte Integral ist gleich [I, § 4, (21)]

$$\frac{1}{\sqrt{a n \cos x_0}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{a n \cos x_0}}^{\varepsilon\sqrt{a n \cos x_0}} e^{-t^2} dt \sim \frac{1}{\sqrt{a n \cos x_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d\,t = \sqrt{\frac{\pi}{a\, n \cos x_0}},$$

da ja $\varepsilon\sqrt{n} \to \infty$. Alles zusammenfassend, erhalten wir unter Berücksichtigung von $\sin x_0 = \frac{1}{a}$

$$(15) \quad \begin{cases} J_n(a n) = \sqrt{\dfrac{2 \operatorname{tg} x_0}{n \pi}} \cos\left\{ n\left(\operatorname{ctg} x_0 + x_0 - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right\} + \varepsilon_n \\ \qquad = \sqrt{\dfrac{2}{n \pi \operatorname{tg} y_0}} \cos\left\{ n (\operatorname{tg} y_0 - y_0) - \dfrac{\pi}{4}\right\} + \varepsilon_n, \end{cases}$$

wenn $\frac{\pi}{2} - x_0 = y_0$ gesetzt wird, d. h. $\cos y_0 = \frac{1}{a}$, $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$. Das Restglied ε_n ist, wie man leicht sieht, höchstens von der Größenordnung $n^{-3/2}$.

Diese Formel gilt auch für kontinuierlich ins Unendliche wachsendes n. Ähnlich läßt sich eine asymptotische Formel von (14) gewinnen, wenn $a < 1$ ist. Dann liegen die Sattelpunkte im Komplexen, und das erste Glied auf der rechten Seite von (15) liefert auch dann das Hauptglied von $J_n(a n)$. Die Betrachtung modifiziert sich wesentlich nur für $a = 1$; dann verschwindet im Sattelpunkte auch die zweite Ableitung, so daß man in dem III und V entsprechenden Teil bis zu den Gliedern vierter Ordnung zu entwickeln hat. Man erhält z. B.

$$(15') \qquad J_n(n) \sim \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{n}\right)^{1/3}$$

Es sei noch erwähnt, daß man die Formeln (15) und (15′) auch zu einer semikonvergenten Entwicklung ausbauen kann. Bezüglich derselben verweisen wir auf das am Ende des Kapitels VIII zitierte Werk von Watson.

Man erkennt sofort, daß die Bedeutung der oben benutzten Methode (Methode der Sattelpunkte, Paßmethode) weit über das Gesagte hinausgeht. Sie ist in vielen Fällen anwendbar, wenn es sich um die asymptotische Berechnung eines Integrals der Form

$$\int\limits_a^b e^{n f(z)}\, d\,z$$

handelt, wo $f(z)$ analytisch (jedoch nicht notwendig eindeutig) ist; hierbei kann man den a und b verbindenden Integrationsweg Γ inner-

halb des Regularitätsbereiches von $f(z)$ beliebig verschieben. Man führt Γ am besten durch die Sattelpunkte z_0 von $f(z)$, in welchen also $f'(z_0) = 0$ ist, hindurch. Ihre Richtung in z_0 bestimmt man ferner folgendermaßen. Liegt der (normale) Fall vor, daß $f''(z_0) \neq 0$ ist, so gehen durch z_0 zwei aufeinander senkrecht stehende Kurven, längs welcher $|e^{f(z)}| = |e^{f(z_0)}|$ ist. Sie bestimmen vier Winkelräume, in denen $|e^{f(z)}|$ abwechselnd kleiner und größer als $|e^{f(z_0)}|$ ist, vorausgesetzt, daß z genügend nahe an z_0 liegt. Man führt dann Γ von dem einen Winkelraum mit $|e^{f(z)}| < |e^{f(z_0)}|$ in den gegenüberliegenden (in dem dieselbe Ungleichung stattfindet) hinüber, am einfachsten längs der „Winkelhalbierenden". Daher der Name Paßmethode. Man sieht unmittelbar, wie diese Betrachtung zu modifizieren ist, wenn auch weitere Ableitungen im Sattelpunkt verschwinden.

3. Entwicklung analytischer Funktionen nach Besselschen Funktionen. Es lassen sich Entwicklungen mannigfacher Art nach Besselschen Funktionen ansetzen. Wir führen hier nur einige ganz einfache Beispiele an, die man ohne größere Schwierigkeit verifizieren kann.

Wir gehen von der für alle x gültigen Entwicklung (13'') von VIII, § 3, **3** aus. Für $\theta = 0$ folgt hieraus

$$e^{ix} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x). \tag{16}$$

Trennt man den reellen vom imaginären Teil, so ergibt sich

$$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x), \tag{17}$$

$$\sin x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x). \tag{18}$$

Setzt man andererseits $\theta = \pi/2$, so folgt

$$1 = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x). \tag{19}$$

Weiter wollen wir die für alle positiven ganzzahligen Werte von n gültige Entwicklung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)\,(n+k-1)!}{k!} J_{n+2k}(x) \tag{20}$$

beweisen, mit deren Hilfe man jede Potenzreihe in eine nach Besselschen Funktionen fortschreitende Reihe verwandeln kann. Für $n = 1$ lautet diese Formel folgendermaßen:

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x).$$

Ihre Richtigkeit folgt unmittelbar aus (19). Man hat nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{x} J_{2k+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [J_{2k}(x) + J_{2k+2}(x)]$$
$$= J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) = 1$$

mit Rücksicht auf (16b) von VIII, § 3, **4**. Allgemein beweist man (20) mit vollständiger Induktion.

Aus (13″) von VIII, § 3, **3** ergibt sich ferner mit Bezug auf die Orthogonalitätseigenschaft der trigonometrischen Funktionen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta} e^{iy\cos\theta} \, d\theta = J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) J_n(y),$$

das heißt nach VIII, § 3, (13)

$$(21) \qquad J_0(x+y) = J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) J_n(y).$$

Eine allgemeinere Formel rührt von C. Neumann her; sie lautet

$$(21') \quad J_0\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right) = J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) J_n(y) \cos n\varphi$$

und kann ähnlich bewiesen werden wie (21). Man nennt diese Formel das Additionstheorem der Besselschen Funktionen.

Die obigen Reihenentwicklungen haben alle die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$$

(Neumannsche Reihe). Die Koeffizienten a_n lassen sich hier durch komplexe Integration bestimmen.

Ein weiterer gebräuchlicher Typus von Entwicklungen nach Besselschen Funktionen ist der folgende:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\nu+n}\{(\nu+n)x\}$$

(Kapteynsche Reihe). Das wichtigste Beispiel dafür ist die Auflösung der Keplerschen Gleichung

$$M = E - \varepsilon \sin E \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

in der Form

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nM}{n} J_n(n\varepsilon).$$

4. Entwicklung willkürlicher Funktion nach Besselschen Funktionen. Es seien

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \cdots$$

die positiven, der Größe nach geordneten Wurzeln von $J_\nu(\xi) = 0$, $\nu \geqq -\frac{1}{2}$, welche nach VIII, § 3, **10** sämtlich einfach sind. Aus VIII, § 3, (22) ergibt sich

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_m x) J_\nu(\xi_n x)\, dx = 0,$$

wenn m und n voneinander verschieden sind; die Funktionen

$$\sqrt{x}\, J_\nu(\xi_1 x),\ \sqrt{x}\, J_\nu(\xi_2 x), \ldots,\ \sqrt{x}\, J_\nu(\xi_n x), \ldots \tag{22}$$

bilden also im Sinne von VIII, § 1, **1** ein orthogonales Funktionensystem im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Man hat ferner nach (23) von VIII, § 3, **7**

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\xi_n x)\, dx = -\tfrac{1}{2} J_{\nu+1}(\xi_n) J_\nu'(\xi_n).$$

Da nach (16a) und (16b) von VIII, § 3, **4** $J_\nu'(\xi_n) = -J_{\nu+1}(\xi_n)$ ist, folgt hieraus

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\xi_n x)\, dx = \tfrac{1}{2} [J_{\nu+1}(\xi_n)]^2. \tag{23}$$

Die Funktionen $\sqrt{x}\, J_\nu(\xi_n x)$ eignen sich somit zur Entwicklung einer willkürlichen Funktion $\sqrt{x}\, f(x)$ (Besselsche Fourierreihen). Es sei

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\xi_n x); \tag{24}$$

dann lassen sich die Koeffizienten a_n auf die übliche Weise bestimmen, indem man beiderseits mit $x J_\nu(\xi_n x)$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert. Es folgt mit Rücksicht auf (23)

$$a_n = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\xi_n)]^2} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\xi_n x)\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Wenn $f(x)$ stetig ist, so konvergiert die Entwicklung (24) nicht notwendig. Genügt aber $f(x)$ der Dirichletschen Bedingung, so konvergiert (24) für $0 < x < 1$ und besitzt, wie die Fouriersche Reihe, die Summe

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]\,^{1)}.$$

[1] E. W. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 7 (1909), S. 387—388.

Man kann anstatt ξ_n allgemeiner die positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung $\alpha x J'_\nu(x) + \beta J_\nu(x) = 0$, α, β Konstanten, benutzen (Dinische Reihen). In der Formel (25) für die Koeffizienten a_n ist dann der Nenner $[J_{\nu+1}(\xi_n)]^2$ durch

$$\left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_n}\right)^2\right][J_\nu(\xi_n)]^2 + [J'_\nu(\xi_n)]^2$$

zu ersetzen.

Schließlich sind noch die Entwicklungen von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu(n x)$$

zu erwähnen (Schlömilchsche Reihen). Eine Funktion $f(x)$, die im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ eine Ableitung besitzt, welche daselbst stetig und von beschränkter Schwankung ist, läßt sich stets in eine derartige Reihe entwickeln ($\nu = 0$). Die Koeffizienten können auf einfache Weise durch Integrale dargestellt werden.

Zehntes Kapitel

Besondere Randwertprobleme

§ 1. Gleichungen vierter Ordnung

1. Die Aufgaben. Die hier auftretenden Randwertprobleme „vierter Ordnung" bilden die unmittelbare Verallgemeinerung der im siebenten Kapitel ausführlich behandelten Randwertprobleme „zweiter Ordnung".

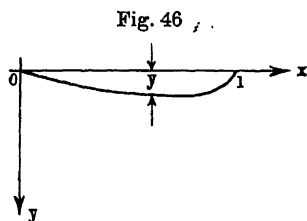



Fig. 46

Betrachten wir einen geraden Stab, dessen Enden mit den Punkten 0, 1 der x-Achse zusammenfallen und der unter dem Einfluß von Kräften der y-Richtung eine geringe Durchbiegung erfährt (Fig. 46). Nach Sätzen der Elastizitätstheorie ist dann die Krümmung der Stabmittellinie an einer Stelle x proportional dem Gesamtmoment M der Kräfte, die auf dem Stück zwischen 0 und x angreifen, so daß also näherungsweise die Beziehung

$$y'' = -\frac{M}{W}, \tag{1}$$

in der W eine Konstante (Biegungssteifigkeit) ist, besteht. Andererseits ist leicht einzusehen, daß die zweite Ableitung des Moments gleich der auf die Längeneinheit entfallenden Belastung ist, also

$$M'' = -p \tag{2}$$

gilt, woraus folgt

$$y^{\mathrm{IV}} - \frac{p}{W} = 0. \tag{3}$$

Sind zunächst die p nur von x abhängig, so erhalten wir nach (3) eine Differentialgleichung der Form

$$y^{\mathrm{IV}} = f(x). \tag{4}$$

Ist der Stab an den Enden festgeklemmt, so bestehen die Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \tag{5}$$

Die Gl. (4) und (5) bestimmen dann ein Randwertproblem vierter Ordnung, und zwar, wie man leicht zeigen kann, ein stets lösbares. Denn die allgemeine Lösung von (4) ist $y = \int_0^x f(t)\,dt + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$, und man verifiziert ohne weiteres, daß man die Konstanten c den Bedingungen (5) gemäß bestimmen kann. Die Kräfte P können aber auch von y abhängen; so sind z. B. die im Falle eines um die x-Achse rotierenden homogenen Stabes auftretenden Fliehkräfte proportional y, und wir erhalten nach (3) — falls keine eingeprägten Kräfte vorhanden sind — die Differentialgleichung

$$y^{\mathrm{IV}} - \lambda y = 0, \tag{6}$$

in der λ eine Konstante ist. Ist der Stab festgeklemmt, so gelten wieder die Randbedingungen (5). Liegt er an seinen Enden frei auf, so lauten die Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = 0, \tag{7}$$

da an einem freien Ende das Moment M verschwinden muß. Das Problem (6), (5) bzw. (6), (7) hat natürlich stets die Lösung $y \equiv 0$; andere Lösungen dagegen besitzt es, wie wir noch sehen werden, nur bei besonderen Werten von λ. Gerade diese aber sind von Interesse.

Die zuletzt angeführten Probleme sind Sonderfälle des folgenden allgemeinen Problems: Es soll ein nicht identisch verschwindendes Integral y der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{\mathrm{IV}} + f_1(x)\,y''' + f_2(x)\,y'' + f_3(x)\,y' + f_4(x)\,y = f(x) \tag{8}$$

gefunden werden, welches den vier Randbedingungen ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$(9)\quad \begin{cases} l^{(i)}(y) \equiv \alpha_1^{(i)} y(0) + \alpha_2^{(i)} y'(0) + \alpha_3^{(i)} y''(0) + \alpha_4^{(i)} y'''(0) \\ + \alpha_5^{(i)} y(1) + \alpha_6^{(i)} y'(1) + \alpha_7^{(i)} y''(1) + \alpha_8^{(i)} y'''(1) = \beta^{(i)} \end{cases}$$

genügt. Hierin sind die $\alpha^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ Konstanten. Die vier linearen Ausdrücke $l^{(i)}$ sollen untereinander linear unabhängig sein. Da das allgemeine Integral von (8) von vier willkürlichen Konstanten abhängt, so läuft das Problem auf die Aufgabe hinaus, die vier Konstanten den Gl. (9) gemäß zu bestimmen. Die Diskussion dieser Aufgabe ist die gleiche wie die in VII, § 1, 2 durchgeführte, wobei an Stelle der dort auftretenden Determinante Δ jetzt, wenn y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem der zu (8) gehörenden homogenen Gleichung ist, die Determinante

$$(10)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} l^{(1)}(y_1) & l^{(1)}(y_2) & l^{(1)}(y_3) & l^{(1)}(y_4) \\ l^{(2)}(y_1) & l^{(2)}(y_2) & l^{(2)}(y_3) & l^{(2)}(y_4) \\ l^{(3)}(y_1) & l^{(3)}(y_2) & l^{(3)}(y_3) & l^{(3)}(y_4) \\ l^{(4)}(y_1) & l^{(4)}(y_2) & l^{(4)}(y_3) & l^{(4)}(y_4) \end{vmatrix}$$

tritt. Insbesondere gilt wieder die Alternative, und das Verschwinden von Δ ist wieder die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des homogenen[1]) Problems. Hängen die Koeffizienten von (8) noch von einem Parameter λ ab, so wird Δ eine Funktion von λ, und das homogene Problem wird also für die und nur die Werte von λ lösbar sein, die der Gleichung

$$(11)\qquad \Delta(\lambda) = 0$$

genügen. Diese λ-Werte heißen wieder die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen des Problems Eigenfunktionen.

Das Problem der Entwicklung nach Eigenfunktionen tritt uns hier auch wieder entgegen. Betrachten wir z. B. einen schwingenden biegungssteifen Stab. Wie aus (3) leicht folgt, besteht für seine Ausbiegung $y(x,t)$ die partielle Differentialgleichung

$$(12)\qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

in der μ eine positive Konstante, nämlich die Stabmasse pro Längeneinheit bedeutet, wenn die Biegungssteifigkeit $W = 1$ gesetzt ist. Ist der Stab an den Stellen 0, 1 der x-Achse festgeklemmt, so bestehen für jedes t die Randbedingungen

$$(13)\qquad y(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0.$$

---

[1]) Die Ausdrücke „homogenes" bzw. „inhomogenes Problem" haben denselben Sinn wie in VII, § 1, 2.

Außerdem seien noch Ausbiegung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ vorgeschriebene Funktionen von x:

$$(14) \qquad y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

wobei wegen (13) die im übrigen willkürlichen Funktionen f und g die Bedingungen (5) erfüllen müssen. Suchen wir der Gl. (12) durch den Ansatz

$$(15) \qquad y(x, t) = z(x) \sin kt$$

zu genügen, so erhalten wir für $z(x)$ die Differentialgleichung

$$(16) \qquad \frac{d^4 z}{dx^4} - \lambda \mu z = 0, \quad \text{worin} \quad \lambda = k^2.$$

Wegen (13) muß z den Randbedingungen (5) genügen. Ist nun $z_\nu(x)$ eine Eigenfunktion des Problems (16), (5) zum Eigenwert λ_ν, so ist nach (15) $z_\nu(x) \sin k_\nu t$ eine Lösung von (12) und (13), wenn k_ν aus $\lambda_\nu = k_\nu^2$ bestimmt ist. Ebenso erkennt man, daß auch $z_\nu(x) \cos k_\nu t$ und daher auch

$$(17) \qquad y(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu(x) (A_\nu \sin k_\nu t + B_\nu \cos k_\nu t)$$

(12) und (13) löst, wenn A_ν, B_ν irgendwelche Konstanten sind, für welche die rechtsstehende Reihe die notwendigen Konvergenzeigenschaften hat. Soll nun (14) erfüllt sein, so haben wir die A_ν, B_ν so zu bestimmen, daß

$$(18) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu z_\nu(x), \quad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu A_\nu z_\nu(x)$$

wird, d. h. wir haben die willkürlichen, den Randbedingungen (5) genügenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nach den Eigenfunktionen $z_\nu(x)$ des Problems (16), (5) zu entwickeln. Im Falle $\mu =$ konst. haben wir in (16) eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten, für die wir die Eigenfunktionen explizite angeben können.

2. Konstante Koeffizienten. Im Falle konstanter Koeffizienten erhält man nach VI, § 5, **4** mit dem Ansatz $y = e^{rx}$ durch Auflösen einer algebraischen Gleichung vierten Grades ein Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4 der homogenen Gl. (8). Man kann also die Determinante (10) explizite anschreiben, die Frage der Lösbarkeit des Problems entscheiden und die Lösungen, falls welche existieren, direkt errechnen.

Wir behandeln hier als Beispiele die Gl. (6) unter den Randbedingungen (5) bzw. (7). Nach VI, § 5, **4** bilden die Funktionen

$e^{r_\nu x}$ ein Fundamentalsystem von (6), wenn r_ν die Wurzeln der Gleichung $r^4 = \lambda$ sind. Ist daher $\lambda > 0$ und k die positive reelle vierte Wurzel aus λ, so bilden $\cos kx$, $\sin kx$, $\mathfrak{Cof}\, kx$, $\mathfrak{Sin}\, kx$ ein reelles Fundamentalsystem von (6), und die Determinante (10) wird im Falle der Randbedingungen (5):

(19) $$\Delta = 2k^2(1 - \cos k\, \mathfrak{Cof}\, k).$$

Die Gleichung für die Eigenwerte lautet also

(20) $$\cos k\, \mathfrak{Cof}\, k = 1.$$

Für große k ist $\mathfrak{Cof}\, k$ annähernd $^1/_2\, e^k$, so daß (20) in $\cos k = 2e^{-k}$ übergeht, und die Wurzeln dieser Gleichung stimmen offenbar annähernd mit den Nullstellen $n\pi + \frac{\pi}{2}$ von $\cos k$ überein. Zu jeder Wurzel von (20) erhält man die zugehörige Eigenfunktion, indem man die in der allgemeinen Lösung

(21) $$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + c_3\, \mathfrak{Cof}\, kx + c_4\, \mathfrak{Sin}\, kx$$

auftretenden Konstanten (bis auf einen unbestimmt bleibenden gemeinsamen Faktor) aus den vier Gl. (5), deren Determinante gerade Δ ist, errechnet.

Im Falle der Randbedingungen (7) liefert die Rechnung

$$\Delta = -4k^4 \sin k\, \mathfrak{Sin}\, k;$$

die Wurzeln von $\Delta = 0$ sind also die Zahlen $k_n = n\pi\, (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Die Eigenfunktionen erhält man wieder durch Einsetzen von (21) in (7). Es sind offenbar die Funktionen $\sin k_n x$.

Auf andere Gruppen homogener Randbedingungen läßt sich genau die gleiche Überlegung anwenden. Auch der Fall nicht homogener Bedingungen bietet keinerlei Schwierigkeiten.

3. Orthogonalität und Realität der Eigenwerte. Entwicklungssatz. Wir betrachten an Stelle von (6) die etwas allgemeinere Differentialgleichung

(22) $$y^{\mathrm{IV}} - \lambda p(x) y = 0,$$

in der p eine im Intervall 0, 1 nicht verschwindende reelle stetige Funktion ist. Es mögen homogene Randbedingungen [$\beta^{(i)} = 0$ in Gl. (9)]

(23) $$l^{(i)}(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

vorliegen, von der Eigenschaft, daß für irgend zwei sie erfüllende Funktionen u, v

(24) $$[u'''v - v'''u]_0^1 = [u''v' - v''u']_0^1$$

ist [eine Bedingung, die insbesondere bei den von uns behandelten Randbedingungen (5) und (7) erfüllt ist]. Wir behaupten: Sind y_i, y_k zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k des Problems (22), (23) gehörende Eigenfunktionen, so besteht die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 p(x)\, y_i(x)\, y_k(x)\, dx = 0. \tag{25}$$

Man erhält in der Tat aus den beiden Gleichungen

$$y_i^{\mathrm{IV}} - \lambda_i p(x)\, y_i = 0, \qquad y_k^{\mathrm{IV}} - \lambda_k p(x)\, y_k = 0 \tag{26}$$

die Beziehung

$$y_i^{\mathrm{IV}} y_k - y_k^{\mathrm{IV}} y_i = (\lambda_i - \lambda_k)\, p(x)\, y_i\, y_k. \tag{27}$$

Integriert man diese Gleichung, indem man links zweimal partielle Integration anwendet, so ergibt sich

$$[y_i''' y_k - y_k''' y_i]_0^1 - [y_i'' y_k' - y_k'' y_i']_0^1 = (\lambda_i - \lambda_k) \int_0^1 p(x)\, y_i(x)\, y_k(x)\, dx. \tag{28}$$

Zufolge (24) verschwindet die linke Seite, daher ergibt sich wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ die Behauptung (25).

Aus dem eben Bewiesenen folgt auch ohne weiteres die Realität der Eigenwerte. Wäre nämlich eine nicht reelle Zahl λ Eigenwert und $y = u + iv$ eine zugehörige Eigenfunktion, so wäre auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ Eigenwert und $\bar{y} = u - iv$ eine zu diesem gehörende Eigenfunktion. Wegen $\lambda \neq \bar{\lambda}$ müßte daher nach dem bewiesenen Satze $\int_0^1 p(x)\, y(x)\, \bar{y}(x)\, dx = \int_0^1 p(x)(u^2 + v^2)\, dx$ verschwinden, was offenbar, da $p(x)$ sein Zeichen nicht wechselt, unmöglich ist, falls y nicht identisch verschwindet.

Für die beiden oben betrachteten Fälle einfacher Randbedingungen läßt sich auch der Entwicklungssatz, das ist die Behauptung, daß eine willkürliche, den Randbedingungen genügende, viermal differenzierbare Funktion nach den Eigenfunktionen des homogenen Randwertproblems entwickelt werden kann, nach der gleichen Methode beweisen, die in VII, § 4 befolgt ist. Wir verzichten hier aber auf nähere Ausführung, da die später (im dritten Abschnitt) zu behandelnde Theorie der Integralgleichungen den Entwicklungssatz unabhängig von der Ordnung der Differentialgleichung liefert. In weitem Umfang hat Tamarkine[1]) den Entwicklungssatz bewiesen. Unter anderem

[1]) Rendiconti del Circ. mat. di Palermo t. **34** (1912), S. 345.

hat er gezeigt: Vorgelegt seien eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{d x^n} + p_2(x)\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \cdots + p_n(x) y + \lambda y = 0, \tag{29}$$

wobei die p_ν in 0, 1 stetige Funktionen sind, und die n homogenen Randbedingungen

$$l_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n), \tag{30}$$

wo die l_i lineare homogene Formen in $y(0)$, $y'(0) \ldots y^{(n-1)}(0)$, $y(1)$, $y'(1) \ldots y^{(n-1)}(1)$ sind. Wenn dann das Problem (29), (30) „selbstadjungiert" ist[1]), so sind die Bedingungen der Entwickelbarkeit einer willkürlichen in 0, 1 integrablen Funktion $f(x)$ nach den Eigenfunktionen dieses Problems die gleichen wie die der Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe.

§ 2. Simultane Differentialgleichungen

1. Zwei Gleichungen erster Ordnung. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} f_{11}(x)y' + f_{12}(x)z' + f_{13}(x)y + f_{14}(x)z = f_{15}(x), \\ f_{21}(x)y' + f_{22}(x)z' + f_{23}(x)y + f_{24}(x)z = f_{25}(x) \end{cases} \tag{1}$$

unter den Randbedingungen

$$\begin{cases} l_1(y,z) \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 z(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 z(b) = \gamma, \\ l_2(y,z) \equiv \beta_1 y(a) + \beta_2 z(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 z(b) = \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Man wird bemerken, daß das Randwertproblem (1), (2) die in VII ausführlich behandelte Randwertaufgabe zweiter Ordnung als Spezialfall enthält. Dieser liegt nämlich vor, wenn sich die erste Gl. (1) auf $y' - z = 0$ reduziert. Die Diskussion des allgemeinen Falles ist nun ganz analog der in VII, § 1, 2 durchgeführten des Spezialfalles. Wenn nämlich, was wir voraussetzen wollen, das System (1) nach y' und z' auflösbar ist, so lautet die allgemeine Lösung von (1)

$$\begin{cases} y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + F_1(x), \\ z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + F_2(x), \end{cases} \tag{3}$$

wenn y_1, z_1, y_2, z_2 ein Fundamentalsystem des zu (1) gehörenden homogenen Systems bilden und F_1, F_2 eine partikuläre Lösung von

[1]) D. h. mit dem „adjungierten" Problem übereinstimmt. Man erhält dieses, indem man der Diff.-Gl. (29) in bestimmter Weise eine neue Differentialgleichung der gleichen Form und den Randbedingungen (30) neue lineare homogene Randbedingungen zuordnet. Über die genaue Definition dieser Zuordnung vgl. die erwähnte Abhandlung von Tamarkine, S. 377 f.

(1) ist. Ist (1) homogen, so hat man $F_1 = F_2 = 0$. Soll nun y, z die Randbedingungen (2) erfüllen, so müssen die Konstanten c_1, c_2 den Gleichungen

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} c_1 l_1(y_1, z_1) + c_2 l_1(y_2, z_2) = \gamma - l_1(F_1, F_2), \\ c_1 l_2(y_1, z_1) + c_2 l_2(y_2, z_2) = \Gamma - l_2(F_1, F_2) \end{cases}$$

genügen. Es ist unnötig, die Diskussion fortzusetzen: sie ist wörtlich dieselbe wie in VII, § 1, 2, wenn man an Stelle der in VII, § 1 auftretenden Determinante (8′) die Determinante

$$\text{(5)}\qquad \Delta = l_1(y_1, z_1) l_2(y_2, z_2) - l_1(y_2, z_2) \cdot l_2(y_1, z_1)$$

einführt. Es gilt also wieder die dort ausgesprochene Alternative.

Führen wir in (1) einen willkürlichen Parameter λ ein, indem wir $f_{ik}(x) = q_{ik}(x) + \lambda p_{ik}(x)$ ($i = 1, 2$; $k = 3, 4$) setzen, so wird Δ eine Funktion von λ, und die Nullstellen dieser Funktion sind die Eigenwerte des homogenen Problems (1), (2), die zugehörigen Lösungen y, z die Eigenfunktionenpaare. Wenn $\Delta(\lambda)$ unendlich viele Nullstellen λ_ν hat, ohne identisch zu verschwinden, so entsteht das Problem, ein Paar willkürlicher, jedoch den homogenen Randbedingungen (2) genügender Funktionen f, g nach den Eigenfunktionen y_ν, z_ν des homogenen Problems (1), (2) mit denselben Koeffizienten zu entwickeln, d. h. Konstanten c_ν so zu finden, daß

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} f(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \cdots \\ g(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + c_3 z_3(x) + \cdots \end{cases}$$

ist.

In Analogie zu dem in VII, § 4 bewiesenen Entwicklungssatz wird man annehmen dürfen, daß für zweimal stetig differenzierbare f, g die Entwicklung (6) zu Recht besteht, falls das System (1), auf die Normalform gebracht, die spezielle Gestalt

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} y' = (g_{11}(x) + \lambda h_1(x)) y + g_{12}(x) z, & h_1 > 0, \\ z' = g_{21}(x) y + (g_{22}(x) + \lambda h_2(x)) z, & h_2 > 0 \end{cases}$$

besitzt und die Randbedingungen (2) der Bedingung unterliegen, daß die Determinanten $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ und $\alpha_3\beta_4 - \beta_3\alpha_4$ von Null verschieden sind.

Alles hier Gesagte läßt sich unverändert auf Systeme von n Gleichungen erster Ordnung für n unbekannte Funktionen mit n linearen Randbedingungen übertragen.

2. Gleichungen zweiter Ordnung. In der Physik treten gelegentlich für zwei unbekannte Funktionen y, z zwei Gleichungen zweiter Ordnung mit vier linearen Bedingungen zwischen den Werten von y', z', y, z in den Endpunkten a, b eines Intervalls auf. Setzt man $y' = u$,

$z' = v$, so geht, wie man unmittelbar sieht, das System der zwei Gleichungen **zweiter** Ordnung für y, z in ein System von vier Gleichungen **erster** Ordnung für die vier unbekannten Funktionen u, v, y, z über, und da auch in den vier Randbedingungen nur diese Funktionen auftreten, so sind nach der am Schluß von 1 gemachten Bemerkung alle dort durchgeführten Betrachtungen anwendbar. Insbesondere gilt also wieder die „Alternative". Hinsichtlich der Existenz von Eigenwerten und der Entwicklung nach Eigenfunktionen erwähnen wir noch den folgenden, von Hilbert[1]) mit Hilfsmitteln aus der Theorie der Integralgleichungen bewiesenen Satz: Gegeben sei das System von Gleichungen zweiter Ordnung:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z) - q_{11}y' - q_{12}z' + (r_{11} + \lambda k_{11})y \\ \qquad + (r_{12} + \lambda k_{12})z = 0, \\ \dfrac{d}{dx}(p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z) - q_{21}y' - q_{22}z' + (r_{21} + \lambda k_{21})y \\ \qquad + (r_{22} + \lambda k_{22})z = 0. \end{cases}$$

Dabei seien die p_{ik}, r_{ik}, q_{ik}, k_{ik} im Intervall a, b stetige Funktionen von x, für welche gilt:

$$(9)\qquad p_{12} = p_{21},\; r_{12} = r_{21},\; k_{12} = k_{21},\; p_{11}p_{22} - p_{12}^2 \neq 0,\; k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0.$$

Die Randbedingungen mögen lauten:

$$(10)\qquad y(a) = z(a) = y(b) = z(b) = 0 \quad \text{(erste Randwertaufgabe).}$$

Alsdann besitzt das Problem (8), (10) unendlich viele reelle Eigenwerte λ_i. Jedes Paar zweimal stetig differenzierbarer in den Randpunkten verschwindender Funktionen $f(x)$, $g(x)$ läßt sich nach den Eigenfunktionen y_i, z_i entwickeln, d. h. es gibt Konstanten c_i, so daß

$$(11)\qquad \begin{cases} f(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots \\ g(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots \end{cases}$$

ist.

3. Die Gleichung der Turbulenztheorie. In der Theorie der turbulenten Flüssigkeitsbewegung tritt das folgende Randwertproblem vierter Ordnung auf: Es ist eine Funktion $y(x)$ zu suchen, die der Differentialgleichung

$$(12)\qquad \begin{cases} y^{\mathrm{IV}} - y''\left[2\alpha^2 + \lambda(\beta + 6\alpha x(x-1))\right] \\ \qquad + y\left[\alpha^4 + \alpha^2\lambda(\beta + 6\alpha x(x-1)) + 12\alpha\lambda\right] = 0, \end{cases}$$

[1]) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. XVI. Leipzig und Berlin 1912.

mit α, β, λ als Konstanten, und den Randbedingungen

$$(13) \qquad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

genügt. Die Aufgabe entsteht dadurch, daß man sich über eine gleichförmige, geradlinige Parallelbewegung mit der Geschwindigkeit $v = -6cx(x-1)$, also der Stromfunktion $\psi = -cx^2(2x-3)$, eine Zusatzströmung mit der Stromfunktion ψ_1 überlagert denkt und für ψ_1 den Ansatz $\psi_1 = y(x)e^{(\alpha z + \beta c t)i}$ (x, z Raumkoordinaten) macht. Der in (12) auftretende Parameter λ ist der mit i multiplizierte Quotient der mittleren Geschwindigkeit c durch die Zähigkeitszahl der Flüssigkeit. Die für die Turbulenztheorie entscheidende Frage, ob es Lösungen von (12), (13) mit reellen α, β und imaginärem λ gibt, ist noch nicht beantwortet.

Zu einer etwas einfacheren Formulierung, die aber physikalisch vermutlich ebenso weittragend sein dürfte und die auf ein System zweier simultaner Gleichungen zweiter Ordnung führt, gelangt man, wenn man die Grundbewegung als linear voraussetzt, also $v = cx$, $\psi = cx^2/2$ annimmt. Die Gl. (12) vereinfacht sich dann zu

$$(14) \qquad y^{\mathrm{IV}} - y''[2\alpha^2 + \lambda(\beta - \alpha x)] + \alpha^2 y[\alpha^2 + \lambda(\beta - \alpha x)] = 0.$$

Man kann jetzt in zwei Gleichungen zweiter Ordnung spalten:

$$(15) \qquad z = y'' - \alpha^2 y, \quad z'' - \alpha^2 z + \lambda z(\alpha x - \beta) = 0,$$

von denen die erste den Parameter λ nicht enthält und sich durch Quadraturen integrieren läßt:

$$(16) \qquad y = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{\alpha x}\int_0^x e^{-\alpha\xi} z\,d\xi - e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha\xi} z\,d\xi\right].$$

Dabei ist auf die beiden Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ schon Rücksicht genommen. Um auch die beiden anderen zu befriedigen, muß man offenbar dafür sorgen, daß die beiden in (16) auftretenden Integrale, von 0 bis 1 erstreckt, Null geben. Demnach entsteht das neuartige Randwertproblem, die zweite der Gl. (15), eine linear-homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für z, unter den Nebenbedingungen

$$(17) \qquad \int_0^1 e^{\alpha x} z(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 e^{-\alpha x} z(x)\,dx = 0$$

zu integrieren, bzw. die Eigenwerte dieses Ansatzes aufzusuchen. Wir wollen zeigen, daß das in VII, § 2, 2 erklärte Verfahren der „Grundlösung" auch hier anwendbar ist.

Die allgemeine Form der jetzt vorliegenden Aufgabe ist offenbar die, das Integral einer Gleichung

$$\frac{d}{dx}[r(x)z'] + [\lambda p(x) + q(x)]z = 0 \tag{18}$$

zu finden, das zwei Bedingungen

$$\int_0^1 A(x)z\,dx = 0, \qquad \int_0^1 B(x)z\,dx = 0 \tag{18'}$$

genügt. Definieren wir wieder $U(s, x, \lambda)$ als jene Lösung von (18), die an der Stelle $x = s$ den Wert 0 und die Ableitung $1/r$ besitzt, so kann man wie in VII, § 2, 2 diese „Grundlösung" U in eine Potenzreihe nach λ entwickeln:

$$U(s, x, \lambda) = k_0(s, x) + \lambda k_1(s, x) + \lambda^2 k_2(s, x) + \cdots, \tag{19}$$

wobei die k_n der Rekursionsformel

$$\frac{d}{dx}[r(x)k_n'] + q(x)k_n + p(x)k_{n-1} = 0 \tag{19'}$$

genügen und mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen für $x = s$ durch Quadraturen dargestellt werden können (vgl. VII, § 2). Nun behaupten wir: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (18), (18') ist das Bestehen von

$$\int_0^1\int_0^1 A(x)B(s)U(s, x, \lambda)\,dx\,ds = 0. \tag{20}$$

Dabei ist nur vorausgesetzt, daß die gesuchte Lösung nicht zugleich die erste Randwertaufgabe löst, d. h. daß $U(0, 1, \lambda) \neq 0$ ist.

Um dies einzusehen, beweisen wir zunächst folgende Identität zwischen den Grundlösungen ein und derselben Differentialgleichung: Es gilt für jedes λ (das wir in der Bezeichnung der Funktion hinfort weglassen), wenn x, s irgend zwei Werte des Intervalls 0, 1 sind:

$$U(0, 1) . U(s, x) = U(0, s)U(1, x) - U(1, s)U(0, x). \tag{21}$$

Dies folgt aus der „schiefen Symmetrie" von U, nämlich aus

$$U(s, x) = -U(x, s), \tag{22}$$

wenn man bedenkt, daß $U(0, x)$ und $U(1, x)$ wegen der Voraussetzung $U(0, 1) \neq 0$ ein Fundamentalsystem bilden, also $U(s, x)$ sich in der Form $C_1 U(1, x) + C_2 U(0, x)$ darstellen lassen muß. Setzt man hier einmal $x = 0$ und einmal $x = 1$, so hat man $U(s, 0) = C_1 U(1, 0)$ und $U(s, 1) = C_2 U(0, 1)$, womit unter Heranziehung von (22) sich tatsächlich (21) ergibt. Es bleibt also nur (22) zu beweisen. Denkt man sich die Differentialgleichung (18) einmal für

$U(0, x)$ und einmal für $U(1, x)$ angeschrieben, multipliziert sie in der ersten Gestalt mit $U(1, x)$, in der zweiten mit $U(0, x)$, subtrahiert und integriert, so erhält man

$$(23) \qquad r(x)[U(0, x) . U'(1, x) - U(1, x) . U'(0, x)] = \text{konst.}$$

Setzt man hier für x einmal 0 und einmal 1 und beachtet, daß U' für $x = s$ den Wert $1/r$ hat, so folgt zunächst $-U(1, 0) = U(0, 1)$ und daraus, da 0, 1 bei dieser Betrachtung durch jedes andere Wertepaar ersetzt werden kann, die Gl. (22).

Aus der Identität (21) ergibt sich sofort unsere Behauptung (20). Denn die gesuchte Lösung des Problems (18), (18') muß sich auch in der Gestalt $c_1 U(0, x) + c_2 U(1, x)$ darstellen lassen, wobei die c den Gleichungen

$$(24) \qquad \begin{cases} c_1 \int_0^1 A(x) U(0, x) dx + c_2 \int_0^1 A(x) U(1, x) dx = 0, \\ c_1 \int_0^1 B(s) U(0, s) ds + c_2 \int_0^1 B(s) U(1, s) ds = 0 \end{cases}$$

genügen. Die Determinante dieses Gleichungssystems kann als Doppelintegral geschrieben werden:

$$\int_0^1 \int_0^1 A(x) B(s) [U(0, x) U(1, s) - U(1, x) U(0, s)] dx ds,$$

das zufolge (21) bis auf den Faktor $-U(0, 1)$ mit der linken Seite von (20) übereinstimmt. Da wir aber den Fall ausgeschlossen haben, daß die Lösung von (18), (18') auch die erste Randwertaufgabe löst, d. h. $U(0, 1) \neq 0$ voraussetzen, so ist die Behauptung erwiesen. Die transzendente Gleichung, der die Eigenwerte λ genügen müssen, ist in Form einer Potenzreihe in λ sofort zu finden, indem man den Ausdruck (19) mit $A(x) B(s)$ multipliziert und gliedweise integriert:

$$K_0 + K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \cdots = 0 \quad \text{mit} \quad K_n = \int_0^1 \int_0^1 k_n(s, x) A(x) B(s) dx ds.$$

In dem besonderen Falle des linearen Turbulenzproblems (15) haben wir $r = 1$, $q = -\alpha^2$, $p = -(\alpha x + \beta)$. Der erste Koeffizient k_0 der Entwicklung (19) ist die Grundlösung für $\lambda = 0$, das ist hier $\frac{1}{\alpha} \operatorname{Sin} \alpha (x - s)$. Die Quadraturen, die zu den weiteren k_n führen, und die Quadraturen, die dann die K_n liefern, lassen sich durchgehend in geschlossener Form ausführen. Der allgemeine Koeffizient hat die Form

$$K_n = P_n \operatorname{Cof} 2\alpha + Q_n \operatorname{Sin} 2\alpha + R_n,$$

wobei die P_n, Q_n, R_n gewisse durch Rekursion zu bestimmende Polynome vom $(2n+1)$-ten Grade in α, β sind. Die Diskussion der Gleichung hat ergeben, daß bei reellen α, β nur reelle Wurzeln λ auftreten können, daß man also nicht zu der erwarteten „kritischen Geschwindigkeit" gelangt (der ein rein imaginäres λ entsprechen würde).

§ 3. Integrationsprobleme anderer Art

Es kann vorkommen, daß die bei der Integration einer Differentialgleichung n-ter Ordnung zur Verfügung stehenden n Integrationskonstanten nicht durch n Randbedingungen im bisherigen Sinne, sondern durch n Bedingungen anderer Art festgelegt werden. Sind mehr als n solcher Bedingungen vorgeschrieben, so wird das Problem im allgemeinen nur lösbar sein, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung gewissen aus diesen Bedingungen folgenden Relationen genügen. Wir geben im folgenden Beispiele für Vorkommnisse dieser Art.

1. Die Kettenlinie. Eine biegsame, unausdehnbare, nur der Einwirkung der Schwere unterworfene Kette der Länge l ist an ihren beiden Enden in den Punkten $x = x_0$, $y = y_0$ und $x = x_1$, $y = y_1$ aufgehängt. Dabei seien x, y rechtwinklige Cartesische Koordinaten mit horizontaler x- und vertikaler y-Achse (Fig. 47).

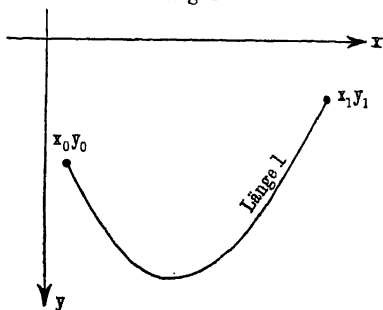



Fig. 47

Die Gleichgewichtsgestalt der Kette wird bestimmt durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \lambda \sqrt{1 + y'^2}, \tag{1}$$

wobei λ der Quotient aus dem Gewicht eines Seilstücks der Länge l und der von vornherein nicht bekannten Horizontalkomponente der Seilspannung ist. (Daß diese konstant ist, erkennt man daraus, daß das Gleichgewicht in horizontaler Richtung für jedes Stück des Seiles bestehen muß. Die Differentialgleichung drückt aus, daß Seilspannung mal Krümmung gleich der in die Kurvennormale fallenden Schwerekomponente ist.) Für y bestehen nicht zwei, sondern drei Bedingungen:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1, \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l. \tag{3}$$

(2) folgt nämlich aus der Aufhängung der Kette, (3) drückt aus, daß die Länge der Kette l ist. Diese drei Bedingungen werden uns gestatten, die Konstante λ und die Lösung $y(x)$ des Problems eindeutig zu bestimmen.

Da $y'' = \frac{dy'}{dx}$ ist, so folgt aus (1)

$$\text{(4)} \qquad \frac{dx}{dy'} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad x = \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, y' + c_1,$$

wobei c_1 eine Integrationskonstante ist. Durch Umkehrung von (4) erhalten wir

$$\text{(5)} \qquad y' = \mathfrak{Sin}\,\lambda(x - c_1), \qquad y = \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda(x - c_1) + c_2,$$

wo c_2 eine weitere Integrationskonstante ist. Nun sind c_1, c_2, λ so zu bestimmen, daß (2) und (3) erfüllt werden. (2) liefert uns

$$\text{(2')} \qquad \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda(x_0 - c_1) + c_2 = y_0, \qquad \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda(x_1 - c_1) + c_2 = y_1,$$

(3) liefert unter Benutzung der ersten Gl. (5)

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2\,\lambda(x - c_1)}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{Cof}\,\lambda(x - c_1)\,dx$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[\mathfrak{Sin}\,\lambda(x_1 - c_1) - \mathfrak{Sin}\,\lambda(x_0 - c_1)\right] = l$$

oder

$$\text{(3')} \qquad \frac{2}{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda(x_1 + x_0 - 2c_1)}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\frac{(x_1 - x_0)}{2} = l.$$

Wir wollen zunächst λ berechnen. Aus (2') folgt durch Subtraktion:

$$\text{(2'')} \qquad \frac{2}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\frac{(x_1 + x_0 - 2c_1)}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\frac{(x_1 - x_0)}{2} = y_1 - y_0.$$

Aus (3') und (2'') folgt durch Quadrieren und Subtrahieren:

$$\frac{4}{\lambda^2}\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\lambda(x_1 - x_0)}{2} = l^2 - (y_1 - y_0)^2;$$

hierfür können wir schreiben:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda(x_1 - x_0)}{2}}{\lambda\frac{x_1 - x_0}{2}} = \frac{\sqrt{l^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0}.$$

Setzen wir nun

$$(7) \qquad \lambda \frac{x_1 - x_0}{2} = \varLambda \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{l^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0} = \alpha$$

so geht (6) über in die Gleichung

$$(8) \qquad \mathfrak{Sin}\, \varLambda = \alpha \varLambda.$$

Nun ist nach (7) $\alpha \geqq 1$, denn die Seillänge muß mindestens gleich dem Abstand der Punkte x_0, y_0 und x_1, y_1 sein. Hieraus folgt, wie man sich leicht überlegt, daß die Kurve $y = \mathfrak{Sin}\, x$ die Gerade $y = \alpha x$ außer im Nullpunkt noch in genau einem Punkte schneidet, d. h. (8) hat außer $\varLambda = 0$ genau eine Wurzel $\varLambda$, also hat auch (6) außer $\lambda = 0$ genau eine Wurzel λ. Da die Wurzel $\lambda = 0$ für unser Problem nicht in Betracht kommt, so ist der Wert von λ jetzt also eindeutig bestimmt. Durch diesen λ-Wert sind nun aber auch c_1 und c_2, also die Lösung y eindeutig bestimmt. In der Tat ist nach (2″)

$$(9) \qquad \mathfrak{Sin}\, \lambda \frac{(x_1 + x_0 - 2c_1)}{2} = \frac{\lambda (y_1 - y_0)}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, \lambda \frac{x_1 - x_0}{2}}.$$

Da der $\mathfrak{Sin}$ monoton von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, wenn sein Argument von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, so wird die Gl. (9) durch genau einen Wert c_1 erfüllt; c_2 ergibt sich nun eindeutig aus jeder der Gl. (2′).

2. Der in seiner Achsrichtung belastete Stab. In VII, § 1, 3 haben wir eines der typischen Randwertprobleme linearer Differentialgleichungen in dem Beispiel des elastischen Stabes, der durch zwei gleich große, entgegengerichtete Kräfte belastet wird (Fig. 48), kennengelernt. Dabei war der lineare Charakter des Problems nur dadurch entstanden, daß wir die Ausbiegungen des Stabes als klein ansahen und demgemäß für die Krümmung y'' setzten. Geben wir aber jetzt diese Vernachlässigung auf und führen für die Krümmung ihren richtigen Wert ein, so ändert sich nicht nur die frühere Differentialgleichung VII, § 1, (9) in

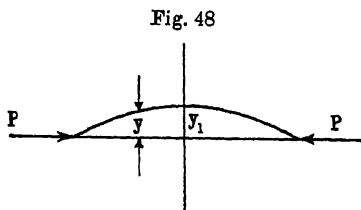



Fig. 48

$$(10) \qquad \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3} + \lambda y = 0,$$

sondern das ganze Problem und der Charakter der Lösung werden gänzlich umgewandelt. Von den beiden Integrationsbedingungen $y(0) = 0$ und $y(l) = 0$ können wir jetzt nur die erste anschreiben, da die Abszisse

des zweiten Kraftangriffspunktes nicht mehr mit der Stablänge l identifiziert werden darf. An Stelle der früheren zweiten Bedingung $x(l) = 0$ tritt jetzt die neue, daß die Bogenlänge zwischen zwei Nullstellen von y gleich l sein muß.

Ein erstes Integral von (10) ist sofort zu erhalten:

$$-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda}{2} y^2 + c = 0, \tag{11}$$

wie man durch Differentiation von (11) nach y erkennt. Die Integrationskonstante c ist bis aufs Vorzeichen gleich dem cos des (unbekannten) Tangentenwinkels τ_0 an den Stellen $y = 0$. Löst man (11) nach y' auf und setzt dafür dy/dx, so bekommt man für dx ein elliptisches Differential:

$$dx = \frac{\frac{\lambda}{2} y^2 + c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2} y^2 + c\right)^2}} dy. \tag{12}$$

Bei der Ausführung der Quadratur tritt keine neue Konstante auf, da wir $y = 0$ für $x = 0$ haben. Um die Längenbedingung einzuführen, beachten wir, daß nach (11) und (12) gilt:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2} y^2 + c\right)^2}. \tag{13}$$

Demnach ist auch die Bogenlänge zwischen zwei Punkten mit vorgegebenen y-Werten durch ein elliptisches Integral ausdrückbar. Eine Schwierigkeit entsteht daraus, daß y an den beiden Stellen, zwischen denen die Länge l liegt, den Wert Null hat. Machen wir nun zunächst die Annahme, die Biegungslinie bestehe, wie in Fig. 48 angedeutet, aus zwei symmetrischen Teilen ohne Nullstellen im Innern. In der Mitte hat wegen $y' = 0$ die Ordinate nach (11) den Wert

$$y_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}(1 - c)}, \tag{14}$$

und das Bogenintegral von 0 bis y_1 muß den Wert $l/2$ besitzen. Führt man $z = y : y_1$ als neue Veränderliche ein, so erhält man nach einfacher Umformung aus (13):

$$\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{1+k^2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2 z^2)}} \quad \text{mit } k^2 = \frac{1-c}{1+c} = \operatorname{tg}^2 \frac{\tau_0}{2} \tag{15}$$

bzw. dem Reziproken davon. Hier steht auf der rechten Seite ein vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung, allerdings mit

imaginärem Modul. Die Gl. (15) muß dazu benutzt werden, um k (und damit c) aus l und λ zu berechnen. Hat man c, so liefert (14) unmittelbar die maximale Ausbiegung y_1 und (12) nach Ausführung der Quadratur die Stabform.

Um einen Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen, die bei **nicht allzu starker Ausbiegung** des Stabes vorliegen, entwickeln wir die rechte Seite von (15) nach Potenzen von k^2, das jetzt kleiner als 1 vorausgesetzt werden darf:

$$(15') \quad \begin{cases} \dfrac{l}{2} = \sqrt{\dfrac{1+k^2}{\lambda}} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left[1 - \dfrac{k^2 z^2}{2} + \cdots\right] \\ \quad = \sqrt{\dfrac{1+k^2}{\lambda}}\left[\arcsin z - \dfrac{k^2}{2}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin z - \dfrac{z}{2}\sqrt{1-z^2}\right) + \cdots\right]_0^1 \\ \quad = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1+k^2}{\lambda}}\left(1 - \dfrac{k^2}{4}\right) + \cdots. \end{cases}$$

Beachtet man die Kleinheit von k^2 und vernachlässigt konsequent die Glieder höherer als zweiter Ordnung, so gibt die Auflösung nach k^2:

$$(16) \qquad k^2 = 2\left(\frac{\lambda l^2}{\pi^2} - 1\right),$$

und Einsetzen in (14) liefert als erste Näherung für y_1:

$$(17) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{8}{\lambda}\left(\frac{\lambda l^2}{\pi^2} - 1\right)}.$$

Dieses Resultat besagt: Eine Ausbiegung des Stabes ist nur vorhanden, wenn $\sqrt{\lambda}$ **größer** ist als π/l, und von hier an wächst y_1 etwa so, wie Fig. 49 es andeutet. Das Ergebnis in VII, § 1, **3** war ein völlig anderes; denn dort hatten wir gefunden: Ausbiegungen sind nur möglich, wenn $\sqrt{\lambda}$ einen der Werte π/l, $2\pi/l \ldots$ annimmt, und die Werte von y_1 bleiben dabei unbestimmt (weil die y nur bis auf einen Faktor bestimmt waren). Wie stimmt das zusammen?

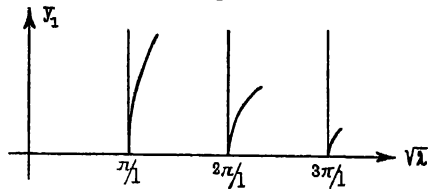
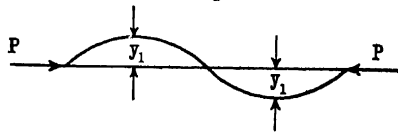
Zunächst finden wir die höheren Eigenwerte wieder, wenn wir bedenken, daß die Biegungslinie auch beispielsweise die Gestalt der in Fig. 50 angedeuteten Kurve haben kann, so daß im Bereich $y = 0$ bis $y = y_1$ nur die Bogenlänge $l/4$, allgemein $l/2n$, durchlaufen wird. Setzen wir dies in (15) ein, so erhalten wir als mögliche Ausbiegungsmaxima die Größen

$$(17') \qquad y_n = \sqrt{\frac{8}{\lambda}\left(\frac{\lambda l^2}{n^2\pi^2} - 1\right)} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2 \ldots,$$

wobei y_2 erst von $\sqrt{\lambda} = 2\pi/l$ an reell ist usf. Die Biegungspfeile als Funktion von λ (das, wie wir wissen, der Belastung P proportional ist) zeigen also das in Fig. 49 angedeutete Bild, das eine Kurve mit unendlich vielen Ästen darstellt. Jetzt wird auch der Zusammenhang mit dem früheren Ergebnis verständlich: Wenn man durch Unterdrückung aller höheren Potenzen von y, y' ... den Ansatz zu einem linearen macht, kann man von den Ästen der y/λ-Kurven höchstens die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit der $y = 0$-Achse erhalten. Diese Tangenten sind aber vertikal, wie man sofort aus (17′) entnimmt. Also mußte das Ergebnis des linearen Ansatzes lauten

Fig. 49

Fig. 50

$$\lambda = \pi^2/l^2, \quad \lambda = 4\pi^2/l^2 \quad \text{usf.}$$

Wir lernen jetzt erst den eigentlichen Sinn dieser Lösung kennen, der dahin geht, daß verschwindend kleine Ausbiegungen nur bei λ-Werten möglich sind, die die Eigenwerte wenig überschreiten. Eine besondere Rolle spielt noch der kleinste Eigenwert; er gibt die Grenze für λ, unterhalb deren eine Ausbiegung überhaupt unmöglich ist. Es ist bemerkenswert, daß man diese Grenze genau, nicht nur angenähert, aus dem linearen Randwertproblem erhält.

3. Lösung mit Hilfe von Näherungsfolgen. Man kann auch einen etwas anderen Weg einschlagen, um das im vorstehenden dargestellte Ergebnis zu gewinnen, einen Weg, der bei Aufsuchung der genaueren Lösung die Kenntnis der durch den linearen Ansatz bestimmten ersten Näherung benutzt und so den Zusammenhang besser hervortreten läßt. Führen wir zunächst die Bogenlänge s als unabhängige Variable ein, nennen den Tangentenwinkel τ und bezeichnen mit Akzenten die Ableitungen nach s, so ist die Krümmung, die links in (10) steht, gleich τ', und da $y' = \sin\tau$, $y'' = \cos\tau \,.\, \tau'$ ist, so lautet (10) mit $\cos\tau$ erweitert:

$$y'' + \lambda\cos\tau \,.\, y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0. \tag{18}$$

Dem linearen Ansatz von VII, § 1, 3 entspricht es, $\cos\tau = 1$ zu setzen. Eine Lösung von (18) ist dann, wie wir wissen,

$$y_1 = c\sin\varkappa_1 s \quad \text{mit} \quad \varkappa_1 = \sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi}{l}. \tag{19}$$

Wir wollen jetzt eine genauere Lösung für einen $\varkappa = \sqrt{\lambda}$-Wert suchen, der nahe bei $\varkappa_1$ liegt. Zu diesem Zwecke setzen wir in (18) für $\cos\tau$ die Abschätzung

$$\cos\tau \sim 1 - \frac{\tau^2}{2} \sim 1 - \frac{\sin^2\tau}{2} = 1 - \frac{y'^2}{2} \sim 1 - \frac{c^2}{2}\varkappa_1^2 \cos^2 \varkappa_1 s.$$

Auf diese Weise entsteht aus (18) mit $\lambda = \varkappa^2$ zunächst:

$$y'' + \varkappa^2 y = \frac{c^2}{2}\varkappa^2 \varkappa_1^2 y \cos^2 \varkappa_1 s. \tag{20}$$

Was rechts steht, ist das Korrekturglied gegenüber dem linearen Ansatz $y'' + \varkappa^2 y = 0$, und in diesem Gliede führen wir für y den Wert der ersten Näherung aus (19) ein, wie wir es schon bei der Abschätzung von τ getan haben, und ersetzen überdies — was nebensächlich ist — $\varkappa^2$ durch $\varkappa_1^2$. Indem wir dann noch von der geometrischen Identität $4 \sin\alpha \cos^2\alpha = \sin\alpha + \sin 3\alpha$ Gebrauch machen, entsteht aus (20) die Gleichung

$$y'' + \varkappa^2 y = \frac{c^3}{8}\varkappa_1^4 (\sin\varkappa_1 s + \sin 3\varkappa_1 s), \tag{20'}$$

deren den Randbedingungen genügendes Integral die Form

$$y_2 = c \sin\varkappa_1 s + c_1 \sin 3\varkappa_1 s \tag{21}$$

besitzt. Einsetzen von (21) in (20′) liefert zunächst

$$c^2 = \frac{8(\varkappa^2 - \varkappa_1^2)}{\varkappa_1^4} = \frac{8 l^2}{\pi^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right) = \frac{8}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda l^2}{\pi^2} - 1\right) \tag{22}$$

und, wenn man auch den Koeffizienten von $\sin 3\varkappa_1 s$ berücksichtigt:

$$c_1 = -\frac{\varkappa_1^2}{64} c^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right) c. \tag{23}$$

Schon mit (22) ist im wesentlichen dasselbe Resultat erreicht, das oben in (17) zum Ausdruck kam. Denn in c haben wir einen Näherungswert für das oben mit y_1 bezeichnete Ausbiegungsmaximum. Die Ausdrücke (17) und (22) unterscheiden sich in der Tat, da λ nahezu gleich λ_1 ist, nur um Glieder höherer Ordnung voneinander. Vor allem besitzen wir aber jetzt in (21) mit den Koeffizientenwerten aus (22) und (23) eine übersichtliche und gut brauchbare zweite Näherungslösung für die gesuchte Biegungslinie. Man sieht, daß über die ursprüngliche sinus-Funktion sich jetzt ein sinus mit der Drittelperiode lagert, wobei das Amplitudenverhältnis von der Größenordnung $1 - \lambda/\lambda_1$ ist.

Das Verfahren kann nun fortgesetzt werden, indem man wieder auf (18) zurückgreift, $\cos\tau$ bis zu höheren Gliedern entwickelt, für y den Wert (21) einsetzt und natürlich auch in $\lambda - \lambda_1$ höhere als die

ersten Potenzen berücksichtigt. Auf diese Weise erhält man schließlich eine Fourierentwicklung für y als Funktion von s mit der Periode π/l, eine anschaulichere und dem Problem besser angepaßte Lösung als die Potenzentwicklung, zu der die frühere Betrachtungsweise führte.

4. Gedämpfte Schwingungen. Die in VII, § 1 dargelegten Eigenwert- und Entwicklungsprobleme waren, wie dort gezeigt wurde, aus der mathematischen Behandlung harmonischer (ungedämpfter) Schwingungen hervorgegangen. Wenn die ursprüngliche partielle Differentialgleichung VII, § 1, (10) noch ein der Geschwindigkeit $\partial y/\partial t$ proportionales Glied enthält, ändert sich die weitere Überlegung bedeutend. Man gelangt zwar wieder, wenn man die Abhängigkeit von der Zeit als Exponentialfunktion einführt, zu einer gewöhnlichen linear-homogenen Differentialgleichung mit Parameter; aber der Parameter tritt nicht nur linear, sondern in erster und zweiter Ordnung in der Gleichung auf. Wir geben im folgenden kurz den Gedankengang und die Ergebnisse einer Untersuchung an, die von dem früh verstorbenen O. Faber herrührt [1].

Bezeichnet etwa $z(x, t)$ die Stromstärke, die in einem linearen Leiter zur Zeit t an der Stelle x herrscht, $1/r$ die Kapazität, p die Selbstinduktion und w den Ohmschen Widerstand, so lautet die sogenannte „Telegraphengleichung“

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + w\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{24}$$

Dieselbe Gleichung beherrscht auch die mechanischen Schwingungen eines Seiles, wenn p die spezifische Masse, $1/r$ die Spannung und w einen Dämpfungsfaktor bezeichnet. Wir wollen $1/r$, p und w als stetige, nicht verschwindende, positive Funktionen von x voraussetzen, die überdies zweimal stetig differenzierbar seien. Führt man den Ansatz

$$z(x, t) = e^{\varkappa t}\, y(x) \tag{25}$$

in (24) ein, so geht die partielle Differentialgleichung in die gewöhnliche

$$\frac{d}{dx}[r(x)\, y'] = [\varkappa^2 p(x) + \varkappa w(x)]\, y \tag{26}$$

über. Als Randbedingungen treten zu (24) hinzu: Kenntnis von z für $t = 0$ an allen Stellen und für alle Zeiten an zwei Endpunkten, etwa:

$$z(x, 0) = F(x), \quad z(0, t) = 0, \quad z(1, t) = 0, \tag{27}$$

wenn wir uns auf den homogenen Fall beschränken. Für den Zusammenhang zwischen homogenem und nicht-homogenem Problem gilt

---

[1] O. Faber, Inaug.-Dissertation, Straßburg 1914; Archiv d. Mathem. u. Phys. (3) 22 (1914), S. 290.

das in VII, § 1 allgemein Gesagte. Auf (25) bzw. (26) angewendet. liefert (27) die Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{28}$$

für (26) und stellt überdies die Aufgabe, die Funktion $F(x)$ nach den Lösungen von (26), (28), den „Eigenfunktionen" dieses neuen Randwertproblems, zu entwickeln. Das Verfahren, das zunächst zur Aufstellung der transzendenten Gleichung für die Eigenwerte, sodann zum Beweis des Entwicklungssatzes führt, ist das in VII, § 2, 2 verwendete, das von einer „Grundlösung" $U(s, x, \varkappa)$ von (26) ausgeht. Man definiert U ähnlich wie früher als die für $x = s$ verschwindende Lösung von (26), die überdies für $x = s$ die Ableitung $1/r$ besitzt. Dann kann man U als Potenzreihe in $\varkappa$ ansetzen:

$$U(s, x, \varkappa) = k_0(s, x) + \varkappa k_1(s, x) + \varkappa^2 k_2(s, x) + \cdots, \tag{29}$$

wobei die k_n der Rekursion

$$\frac{d}{dx}(r k'_{n+1}) = p k_{n-1} + w k_n, \quad k_n(0) = k'_n(0) = 0; \quad n = 1, 2 \ldots \tag{30}$$

genügen. Unter den oben eingeführten Voraussetzungen (die natürlich noch mannigfach erweitert werden können) läßt sich die gleichmäßige Konvergenz von (29) nachweisen. Demnach hat man in $U(0, 1, \varkappa) = 0$ eine Gleichung für $\varkappa$, deren Wurzeln die gesuchten Eigenwerte sind. Diese sind naturgemäß jetzt im allgemeinen komplex und liegen, wie sich zeigen läßt, bis auf eine endliche Anzahl, deren absoluter Betrag das Maximum von w/p nicht überschreitet, in dem Teil der komplexen $\varkappa$-Ebene, der von den Geraden mit den Abszissen $-[w/2p]_{\max}$ und $-[w/2p]_{\min}$ eingeschlossen wird. Physikalisch bedeutet das, daß alle höheren Eigenschwingungen gedämpft verlaufen, mit einem logarithmischen Dekrement, das in den angegebenen Grenzen liegt. Hat man einmal Einblick in die Existenz und Verteilung der Eigenwerte erhalten, so bietet die Übertragung des in VII, § 4 ausgeführten Beweisganges für den Entwicklungssatz keine wesentlichen Schwierigkeiten. Man findet, was die physikalische Problemstellung von vornherein erwarten ließ, daß sich „willkürliche" Funktionen $F(x)$ in ähnlichem Umfang wie im Falle der harmonischen Schwingungen auch nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems (26), (28) entwickeln lassen, also nach den Funktionen, die die durch Dämpfung beeinflußten Schwingungsformen darstellen.

III. Abschnitt

Integralgleichungen und Potential

Elftes Kapitel

Übersicht der Probleme und Resultate

§ 1. Drei Arten von Aufgaben

1. Vorbemerkung. Zahlreiche Aufgaben der Mechanik und Physik lassen sich auf die Form sogenannter Integralgleichungen bringen, in denen die gesuchte Funktion im Integranden eines bestimmten (oder auch unbestimmten) Integrals auftritt. Wenn auch in den meisten Fällen dieselbe Funktion als Lösung eines Randwertproblems einer Differentialgleichung dargestellt werden kann, so gewinnt man aus der Betrachtung der Integralgleichung doch verschiedene Vorteile. Vor allem entfällt die beim Differentialgleichungsproblem störende Spaltung in Hauptgleichung und Nebenbedingungen: man umfaßt mit der Integralgleichung von vornherein alle Bestimmungsstücke der Aufgabe. Weiter hat man nicht Probleme verschieden hoher Ordnung (mit jedesmal anderer Zahl von Nebenbedingungen) gesondert zu untersuchen, sondern in der Hauptsache nur eine Gattung von Integralgleichungen. Ferner verschwindet bis zu einem gewissen Grade der Unterschied zwischen Problemen mit einer und solchen mit mehreren unabhängig Veränderlichen, der sonst zu den so weit auseinanderliegenden Theorien der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen führt. Endlich lassen sich in vielen Fällen auch Aufgaben mit mehreren abhängigen Variablen, die sonst zu Systemen simultaner Differentialgleichungen führen, mittels einer einzigen Integralgleichung behandeln. Man besitzt somit in den Integralgleichungen ein besonders geeignetes Werkzeug zur Erledigung allgemeinerer analytischer Fragen, wie sie sich z. B. bei der Untersuchung schwingungsfähiger Systeme aufdrängen. Die elastische Saite, der biegungs- oder torsionssteife Stab, die dünne Membran und die elastische Platte, alle diese Aufgaben haben unverkennbar etwas Gemeinsames, das nicht genügend zur Geltung kommt, wenn man die Untersuchung einmal

an den gewöhnlichen Differentialgleichungen erst zweiter, dann vierter Ordnung, endlich an den partiellen Gleichungen beider Ordnungen vornehmen muß.

Für das Verständnis der Integralgleichungsprobleme ist es nützlich, dem hier auftretenden — im übrigen aus den Elementen der Integralrechnung bekannten — Zeichen

$$\int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

eines bestimmten Integrals über das Produkt einer Funktion von zwei Variablen $K(x, \xi)$ und einer Funktion einer Variablen $y(\xi)$ eine besondere Auffassung zu leihen. Bei der Integration wird natürlich x als konstanter Parameter betrachtet. Denken wir uns zunächst einen Vektor $\mathfrak{y}$ mit den Komponenten y_1, y_2, y_3 gegeben und dazu eine Gruppe von neun Zahlen $K_{11}, K_{12} \ldots K_{33}$, so kann man daraus einen Vektor $\mathfrak{y}'$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned} y'_1 &= K_{11}\, y_1 + K_{12}\, y_2 + K_{13}\, y_3, \\ y'_2 &= K_{21}\, y_1 + K_{22}\, y_2 + K_{23}\, y_3, \\ y'_3 &= K_{31}\, y_1 + K_{32}\, y_2 + K_{33}\, y_3 \end{aligned}$$

ableiten. Die neuen Vektorkomponenten schreiben sich viel kürzer in der Form

$$y'_x = \sum_{\xi=1}^{3} K_{x\xi}\, y \,, \qquad x = 1, 2, 3, \tag{2}$$

die schon eine deutliche Analogie zu (1) aufweist. Bekanntlich nennt man eine derartige Ableitung eines neuen Vektors aus einem gegebenen eine *lineare Transformation*, und es hat keine Schwierigkeit, diese Definition und diese Vorstellung auf Vektoren in mehr als dreidimensionalen Räumen auszudehnen. (Vgl. a. II, § 2, 2.) Man muß nur eine Matrix von n^2 in einem Quadrat angeordneten Zahlen

$$\left\{\begin{array}{l} K_{11}, K_{12} \ldots K_{1n}, \\ K_{21}, K_{22} \ldots K_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K_{n1}, K_{n2} \ldots K_{nn}, \end{array}\right. \tag{3}$$

durch die eine lineare Transformation in der Form

$$y'_x = \sum_{\xi=1}^{n} K_{x\xi}\, y_\xi, \qquad x = 1, 2 \ldots n \tag{4}$$

bestimmt wird, als gegeben ansehen. Es ist dann ein naheliegender Schritt, auch das Integral (1) in dieser Weise als *Operator* aufzufassen, durch den einer beliebigen Funktion y eine neue Funktion y'

zugeordnet wird. Ist der „Kern“ $K(x, \xi)$ und natürlich das Integrationsgebiet a, b gegeben, so wird durch (1) jede Funktion $y(\xi)$, für die sich das Integral überhaupt bilden läßt, in eine neue Funktion

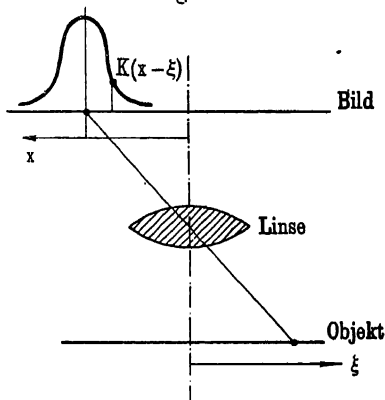
$$y'(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

„transformiert“. Man sagt daher, K und a, b bestimmten eine lineare Funktionaloperation. Ihr linearer Charakter kommt darin zum Ausdruck, daß sie, auf die lineare Kombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$ angewandt, die lineare Kombination der einzelnen Transformierten $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_k y_k'$ ergibt, wie man durch Einsetzen dieses y-Wertes sofort erkennt. (Vgl. a. II, § 1, **1.**)

In den verschiedenen Ansätzen und Durchführungen physikalischer Probleme tritt die hier angedeutete Auffassung des Integrals (1) als Operator bald mehr, bald weniger unmittelbar in Erscheinung. — Wir werden zunächst drei grundsätzlich verschiedene Formen kennenlernen, in denen die Integralgleichungen in der Mechanik und Physik eine Rolle spielen.

2. Abbildungs- (Umkehr-) Probleme. Die Bedeutung des Integrals (1) als lineare Transformation der Funktion $y(\xi)$ kommt am unmittelbarsten zum Ausdruck in einer Reihe von Aufgaben, für die wir zunächst die der optischen Abbildung als Beispiel nehmen wollen [1]).

Fig. 51

Bekanntlich lehrt die geometrische Optik, daß durch ein System von Linsen, wie es etwa ein Fernrohr oder ein Mikroskop aufweist, jedem selbstleuchtenden oder beleuchteten „Objekt“ derart ein „Bild“ zugeordnet wird, daß Objekt- und Bildpunkte einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, Gegenstand und Bild beständen je aus einer einfachen, senkrecht zur optischen Achse stehenden geraden Linie (Fig. 51), deren Punkte mit den Abszissen ξ bzw. x verschiedene Helligkeiten aufweisen, und die geometrische Optik führe zu dem Schluß, es seien Bild und Gegenstand einander ähnlich; es gehe also das Bild aus dem Objekt dadurch

[1]) Nach L. Mandelstam, Festschrift für H. Weber (Leipzig 1912), S. 228—241.

hervor, daß dieses in seiner Längserstreckung gedehnt oder verkürzt wird und etwa noch alle Helligkeiten einander proportional verändert werden. Wählt man dann geeignete, durch das Vergrößerungs- oder Verkleinerungsverhältnis bestimmte Maßstäbe für x und ξ und verfügt passend über die Anfangspunkte und den Richtungssinn der Koordinaten, so kann man erreichen, daß die ideelle Abbildung der geometrischen Optik durch die Gleichung

$$x = \xi \tag{6}$$

dargestellt wird, d. h. daß entsprechende Punkte von Bild und Gegenstand in dem gewählten Koordinatensystem gleiche Abszissen haben.

Nun weiß man aber — und hier greift die physikalische Optik ein —, daß ein einzelner leuchtender oder beleuchteter Punkt bei einem realen optischen Instrument keineswegs einen einzelnen Punkt als Bild liefert. Ihm entspricht vielmehr, wesentlich beeinflußt durch das den Strahlengang begrenzende Diaphragma, als Abbildung eine bestimmte Helligkeitsverteilung über die ganze Bildlinie (Beugungsbild), die an der Stelle des ideellen geometrischen Bildes $x = \xi$ nur einen mehr oder weniger stark ausgeprägten Höchstwert besitzt. Hat der Objektpunkt mit der Abszisse ξ_1 die Helligkeit 1, so ruft er im Bild an der Stelle x eine Helligkeit hervor, die von der Differenz $x - \xi_1$, d. i. von der Entfernung der Stelle x vom ideellen Bildpunkt $x_1 = \xi_1$ abhängt und durch irgendeine, im Nullpunkt ihren Höchstwert erreichende, gerade Funktion K dieser Differenz dargestellt werden wird. Ist die Helligkeit des Gegenstandes nicht 1, sondern y_1, so ist die des Bildes an der Stelle x gleich $y_1 K(x - \xi_1)$. Gesetzt, das ganze Objekt bestände aus n leuchtenden Punkten mit den Helligkeiten $y_1, y_2 \dots y_n$ an den Stellen $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$, dann entsteht durch Übereinanderlagerung der Einzelbilder der n Punkte an der Stelle x des Bildes die Helligkeit

$$\sum_{\iota=1}^{n} y_\iota K(x - \xi_\iota). \tag{7}$$

Bezeichnen wir den Wert der Funktion K an der Stelle $\xi_\varkappa - \xi_\iota$ kurz mit $K_{\varkappa\iota}$, so hat die Helligkeit des Bildes an den Stellen $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$, die nach den Anschauungen der geometrischen Optik allein hervortreten würden, die Werte

$$y'_\varkappa = \sum_{\iota=1}^{n} y_\iota K_{\varkappa\iota}, \qquad \varkappa = 1, 2 \dots n. \tag{8}$$

Dieser Ansatz weist vollkommene Analogie mit dem oben unter (4) besprochenen auf.

Man braucht sich nun nur vorzustellen, daß die leuchtenden Objektpunkte näher und näher aneinanderrücken und schließlich eine stetige Helligkeitsverteilung ergeben, die durch die Intensität $y(\xi)$ pro Längeneinheit an der Stelle ξ gemessen wird. Daraus entsteht dann eine Helligkeit im Bilde an der Stelle x von der Größe

$$y'(x) = \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

wo a und b die Grenzen des Objektes angeben. Von dem allgemeinen Ansatz (5) unterscheidet sich (9) nur dadurch, daß die dort ganz willkürlich gelassene Funktion K zweier Variablen x, ξ hier die spezielle Form einer Funktion der Differenz $x - \xi$ angenommen hat. Untersucht man z. B. den Fall eines rechteckigen Diaphragmas, so hat man für K das Fraunhofersche Beugungsbild des rechteckigen Spaltes einzuführen,

$$K(x-\xi) = C\,\frac{\sin^2 \alpha(x-\xi)}{(x-\xi)^2}, \tag{10}$$

wobei α durch die Wellenlänge des Lichtes und die Breite des Rechtecks bestimmt wird.

Welches sind nun die Aufgaben, die auf diesem Gebiet in den Bereich der Integralgleichungstheorie fallen? Einmal kann man das Bild y' als gegeben ansehen und nach dem zugehörigen Objekt y fragen, hat also in (9) y' als bekannte, y als unbekannte Funktion: Dies nennt man eine Integralgleichung „erster Art". In dieser tritt die unbekannte Funktion im Gegensatz zu der später zu erwähnenden Integralgleichung „zweiter Art" nur unter dem Integralzeichen auf. Interessanter ist aber die Frage: Welche Objekte werden ähnlich abgebildet, d. h. so, daß das Bild aus dem Objekt lediglich durch proportionale Veränderung aller Helligkeiten hervorgeht? Man hat dann $y(x) = \lambda\, y'(x)$ zu setzen und in

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

eine homogene Integralgleichung „zweiter Art" zu lösen, in der λ, das Helligkeitsverhältnis zwischen Objekt und Bild, einen noch unbekannten Parameter darstellt. Nimmt man endlich an, was hier freilich als eine etwas gekünstelte Fragestellung erscheinen wird, daß die Differenz zwischen der Helligkeit des Objektes und einem bestimmten Vielfachen der Bildhelligkeit gegeben ist, so liegt in

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \tag{12}$$

die allgemeine, nichthomogene, Integralgleichung zweiter Art vor. Es wird im weiteren Verlauf dieses Abschnittes unsere Sache sein, der Lösung der so angedeuteten Aufgaben näherzutreten. An dieser Stelle handelt es sich für uns nur darum, eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhang zwischen den physikalischen Fragestellungen und den analytischen Begriffsbildungen zu gewinnen.

Zwei weitere physikalische Probleme, die sich der hier dargelegten Auffassung unterordnen, seien nur kurz erwähnt. In der kinetischen Theorie der Diffusion nimmt man auf Grund gewisser wahrscheinlichkeits-theoretischer Erwägungen an, daß eine große Zahl von kleinen, suspendierten Teilchen in dem der Diffusion ausgesetzten Körper, die von einer bestimmten Stelle ξ des Ausgangsniveaus ihren Weg nehmen, im Endniveau in einer Verteilung ankommen, die dem Gaußschen Fehlergesetz

$$K(x-\xi) = \text{konst. } e^{-h^2(x-\xi)^2} \tag{13}$$

entspricht. Sind die Teilchen ursprünglich mit der Dichtigkeit $y(\xi)$ über die Breite der Ausgangsschicht verteilt, so wird durch (9) die Verteilung $y'(x)$ in der Endschicht angegeben, und es lassen sich hier die gleichen Fragen wie bei der optischen Abbildung stellen, nur daß der Kern (13) an die Stelle von (10) tritt. Die Ausdehnung auf zwei unabhängig Veränderliche liegt hier auf der Hand, man hat statt (9)

$$y'(x_1, x_2) = \int K(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, y(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1,\ d\xi_2 \tag{14}$$

zu setzen, das Integral über alle Punkte der Ausgangsschicht erstreckt, mit

$$K(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = \text{konst. } e^{-h_1^2(x_1-\xi_1)^2 - h_2^2(x_2-\xi_2)^2}. \tag{14'}$$

Noch umfassender ist der Ansatz der kinetischen Gastheorie, in der das Verteilungsgesetz der Gasmoleküle als Funktion von sieben Veränderlichen (drei Koordinaten, drei Geschwindigkeitskomponenten und der Zeit) dadurch bestimmt wird, daß es sich bei der Transformation durch die Zusammenstöße selbst reproduzieren soll. Es scheint, daß bei dem gegenwärtigen Ausbau der physikalischen Statistik derartige Fragestellungen wachsende Bedeutung gewinnen.

Das Gemeinsame der im voranstehenden angedeuteten Integralgleichungsprobleme liegt, gegenüber den nun zu besprechenden, auch darin, daß für die gesuchten Funktionen keine sie bestimmenden Differentialgleichungen bekannt sind, sondern die Integralgleichung selbst als der unmittelbare und natürliche Ansatz des physikalischen Problems erscheint.

3. Verwendung der Greenschen Funktion. Die bisher ausgedehnteste Anwendung der Integralgleichungen in der theoretischen Physik besteht darin, daß unter Zuhilfenahme der sogenannten Greenschen Funktion die Lösung eines Randwertproblems einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung auf die Lösung eines ebensolchen, aber vereinfachten Problems zurückgeführt wird[1]). Wir wollen uns dies an dem Beispiel eines geraden elastischen Stabes, der in zwei Punkten $x = a$ und $x = b$ fest gelagert ist und durch Kräfte senkrecht zu seiner Achse belastet wird (Fig. 52), klarmachen (vgl. dazu X, § 1).

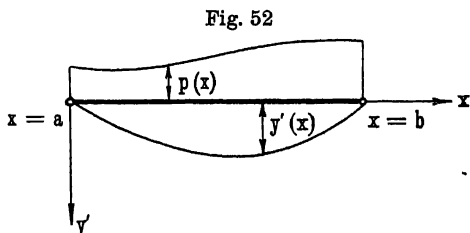



Fig. 52

Nennen wir W den Biegungswiderstand (Produkt aus Elastizitätszahl E und Querschnitts-Trägheitsmoment T), p die Belastung auf die Längeneinheit und y' die Durchbiegung an der Stelle x, so folgt y' als Funktion von x den Bedingungen

$$(15) \qquad \frac{d^4 y'}{d x^4} = \frac{p}{W} \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b;$$

$$(15') \qquad y' = 0, \quad \frac{d^2 y'}{d x^2} = 0 \quad \text{für} \quad x = a \text{ und } x = b.$$

Denn nach der Kirchhoffschen Theorie der Elastica oder, wie man in der Technik zu sagen pflegt, nach der Navierschen Biegungstheorie, ist die zweite Ableitung von y' gleich dem durch W dividierten Biegungsmoment M, die zweite Ableitung von M gleich p. An den freien Enden des Balkens muß $M = 0$ sein. Dabei kann p, wenn es sich um einen Bewegungszustand handelt, noch Trägheitskräfte umfassen und jedenfalls außer von x auch von y' abhängen.

Statt nun dieses Problem unmittelbar in Angriff zu nehmen, geht man von dem einfachen Fall aus, in dem die ganze Belastung des Stabes aus einer an der Stelle $x = \xi$ angreifenden Einzelkraft von der Größe 1 besteht. Dann ist rechts und links von $x = \xi$ für p Null zu setzen, so daß y' in jedem der beiden Stabteile zufolge (15) eine ganze Funktion dritten Grades ist. Die acht Konstanten dieser beiden Funktionen bestimmen sich aus den in (15') angeführten Be-

---

[1]) Von der Greenschen Funktion war schon in VII, § 4 die Rede. Ausführlicher wird dieser Begriff, der auch im letzten Abschnitt des Buches eine große Rolle spielt, in XIII, § 2 erläutert werden.

dingungen für $x = a$ und $x = b$ (zusammen vier Bedingungen), sowie aus der Forderung stetigen Überganges von y', $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2 y'}{dx^2}$ an der Stelle $x = \xi$, endlich aus dem Umstande, daß $\frac{d^3 y'}{dx^3}$ hier einen Sprung von der Größe $1 : W$, entsprechend der konzentrierten Last 1, erfahren muß. Denn einmalige Integration der beiden Seiten von (15) zeigt, wenn W konstant angenommen wird, daß die Differenz der $\frac{d^3 y'}{dx^3}$-Werte an zwei Stellen der durch W dividierten, zwischen den beiden Stellen liegenden Gesamtlast gleich ist. Die Ausrechnung führt, wenn wir die außer von x auch noch von ξ abhängige Ausbiegung mit $K(x, \xi)$ bezeichnen, zu

$$(16)\quad \begin{cases} K(x,\xi) = \dfrac{(x-a)(\xi-b)}{6(b-a)W}(x^2+\xi^2-2ax-2b\xi+2ab) \text{ für } x \leqq \xi, \\ = \dfrac{(\xi-a)(x-b)}{6(b-a)W}(x^2+\xi^2-2a\xi-2bx+2ab) \text{ für } x \geqq \xi. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, daß die angeführten acht Bedingungen hier erfüllt sind. Die Funktion $K(x, \xi)$, d. i. die Durchbiegung an der Stelle x, herrührend von einer Last 1 an der Stelle ξ, heißt in der Technik die „Einflußfunktion“, in der Physik die „Greensche Funktion“ des Problems (15), (15′).

Besteht die Belastung aus n Einzelkräften $P_1, P_2 \ldots P_n$, die an den Punkten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ angreifen, so ergibt sich die Durchbiegung y' an der Stelle x durch Übereinanderlagerung der n Bestandteile:

$$y'(x) = \sum_{\iota=1}^{n} K(x, \xi_\iota) P_\iota.$$

Kehren wir zu dem allgemeinen durch p definierten Belastungsfall zurück, so wird die Durchbiegung y' an der Stelle x durch die Übereinanderlagerung der durch die $p\,d\xi$ bestimmten Biegungen gewonnen:

$$(17)\qquad y'(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Eine Integralgleichung erster Art würde entstehen, wenn zu gegebener Durchbiegung die Belastung zu suchen wäre. Hier ist aber folgende Fragestellung die natürlichere, die auf eine Gleichung zweiter Art führt: Der Stab habe an der Stelle x die Masse μ pro Längeneinheit und vollführe, im übrigen unbelastet, eine harmonische

Schwingung mit der Amplitude $y(x)$ und der Frequenz $\varkappa$, so daß $y' = y \sin \varkappa t$ ist. Dann ist die Belastung durch Trägheitskräfte

$$(18)\quad p(x) = -\mu(x) \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = -\mu(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y \sin \varkappa t) = \varkappa^2 \mu(x)\, y(x) \sin \varkappa t,$$

und Gl. (15) geht nach Kürzung durch $\sin \varkappa t$ über in

$$(19)\quad \frac{d^4 y}{d x^4} = \varkappa^2 \frac{\mu(x)}{W} y,$$

mit den gleichen Randbedingungen wie oben (15'). Die Ausschläge y genügen daher der homogenen Integralgleichung zweiter Art:

$$(20)\quad y(x) = \varkappa^2 \int_a^b K(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi,$$

die man erhält, wenn man in (17) für p den Wert aus (18) setzt und durch $\sin \varkappa t$ kürzt; gegenüber (11) ist nur $K.\mu$ an Stelle von K und $\varkappa^2$ an Stelle von λ getreten. Die $\varkappa$-Werte, für die (20) Lösungen besitzt, liefern die Frequenzen der freien Schwingungen des Stabes, die zugehörigen Lösungen $y(x)$ belehren über die Schwingungsformen. Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen gelangt man, wenn p einen additiven Bestandteil von der Form $\varphi(x) \sin \varkappa t$ enthält (wo also φ die Amplitude der erzwingenden Kraft ist), so daß (20) sich zu einer nichthomogenen Integralgleichung zweiter Art, analog (12), erweitert:

$$(21)\quad y(x) - \varkappa^2 \int_a^b K(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x)$$

mit

$$(21')\quad f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

als gegebener Funktion von x. Nimmt man an, daß der Stab selbst masselos ist und nur an den n Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ Punktmassen $m_1, m_2 \ldots m_n$ trägt, so erhält man statt der Integrale in (20) und (21) entsprechende Summen über n Summanden und statt der Integralgleichungen Systeme von n linearen Gleichungen mit den Unbekannten $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Von dem Typus der hier behandelten Aufgabe sind alle Probleme elastischer Schwingungen und alle Probleme der Stabilität elastischen Gleichgewichts, wie sie in VII als Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt werden. Die Ausdehnung auf zwei oder mehr unabhängig Veränderliche stößt auf keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Aber auch die Theorie der Wärmeleitung läßt sich ohne weiteres hier einordnen, wenn man von der

Temperaturverteilung $K(x, \xi)$ ausgeht, die im Punkte x von einer Wärmequelle 1 an der Stelle ξ eines linearen Leiters hervorgerufen wird. — Auf alle diese Ansätze und ihre Durchführung kommen wir teils in den folgenden Kapiteln, teils im zweiten Bande noch zurück.

4. Potential. Die dritte, ebenfalls sehr wichtige Form der Anwendung von Integralgleichungen in der Physik betrifft die Probleme der Potentialtheorie. Wir erläutern sie an dem Beispiel der sogenannten Dirichletschen Fragestellung für das logarithmische Potential: Es soll eine Lösung der Differentialgleichung

Fig. 53

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{22}$$

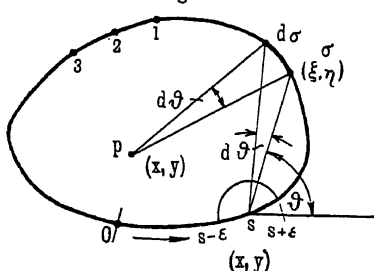
gefunden werden, die im Innern eines gegebenen, einfach zusammenhängenden Bereiches stetig ist und auf seinem Umfang S die vorgeschriebenen Werte $f(s)$ annimmt. Dabei bedeutet s die auf der Randkurve von irgendeinem ihrer Punkte O aus gemessene Bogenlänge nach einem beliebigen Randpunkt; von der Randkurve selbst setzen wir hier der Einfachheit halber voraus, daß sie an jeder Stelle eine eindeutige Tangentenrichtung besitzt (Fig. 53).

Bezeichnen ξ, η die Koordinaten des Randpunktes $s = \sigma$ und x, y die laufenden Koordinaten im Innern des Bereiches, so überzeugt man sich leicht, daß die Funktion $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y-\eta}{x-\xi}$ bei festem ξ, η der Differentialgleichung (22) genügt[1]). Ihres linearen Charakters wegen genügt dieser Gleichung daher auch jede lineare Kombination solcher Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \operatorname{arc\,tg} \frac{y-\eta_i}{x-\xi_i},$$

die dadurch gebildet wird, daß man jedem der n Punkte $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \ldots \xi_n, \eta_n$ des Randes eine „Masse" $c_1, c_2 \ldots c_n$ zuschreibt. Setzt man ferner

$$K(x, y; \sigma) = \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc\,tg} \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{d\vartheta}{d\sigma}, \tag{23}$$

[1]) Man kann dies natürlich durch Einsetzen in (22) bestätigen. Man sieht es aber unmittelbar ein, wenn man an den Zusammenhang von (22) mit den Funktionen komplexer Variablen denkt (vgl. III, § 1, 3) und beachtet, daß dieser Winkel ϑ mit i multipliziert den imaginären Bestandteil von log nat $[x + iy - (\xi + i\eta)]$ gibt.

so ist auch diese Funktion von x, y bei festem ξ, η eine Lösung von (22) (denn sie ist als Differenz, also auch als lineare Verbindung zweier ϑ aufzufassen) und demgemäß auch die „lineare Kombination" von unendlich vielen solchen Ausdrücken:

$$u(x,y) = \int \nu(\sigma) K(x,y;\sigma)\, d\sigma = \int \nu(\sigma)\, d\vartheta, \tag{24}$$

wo $\nu(\sigma)$ eine zunächst willkürliche „Belegung" des Randes bezeichnet und das Integral über den ganzen geschlossenen Rand zu erstrecken ist. Die zweite Form des Integrals ist der Anschaulichkeit wegen hinzugefügt, sie soll zum Ausdruck bringen, daß die Belegung $\nu(\sigma)$ im Sinne von (23) über den Winkel $d\vartheta$ zu integrieren ist, unter dem das Bogenelement $d\sigma$ von dem betreffenden Punkte x, y aus gesehen wird.

Die Integrale in (24) werden „uneigentlich", wenn man sie für einen Punkt x, y bildet, der selbst auf dem Rande liegt, weil dann der Integrand, wie (23) zeigt, für $\xi = x$, $\eta = y$ unendlich wird. Nach der üblichen Definition uneigentlicher Integrale erhält man den Wert des mit dem Symbol $\int \nu(\sigma) K(x,y;\sigma)\, d\sigma$ bezeichneten Ausdrucks, indem man beiderseits der Unendlichkeitsstelle von K ein Stück von der Länge ε aus dem Integrationsgebiet ausscheidet und dann zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergeht. Aber der Sinn des Ansatzes (24) als Lösung von (22) geht dahin, daß die tatsächliche Summe aller Anteile $\nu(\sigma) d\vartheta$ gebildet wird. Die bei der Integration definitionsgemäß ausscheidende Bogenstrecke von $s - \varepsilon$ bis $s + \varepsilon$ wird vom Punkte s aus, in der Grenze für $\varepsilon = 0$, unter dem Winkel $180^0 = \pi$ gesehen, liefert demnach den Betrag $\nu(s) . \pi$, der zu dem Werte des uneigentlichen Integrals hinzugefügt werden muß. Für einen Randpunkt, der durch die Koordinaten x_s, y_s bzw. durch die Bogenlänge s festgelegt erscheint, stellt sich also der Wert der mit (24) angesetzten Lösung in der Form

$$\pi \nu(s) + \int K(s,\sigma)\, \nu(\sigma)\, d\sigma$$

dar, wenn jetzt der Kürze halber $K(s,\sigma)$ für $K(x_s, y_s; \sigma)$ geschrieben wird. Das Endergebnis dieser Betrachtung besteht darin, daß das Dirichletsche Problem auf die Lösung der nichthomogenen Integralgleichung zweiter Art

$$\pi \nu(s) + \int K(s,\sigma)\, \nu(\sigma)\, d\sigma = f(s) \tag{25}$$

hinausläuft, in der ν eine unbekannte Randbelegung, f die vorgeschriebenen Randwerte von u bezeichnet, während der „Kern" $K(s,\sigma)$ durch (23) definiert erscheint. Kennt man ν für alle Rand-

punkte, so ist die verlangte Lösung $u(x, y)$ von (22) mit den Randwerten f durch Ausführung der in (24) angegebenen Quadratur zu finden.

Man sieht, daß hier — in der Potentialtheorie — die wesentliche Leistung der Integralgleichung darin liegt, daß die Aufsuchung einer Funktion von zwei Veränderlichen auf die Bestimmung einer Funktion mit einer unabhängig Variablen reduziert wird. Zudem ergibt sich für die Ermittlung dieser Funktion genau der gleiche Ansatz, wie er oben beispielsweise für die erzwungene Schwingung eines elastischen Stabes gefunden wurde, trotzdem das ursprüngliche analytische Problem in beiden Fällen ein ganz verschiedenes war. Auch alle anderen Randwertaufgaben der Potentialtheorie, sowohl für ebene Gebiete (logarithmisches Potential) wie für räumliche (Newtonsches Potential), lassen sich in gleicher Weise behandeln und führen jedesmal auf Integralgleichungen für ein- bzw. zweidimensionale Randbelegungen. Diese Fragen werden im XIV. Kap. ausführlicher besprochen werden.

§ 2. Unmittelbar lösbare Fälle

1. Ein mechanisches Problem von Abel. Zu einem besonders einfach lösbaren Falle einer Integralgleichung ist Abel durch Betrachtung der folgenden mechanischen Aufgabe gelangt. Ein materieller Punkt m bewege sich aus der Ruhe unter dem Einfluß der Schwere auf einer glatten, in einer Vertikalebene liegenden Kurve. Die Zeit t, die m braucht, um aus einer Höhe x längs der Kurve zu deren tiefsten Punkt zu gelangen, sei eine gegebene Funktion von x; wie muß die Kurve beschaffen sein? Bekanntlich erhält man für $t =$ konst. (Tautochrone) eine „gemeine Zykloide“ [1]).

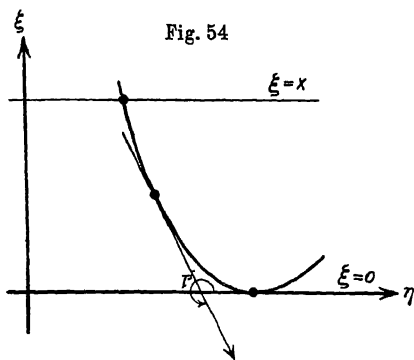



Fig. 54

[1]) Radkurve, die von den Peripheriepunkten eines in gerader Richtung rollenden Rades vom Radius a beschrieben wird; ihre Gleichung in Parameterform lautet:

$$\eta = 2a \sin\tau \cos\tau + 2a\tau, \qquad \xi = 2a \sin^2\tau,$$

wobei τ den Tangentenwinkel bedeutet. Die Zykloide ist auch die Lösung des Variationsproblems, die Kurve raschesten Falles zwischen zwei Punkten anzugeben (Brachistochrone V, § 1, 2 u. 5).

Bezeichnet (Fig. 54) ξ die Höhe eines beliebigen Kurvenpunktes, τ den Tangentenwinkel, g die Schwerebeschleunigung, so ist die Geschwindigkeit in ξ (deren Vertikalkomponente gleich $d\xi/dt$ ist):

$$\sqrt{2g(x-\xi)} = -\frac{1}{\sin\tau}\frac{d\xi}{dt}, \tag{1}$$

also die Fallzeit von $\xi = x$ nach $\xi = 0$:

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{1}{\sin\tau}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}. \tag{2}$$

Man sieht, daß durch Vorgeben eines Zeitgesetzes der Tangentenwinkel τ als Funktion der Ordinate ξ durch eine Integralgleichung erster Art bestimmt wird. Für $t =$ konst. hat man

$$\sin\tau = \frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{\xi}{2g}}, \tag{3}$$

wie man sich durch Einsetzen mit Rücksicht auf

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{(b-\xi)(\xi-a)}} = \pi \tag{4}$$

überzeugt.

Im allgemeinen Falle stellt (2) bei gegebenem $\sqrt{2g}\,t = f(x)$ und unbekanntem $\operatorname{cosec}\tau = y(\xi)$ eine Integralgleichung erster Art für y dar, deren Kern $K(x, \xi)$ definiert ist durch

$$\begin{cases} K(x,\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{x-\xi}} & \text{für} \quad \xi < x, \\ K(x,\xi) = 0 & \text{für} \quad \xi \geqq x. \end{cases} \tag{5}$$

Wir wollen annehmen, daß $f(x)$ samt seiner ersten Ableitung im ganzen Bereich stetig sei. Die Lösung der Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^\infty K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \tag{6}$$

mit den Werten (5) für K ist leicht zu erraten, wenn man (4) ins Auge faßt. Schreibt man in (4) x für b und z für a, multipliziert mit einer willkürlichen Funktion $\varphi(z)$ und integriert von 0 bis x, so entsteht

$$\pi\int_0^x \varphi(z)\,dz = \int_0^x \varphi(z)\,dz\int_z^x \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(\xi-z)}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\int_0^\xi \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}}. \tag{7}$$

Will man also (6), zunächst unter der Voraussetzung $f(0) = 0$, erfüllen, so muß man nur $\pi\varphi$ mit der ersten Ableitung f' von f identifizieren und

$$(8) \qquad y(\xi) = \int_0^\xi \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{\xi - z}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{\xi - z}}$$

setzen; denn dann steht links in (7) nichts anderes als $f(x)$ und rechts genau die rechte Seite von (6). Hat man aber $f(0) \neq 0$, so muß man zu (8) noch die Zykloidenlösung mit $\sqrt{2gt} = f(0)$ hinzufügen, also erhält man endgültig:

$$(9) \qquad y(\xi) = \frac{1}{\sin\tau} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{\xi}} + \int_0^\xi \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{\xi - z}}\right].$$

Daß dies eine Lösung von (6) ist, sofern das Integral rechts existiert, erkennt man natürlich auch durch Einsetzen; physikalische Bedeutung kommt dieser Lösung nur zu, falls sie dem absoluten Betrage nach $\geqq 1$ ausfällt; daß es dann die einzige, wenigstens bei Beschränkung auf Stetigkeit, Realität usf., ist, die ihrem absoluten Betrage nach $\geqq 1$ bleibt, folgt daraus, daß die Differenz zweier verschiedener Lösungen für dasselbe f eine Lösung für $f = 0$ sein müßte, die aber mechanisch offenbar unmöglich ist.

Wenn wir das Abelsche Problem in die im vorangehenden Paragraphen aufgeführten Gruppen einordnen wollten, so müßten wir es wohl der ersten zurechnen. Das Zeitgesetz $t(x)$ erscheint hier gewissermaßen als Transformation des Winkelgesetzes $\operatorname{cosec}\tau(\xi)$. Jedenfalls ist keine Differentialgleichung bekannt, die die durch (6) dargestellte Verknüpfung zwischen den Funktionen f und y wiedergeben würde. Im übrigen ist die Art der Fragestellung, mit der man es hier zu tun hat, eine ziemlich vereinzelte.

Eine Variante von (6) ist die Integralgleichung erster Art:

$$(6') \qquad f(x) = \int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}},$$

und eine Verallgemeinerung die Gleichung:

$$(6'') \qquad f(x) = \int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{(x - \xi)^\nu}, \qquad 0 < \nu < 1.$$

Die Lösung von (6') findet man auf Grund der elementar nachweisbaren Quadraturformel

$$(4') \qquad \int_z^x \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}\;\sqrt{\xi^2-z^2}} = \frac{\pi}{2}$$

in ganz gleicher Weise wie oben zu

$$(8') \qquad y(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[f(0) + \xi \int_0^\xi \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{\xi^2-z^2}}\right].$$

Analog folgt aus dem bestimmten Integral

$$(4'') \qquad \int_z^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^\nu\,(\xi-z)^{1-\nu}} = \frac{\pi}{\sin\nu\pi}$$

die Lösung der Integralgleichung (6'') in der Form

$$y(\xi) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\xi^{1-\nu}} + \int_0^\xi \frac{f'(z)\,dz}{(\xi-z)^{1-\nu}}\right].$$

2. Kern vom Typus eines Polynoms. Eine umfassende Gruppe unmittelbar lösbarer Integralgleichungen zweiter Art, die auch, wie wir später (XII, § 2, 4) sehen werden, zu dem ganz allgemeinen Fall hinüberleitet, erhält man, wenn der Kern $K(x,\xi)$ sich — wie ein Polynom — additiv aus Gliedern zusammensetzt, deren jedes ein Produkt aus einer Funktion von x in eine solche von ξ ist. Es wird genügen, hier zunächst nur drei Summanden anzusetzen, also etwa

$$(1) \qquad K(x,\xi) = s_1(x)t_1(\xi) + s_2(x)t_2(\xi) + s_3(x)t_3(\xi);$$

der allgemeine Weg der Lösung wird dabei hinreichend deutlich werden. Die Integralgleichung nehmen wir als nichthomogen an:

$$(2) \qquad y(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi = f(x).$$

Setzen wir in (2) den Ausdruck (1) für $K(x,\xi)$ ein und beachten, daß die bestimmten Integrale

$$(3) \qquad \int_a^b t_1(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = T_1, \quad \int_a^b t_2(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = T_2, \ldots$$

Konstanten sind, so erhält (2) die Form

$$(4) \qquad y(x) = f(x) + \lambda\,[T_1 s_1(x) + T_2 s_2(x) + T_3 s_3(x)],$$

wobei nur noch die Werte von T_1, T_2, T_3 unbekannt sind. Um diese zu finden, multiplizieren wir (4) der Reihe nach mit $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$ und integrieren jedesmal nach x über das ganze Intervall a bis b. Dann entsteht auf der linken Seite wieder T_1 bzw. T_2 oder T_3, und rechts treten die Zahlen

$$(5)\quad \int_a^b f(x)t_\iota(x)dx = F_\iota, \quad \int_a^b s_\varkappa(x)t_\iota(x)dx = A_{\iota\varkappa} \quad (\varkappa, \iota = 1, 2, 3)$$

auf. Mit diesen Abkürzungen erhält man nun aus (4) genau drei lineare Gleichungen für die drei Unbekannten T_1, T_2, T_3, nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} T_1(1-\lambda A_{11}) - T_2\lambda A_{12} - T_3\lambda A_{13} = F_1, \\ -T_1\lambda A_{21} + T_2(1-\lambda A_{22}) - T_3\lambda A_{23} = F_2, \\ -T_1\lambda A_{31} - T_2\lambda A_{32} + T_3(1-\lambda A_{33}) = F_3. \end{cases}$$

Löst man diese Gleichungen nach den T_1, T_2, T_3 auf und führt die gefundenen Werte in (4) ein, so hat man damit die vollständige Lösung der Integralgleichung (2). Dabei ist zu beachten, daß die rechten Seiten von (6) nur durch die rechte Seite von (2) bestimmt werden, d. h. der Ansatz (6) ist homogen, wenn (2) es ist. Demnach überträgt sich die „Alternative“, wie sie bei linearen Gleichungen in Kap. II besprochen wurde, folgendermaßen auf die Frage der Lösbarkeit der Integralgleichung (2): Wenn die nur vom Kern K abhängige Determinante

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & -\lambda A_{13} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & -\lambda A_{23} \\ -\lambda A_{31} & -\lambda A_{32} & 1-\lambda A_{33} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, hat die Integralgleichung (2) eine eindeutig bestimmte Lösung für jedes $f(x)$, insbesondere für $f = 0$ allein die Lösung $y = 0$; wird aber (7) gleich Null — was für höchstens drei voneinander verschiedene λ-Werte eintreten kann —, so gibt es für $f = 0$ eine nicht verschwindende, höchstens bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung y und für beliebige f keine Lösung. Diese „Alternative“ ist typisch für alle Integralgleichungsprobleme und wird uns immer wieder begegnen.

Ist das System (6) homogen, so braucht die Integralgleichung (2) nicht notwendig auch homogen zu sein, da es möglich ist, daß für ein spezielles $f(x)$ alle F_ι aus (5) verschwinden. Ist dann die Determinante (7) von Null verschieden, so ist nach (4) $y(x) = f(x)$ die einzige Lösung von (2); verschwindet die Determinante (7), so erhält

man zu der speziellen rechten Seite $f(x)$ Lösungen, was der oben aufgestellten Alternative nicht widerspricht.

Als Beispiel für die entwickelte Theorie betrachten wir:

$$K(x, \xi) = 60x^2 + 12x\xi + 6\xi^2, \quad a = 0, \ b = 1,$$

also

$$s_1 = 60x^2, \ s_2 = 12x, \ s_3 = 6; \quad t_1 = 1, \ t_2 = \xi, \ t_3 = \xi^2;$$

man erhält nach (5) für die $A_{\iota\varkappa}$ das Schema

$$\begin{matrix} 20 & 6 & 6 \\ 15 & 4 & 3 \\ 12 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Die Auflösung von (6) für $\lambda = -1$ liefert dann

$$T_1 = \frac{-F_1 + 2F_3}{3}, \quad T_2 = \frac{F_1 + F_2 - 3F_3}{2}, \quad T_3 = \frac{5F_1 - 3F_2 - 5F_3}{6},$$

und demgemäß wird die Lösung der Integralgleichung, wenn noch für die F die Werte aus (5) eingesetzt werden:

$$y(x) = f(x) - (-20x^2 + 6x + 5)\int_0^1 f(x)\,dx - (6x - 3)\int_0^1 x f(x)\,dx$$
$$- (40x^2 - 18x - 5)\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

Die Ausnahmewerte von λ ergeben sich als die Nullstellen der Determinante (7), die hier ausgerechnet lautet:

$$2\lambda^3 - 43\lambda^2 - 26\lambda + 1 = 0.$$

Man erkennt ohne weiteres, wie das Verfahren sich gestaltet, wenn K aus einer Summe nicht von 3, sondern von n Gliedern in der Form (1) erscheint: man hat es dann letzten Endes mit einem System von n linearen Gleichungen zu tun. Außer gewöhnlichen Polynomen in x, ξ als Kernfunktionen können z. B. trigonometrische Polynome, also Summen von Ausdrücken wie $\sin\alpha x \sin\alpha\xi$ usf., in dieser Weise erledigt werden [und natürlich noch weitere Fälle, wenn man die $s(x)$ und $t(\xi)$ irgendwie anders spezialisiert]. Bedenkt man nun, daß sehr allgemeine Klassen von Funktionen sich näherungsweise als Polynome der einen oder der anderen Art darstellen, bzw. als Potenz- oder Fourierreihen entwickeln lassen, so wird man nicht im Zweifel sein, daß das hier dargelegte Lösungsverfahren die Grundlage eines viel allgemeineren wird abgeben können; darauf kommen wir im folgenden Kapitel noch zurück.

3. Die Integralgleichung der trigonometrischen Funktionen. Die Rolle, die die Integralgleichungen zweiter Art bei allen Schwingungsaufgaben spielen (vgl. § 1, 3), läßt schon erkennen, daß sie bei ge-

nügender Spezialisierung auf die einfachen trigonometrischen Funktionen, sinus und cosinus, führen müssen. Um eine homogene Integralgleichung zu erhalten, deren Lösungen die sin und cos sind, braucht man den Kern $K(x, \xi)$, dessen Variablen x, ξ wir von 0 bis 1 laufend denken, nur folgenden drei Bedingungen zu unterwerfen: 1. Es sei K symmetrisch in bezug auf die beiden Veränderlichen x, ξ, also $K(x, \xi) = K(\xi, x)$; 2. es werde K in jedem der beiden durch die Diagonale $x = \xi$ gebildeten Dreiecke durch eine lineare Funktion von x und ξ dargestellt, und 3. es erleide die Ableitung von K nach x an der Stelle $x = \xi$ einen endlichen von Null verschiedenen Sprung. Der allgemeinste, diesen Voraussetzungen genügende Ansatz ist:

$$(8) \qquad \begin{cases} K(x, \xi) = a x\xi + b x + c\xi + d & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ = a x\xi + c x + b\xi + d & \text{für} \quad x \geqq \xi, \end{cases}$$

mit $b \neq c$. Differenziert man die Integralgleichung zweiter Art:

$$(9) \qquad y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0,$$

mit dem in (8) gegebenen Ausdruck von K, so muß man das Integrationsintervall in (9) in die beiden Teile $0, x$ und $x, 1$ zerlegen und erhält:

$$(9') \qquad y'(x) - \lambda \int_0^x (a\xi + c)\, y(\xi)\, d\xi - \lambda \int_x^1 (a\xi + b)\, y(\xi)\, d\xi = 0;$$

denn die Differentiationen nach den Grenzen liefern die Beiträge $\pm K(x, x)\, y(x)$, die einander aufheben. Nochmalige Differentiation von (9′) gibt:

$$(9'') \quad y''(x) - \lambda(ax + c)\, y(x) + \lambda(ax + b)\, y(x) = y'' + \lambda(b - c)\, y = 0.$$

Man sieht also, daß die Lösungen von (9) — daß sie zweimal, ja sogar beliebig oft differenzierbar sind, folgt aus den eben hergeleiteten Formeln — unter den Integralen der Differentialgleichung (9″) zu suchen sind, mithin die Form

$$(10) \qquad y = A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x, \quad \varkappa = \sqrt{\lambda(b - c)},$$

besitzen. Die Konstanten A und B sind aber keineswegs willkürlich, wir müssen vielmehr noch überlegen, was wir durch das Differenzieren des ursprünglich gegebenen Ansatzes (9) vorläufig verloren haben. Setzt man zur Abkürzung

$$(11) \qquad \lambda \int_0^1 \xi\, y(\xi)\, d\xi = C, \quad \lambda \int_0^1 y(\xi)\, d\xi = D,$$

so führt Einsetzen von (8) in (9) und Spezialisieren auf $x = 0$ bzw. $x = 1$ zu

$$(12) \qquad y(0) = cC + dD, \quad y(1) = (a+b)C + (c+d)D$$

und ebenso, wenn (9') statt (9) benutzt wird,

$$(12') \qquad y'(0) = aC + bD, \quad y'(1) = aC + cD.$$

Aus den vier Gleichungen (12) und (12') lassen sich C und D eliminieren (beispielsweise, indem man durch Subtraktion der beiden letzten voneinander eine Gleichung für D, durch Subtraktion der ersten und vierten von der zweiten eine Gleichung für C allein herstellt und die so berechneten C, D in die erste und dritte einsetzt), und daraus entstehen die beiden „Randbedingungen", denen y noch genügen muß:

$$(13) \qquad \begin{cases} b\,y(0) - c\,y(1) - d\,y'(0) + (c+d)\,y'(1) = 0, \\ a\,y(0) - a\,y(1) - c\,y'(0) + (a+b)\,y'(1) = 0. \end{cases}$$

Setzt man hier die Lösung (10) ein, so hat man zwei lineare homogene Gleichungen für A und B, die nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre Determinante verschwindet; dies gibt, sobald a, b, c, d gegeben sind, eine transzendente Gleichung für $\varkappa$, also auch für λ. Nur für die so ausgezeichneten $\varkappa$- bzw. λ-Werte ist die homogene Integralgleichung (9) lösbar. Statt der allgemeinen Form verfolgen wir besser einzelne besondere Annahmen. Beispielsweise sei $c = d = 0$, $b = 1$ und überdies a) $a = -1$; b) $a = 0$; c) $a = 1$. Die Randbedingungen (13) lauten in diesen Fällen:

a) $y(0) = y(1) = 0$; b) $y(0) = y'(1) = 0$; c) $y(0) = 0$, $y(1) = 2y'(1)$,

und die transzendenten Gleichungen, die man durch Einsetzen von (10) in die einzelnen Paare von Bedingungen erhält, werden:

$$(14) \qquad \text{a) } \sin\varkappa = 0; \quad \text{b) } \cos\varkappa = 0\,^{1)}; \quad \text{c) } \operatorname{tg}\varkappa = 2\varkappa.$$

Die den Bedingungen a) bis c) genügenden Lösungen (10) selbst sind — wenn mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \ldots$ die Wurzeln von (14c) bezeichnet werden:

$$\text{a) } \sin\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \sin 3\pi x \ldots; \quad \text{b) } \sin\frac{\pi}{2}x,\ \sin\frac{3\pi}{2}x,\ \sin\frac{5\pi}{2}x \ldots;$$

$$\text{c) } \sin\varkappa_1 x,\ \sin\varkappa_2 x,\ \sin\varkappa_3 x \ldots$$

und demgemäß die ausgezeichneten λ-Werte:

$$\text{a) } \pi^2,\ 4\pi^2,\ 9\pi^2 \ldots; \quad \text{b) } \frac{\pi^2}{4},\ \frac{9\pi^2}{4},\ \frac{25\pi^2}{4} \cdots; \quad \text{c) } \varkappa_1^2,\ \varkappa_2^2,\ \varkappa_3^2 \cdots.$$

---

[1]) Hier wäre noch $\varkappa = 0$ eine Lösung der Determinantengleichung. Dazu gehört aber $\lambda = 0$, und für $\lambda = 0$ besitzt (9) nur die Lösung $y(x) \equiv 0$, ebenso die Differentialgleichung (9''), wie aus dem Ansatz (10) folgt.

Jedem dieser Fälle und noch vielen anderen entsprechen bestimmte Schwingungsprobleme, von denen noch wiederholt die Rede sein wird; z. B. dem Fall a) die Schwingungen eines an beiden Enden festgehaltenen Seiles. — Wir wollen jetzt auch noch die nichthomogene Integralgleichung mit dem Kern (8) untersuchen.

Steht rechts in (9) noch eine Funktion $f(x)$, die wir als zweimal differenzierbar voraussetzen wollen, so daß auch die Lösung $y(x)$ zweimal differenzierbar wird, so führt zweimalige Differentiation der Gleichung an Stelle von (9″) zu $y'' + \lambda(b-c)y = f''$. Diese Differentialgleichung ist im Hinblick auf bestimmte Randbedingungen in Kap. VII, § 1, **1** behandelt worden. Für uns hat es jetzt Interesse, daß man ihre Lösung in der Form schreiben kann

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{15}$$

wo $\Gamma(x, \xi)$ eine nur von K und λ (aber nicht von f) abhängige Funktion bedeutet, die wir völlig explizite angeben können. Dabei ist aber zu bemerken, daß die so erhaltene Lösung (15) Randbedingungen genügt, die erhalten werden, indem man in den beiden linken Seiten von (13) die Funktion y durch f ersetzt. Insbesondere wird (13) nur erfüllt, wenn $f(x)$ selbst diesen Bedingungen genügt, ein Fall, der in den Anwendungen das meiste Interesse besitzt. Die Funktion $\Gamma(x, \xi)$, der sogenannte „lösende Kern“ zu $K(x, \xi)$, ist folgendermaßen definiert: Es genügt Γ als Funktion von x sowohl im Dreieck $x \leqq \xi$ wie im Dreieck $x \geqq \xi$ der Differentialgleichung (9″), d. h. es ist

$$\tag{16} \begin{cases} \Gamma(x, \xi) = A_1 \cos \varkappa x + B_1 \sin \varkappa x \equiv \Gamma_1(x, \xi) & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ = A_2 \cos \varkappa x + B_2 \sin \varkappa x \equiv \Gamma_2(x, \xi) & \text{für} \quad x \geqq \xi. \end{cases}$$

Die vier Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2, die noch von ξ und λ (bzw. $\varkappa$) abhängen, sind so zu bestimmen, daß Γ auch den Bedingungen (13) genügt [wo also $\Gamma_1(0, \xi)$ für $y(0)$, dann $\Gamma_2(1, \xi)$ für $y(1)$ usw. einzusetzen ist], ferner daß für $x = \xi$ beide Ausdrücke Γ_1 und Γ_2 gleiche Werte ergeben, endlich daß die Differenz der Ableitungen an dieser Stelle den Wert $c - b$ ergibt, also

$$\Gamma_1(\xi, \xi) = \Gamma_2(\xi, \xi); \quad \Gamma_2'(\xi, \xi) - \Gamma_1'(\xi, \xi) = c - b. \tag{16'}$$

Man sieht, daß das Integral rechts in (15) die Bedingungen (13) erfüllen muß, wenn dies für $\Gamma(x, \xi)$ bei jedem ξ der Fall ist; denn es stellt im wesentlichen eine Übereinanderlagerung von (unendlich

vielen) Funktionen dar, die einzeln den Bedingungen (13) genügen. Weiter folgt durch zweimaliges Differenzieren von (15):

$$(15') \quad y''(x) = f''(x) + \lambda[\Gamma_2'(x, x) - \Gamma_1'(x, x)]f(x) + \lambda\int_0^x \Gamma_2''(x, \xi)f(\xi)d\xi + \lambda\int_x^1 \Gamma_1''(x, \xi)f(\xi)d\xi.$$

Für Γ'' kann man mit Rücksicht auf (9″) $-\lambda(b-c)\Gamma$ schreiben, so daß die beiden Integrale rechts zusammen $\lambda(c-b)\cdot\int_0^1 \Gamma(x, \xi)f(\xi)d\xi$ geben. Setzt man hierfür den Wert aus (15) ein und beachtet die zweite Gl. (16′), so wird aus (15′):

$$y''(x) = f''(x) + \lambda(c-b)f(x) + \lambda(c-b)[y(x) - f(x)] = f'' + \lambda(c-b)y,$$

d. h. (15) genügt auch der Differentialgleichung (9″) mit dem Zusatz f'' auf der rechten Seite, was zu beweisen war.

Wir geben noch für die drei Spezialfälle a) bis c) die lösenden Kerne vollständig an. Es folgt im Falle a), daß $A_1 = 0$ und $A_2 \cos\varkappa + B_2 \sin\varkappa = 0$, ferner aus der ersten Gl. (16′), daß $(B_1 - B_2)\sin\varkappa\xi = A_2\cos\varkappa\xi$, endlich aus der zweiten mit $b - c = 1$, daß $\varkappa(B_1 - B_2)\cos\varkappa\xi + \varkappa A_2 \sin\varkappa\xi = 1$. Die Auflösung dieser vier Gleichungen und der analogen in den Fällen b) und c) liefert:

$$(17)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \Gamma_1(x, \xi) = \dfrac{\sin\varkappa(1-\xi)\sin\varkappa x}{\varkappa\sin\varkappa},\ \Gamma_2(x, \xi) = \dfrac{\sin\varkappa(1-x)\sin\varkappa\xi}{\varkappa\sin\varkappa}; \\ \text{b)}\ \Gamma_1(x, \xi) = \dfrac{\cos\varkappa(1-\xi)\sin\varkappa x}{\varkappa\cos\varkappa} = \Gamma_2(\xi, x); \\ \text{c)}\ \Gamma_1(x, \xi) = \dfrac{\sin\varkappa x}{\varkappa}\left[\cos\varkappa\xi - \sin\varkappa\xi\,\dfrac{1 + 2\varkappa\,\mathrm{tg}\,\varkappa}{\mathrm{tg}\,\varkappa - 2\varkappa}\right] = \Gamma_2(\xi, x). \end{cases}$$

In allen drei Fällen [und, wie sich zeigen läßt, in allen Fällen beliebiger Wahl von a, b, c, d in (13)] bestätigen sich folgende Eigenschaften: Der „lösende“ Kern Γ ist symmetrisch (ebenso wie der ursprüngliche Kern K) und er existiert nicht, d. h. er wird durch einen Bruch mit verschwindendem Nenner dargestellt, für solche Werte des Parameters $\varkappa$ bzw. λ, die der transzendenten Gleichung (14) genügen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind also dadurch gekennzeichnet, daß für sie die homogene Integralgleichung (9) lösbar, die nichthomogene aber im allgemeinen nicht lösbar ist, während es sich für alle anderen λ-Werte umgekehrt verhält. Wir kommen auf diese „Alternative“ später noch vielfach zurück, deren physikalische Bedeutung durch den Begriff der „Eigenschwingung“, der „erzwungenen Schwingung“ und der „Resonanz“ gekennzeichnet wird.

4. Andere Darstellungsform des Sinus-Cosinus-Kernes. Wir wollen jetzt dem in **3** betrachteten Kern (8), der zu den sin und cos als Eigenlösungen geführt hat, eine grundsätzlich andere Darstellung geben, wobei wir uns auf den in den Anwendungen wichtigsten und für alle anderen typischen Fall a) beschränken. Unter der Annahme $a = -1$, $b = 1$, $c = d = 0$ lautet (8)

$$(18)\quad K(x, \xi) = x(1-\xi) \text{ für } x \leqq \xi, \quad K(x, \xi) = \xi(1-x) \text{ für } x \geqq \xi.$$

Wir entwickeln nun die hierin gegebene Funktion von x im Intervall 0,1 in eine Fouriersche Reihe (IV, § 4). Da die Funktion ungerade ist, kommen nur die sinus-Glieder in Betracht, und der Koeffizient von $\sin n\pi x$ ist

$$(19)\quad a_n = 2(1-\xi)\int_0^\xi x \sin n\pi x\, dx + 2\xi\int_\xi^1 (1-x)\sin n\pi x\, dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi\xi,$$

wie man durch Ausführung der elementaren Quadraturen erkennt. Wir haben also mit (18) gleichbedeutend

$$(18')\quad K(x, \xi) = \frac{2}{\pi^2}\sin \pi\xi \sin \pi x + \frac{2}{4\pi^2}\sin 2\pi\xi \sin 2\pi x + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi\xi \sin n\pi x;$$

denn die Reihe rechts konvergiert zufolge der Nenner gleichmäßig für alle x und ξ. Der Kern (18′) läßt sich nun formal genau so behandeln wie die in **2** betrachteten Kerne vom „Polynomtypus". Wir setzen (18′) in (9) ein, vertauschen die Reihenfolge von Summation und Integration und erhalten:

$$(20)\quad y(x) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\int_0^1 y(\xi)\sin n\pi\xi\, d\xi = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin n\pi x,$$

wenn mit c_n die Fourier-Koeffizienten von y bezeichnet werden. Diese Gleichung wird in der Tat befriedigt, wenn man für irgendein ganzzahliges n setzt: $y(x) = \sin n\pi x$ und $\lambda = n^2\pi^2$, denn für ein solches y sind alle c bis auf das n-te Null, und dieses eine hat den Wert 1. Wir haben demnach die Lösungen $\sin \pi x$, $\sin 2\pi x$, $\sin 3\pi x, \ldots$ zu den Parameterwerten $\lambda = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$, wie schon in **3** angegeben. Auch der „lösende Kern" (17a) gestattet eine Entwicklung nach den sinus mit den Koeffizienten

$$\frac{2\sin\varkappa(1-\xi)}{\varkappa\sin\varkappa}\int_0^\xi \sin\varkappa x \sin n\pi x\, dx + \frac{2\sin\varkappa\xi}{\varkappa\sin\varkappa}\int_\xi^1 \sin\varkappa(1-x)\sin n\pi x\, dx.$$

Die etwas umständliche, aber durchaus elementare Rechnung führt, wenn man beachtet, daß $\varkappa^2 = \lambda$, zu

$$(21)\qquad \Gamma(x,\xi) = \frac{2\sin\pi\xi\sin\pi x}{\pi^2-\lambda} + \frac{2\sin 2\pi\xi\sin 2\pi x}{4\pi^2-\lambda} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin n\pi\xi\sin n\pi x}{n^2\pi^2-\lambda}.$$

Man kann sich aber auch unmittelbar überzeugen, daß dieses Γ, in (15) eingesetzt, die ursprüngliche Integralgleichung (9) mit der rechten Seite f löst. Denn bedeuten $k_1, k_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(x)$, so gibt (21) in (15) eingeführt die Gleichung

$$(22)\qquad y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{n^2\pi^2-\lambda} \sin n\pi x$$

und daraus, wenn man die Koeffizienten von $\sin n\pi x$ beiderseits gleichsetzt:

$$(22')\qquad c_n = k_n\left(1 + \frac{\lambda}{n^2\pi^2-\lambda}\right) = \frac{n^2\pi^2 k_n}{n^2\pi^2-\lambda}.$$

Andererseits liefert nach Hinzufügung von f auf der rechten Seite Gl. (9) oder, was dasselbe ist, Gl. (20), wenn man wieder nur den Koeffizienten von $\sin n\pi x$ betrachtet:

$$c_n = \lambda \frac{c_n}{n^2\pi^2} + k_n, \quad \text{also} \quad c_n = \frac{n^2\pi^2 k_n}{n^2\pi^2-\lambda},$$

übereinstimmend mit (22'). Indem man c_n durch k_n, die Fourier-Koeffizienten der unbekannten Funktion $y(x)$ durch die der bekannten $f(x)$, ausdrückt, löst man die nichthomogene Integralgleichung. Die Gl. (22') oder auch (21) läßt deutlich erkennen, daß die Lösung im allgemeinen nur für solche λ-Werte existiert, die mit keiner der Zahlen $n^2\pi^2$ zusammenfallen. Auf die allgemeine Bedeutung der Entwicklungen (18') und (21) des ursprünglichen und des lösenden Kernes kommen wir in XII, § 3 zurück.

5. Fall mehrerer Veränderlicher. In der jetzt dargelegten Form gestatten die Ergebnisse aus dem Eindimensionalen leicht die Übertragung auf zwei- (oder mehr-) dimensionale Fragen. Wir betrachten eine unbekannte Funktion u der unabhängigen Veränderlichen x, y, die das Rechteckintervall $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ durchlaufen mögen. Sie sei zunächst der homogenen Integralgleichung zweiter Art:

$$(23)\qquad u(x,y) - \lambda \int_0^a\int_0^b K(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0,$$

unterworfen. Für den Kern K machen wir in Erweiterung von (18') den Ansatz einer doppelt unendlichen Reihe in der Form

$$(24)\quad K(x,y;\,\xi,\eta) = \frac{4}{a\,b}\sum_{m,n}^{1,\infty} \frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

Die Lösungen von (23), (24) haben die Gestalt

$$(25)\qquad u(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b};\quad m,n = 1,2,3,\cdots.$$

Denn setzt man (25) und (24) in (23) ein, so fallen bei der Integration alle Summanden von (24) fort mit Ausnahme desjenigen, der gerade die in (25) auftretenden Indizes m, n besitzt, und dieser liefert den Beitrag $a/2 \,.\, b/2$, so daß

$$(25')\qquad \lambda = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right);\quad m,\,n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$$

gewählt werden muß. Mit (25') ist die doppelt unendliche Reihe der ausgezeichneten Parameterwerte (der Eigenwerte) gegeben, für die (23) lösbar ist, mit (25) die entsprechende Reihe dieser Lösungen selbst. Daß es nicht außer (25) noch Lösungen von (23), (24) gibt, folgt aus später abzuleitenden allgemeinen Sätzen (XII, § 3, 3).

Man kann auch die Entwicklung des „lösenden Kernes" Γ in Analogie zu (21) aufstellen. Dabei ist Γ durch die Forderung bestimmt, daß von den beiden Gleichungen

$$(26)\quad \begin{cases} u(x,y) - \lambda\int\limits_0^a\int\limits_0^b K(x,y;\,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f(x,y),\\[2ex] f(x,y) + \lambda\int\limits_0^a\int\limits_0^b \Gamma(x,y;\,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = u(x,y)\end{cases}$$

eine aus der anderen folgen soll. Bezeichnet man wieder mit $c_{m,n}$ bzw. $k_{m,n}$ die Fourier-Koeffizienten von u bzw. f, also

$$c_{m,n} = \frac{4}{a\,b}\int\limits_0^a\int\limits_0^b u(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy,\quad k_{m,n} = \cdots,$$

so folgt, ebenso wie oben, aus der ersten Gl. (26)

$$(27)\quad c_{m,n} - \lambda\frac{c_{m,n}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} = k_{m,n},\quad c_{m,n} = \frac{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)-\lambda}\,k_{m,n}.$$

Soll die gleiche Koeffizientenbeziehung aus der zweiten Gl. (26) fließen, so muß man Γ so ansetzen:

$$(28)\qquad \Gamma(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab} \sum_{m,n}^{1,\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \lambda},$$

wie man durch Einführung von (28) in (26) sofort erkennt. Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (23) wird durch (25), (25′), die der nichthomogenen durch die zweite Gleichung (26) und (28) geliefert. Wieder erkennt man, daß die letztere Lösung hinfällig wird (verschwindende Nenner ergibt), sobald λ mit einem der Parameterwerte (25′) zusammenfällt. Man kann aber darüber hinaus feststellen, daß für besondere Funktionen f das nichthomogene Problem doch lösbar bleibt: wenn nämlich gerade derjenige Fourier-Koeffizient $k_{m,n}$ von f Null ist, in dessen Nenner (27) die verschwindende Differenz auftritt. Auch darauf kommen wir noch wiederholt zurück. Zu einer geschlossenen Form des Kernes gelangt man ebenfalls durch Untersuchungen anderer Richtung. (XIII, § 3.)

Die physikalische Bedeutung der hier besprochenen Integralgleichung ist etwa durch die Schwingungen einer rechteckigen, am Rande eingespannten Membran gegeben.

6. Laplacesche Transformation und Fouriersches Integraltheorem. Laplace hat in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Algorithmus eingeführt, der in das Gebiet der Integralgleichungen erster Art fällt und in engen Beziehungen zu verschiedenen Fragestellungen der mathematischen Physik steht. Wenn wir zunächst eine Reihe positiver Zahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ als Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ausfälle eines Versuches (z. B. als Wahrscheinlichkeiten, 1 bzw. 2 bzw. 3 ... zu ziehen) gegeben haben, so läßt sich dieser Reihe eine „erzeugende Funktion“ $v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \cdots$ zuordnen. Es fragt sich, wie man aus der Kenntnis dieser Funktion von t die Einzelzahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ zurückgewinnen kann. Setzen wir $t = e^{zi}$, wo $i = \sqrt{-1}$ und z eine neue Variable an Stelle von t ist, und schreiben

$$(29)\qquad f(z) = v_1 e^{zi} + v_2 e^{2zi} + v_3 e^{3zi} + \cdots = \sum_x v_x e^{xzi},$$

so sieht man sofort, daß die Umkehrung von (29) lautet:

$$(30)\qquad v_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-xzi} \, dz.$$

Denn wenn man die Summe (29) in (30) einführt, so fallen bei der Integration alle Summanden, deren Exponent ein anderer ist als xzi, fort, weil das Integral von $e^{nzi} = \cos nz + i \sin nz$ verschwindet; der eine übrigbleibende Summand liefert 2π als Integral.

Nun sei statt der Einzelzahlen $v_1, v_2, \ldots$ eine Funktion $v(x)$ der unabhängig Veränderlichen x gegeben, die wir als stetig und von beschränkter Schwankung voraussetzen wollen. Das Analogon zu (29), die „Laplacesche Transformierte" von $v(x)$, kann jetzt so definiert werden:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, e^{xzi}\, dx. \tag{31}$$

Damit dieses Integral einen Sinn hat, müssen wir noch voraussetzen, daß $v(x)$ im Unendlichen hinreichend stark verschwindet. Die Frage nach der Umkehrung betrifft jetzt die Auflösung der Integralgleichung (31) bei gegebenem f und unbekanntem v. Das Analogon zu (30):

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-xzi}\, dz, \tag{32}$$

läßt sich zunächst formal durch Einsetzen von (31) in (32), Vertauschung der Integrationsfolge usw. ableiten. Die exakte Grundlage der Lösung (32) von (31) liefert aber das Fouriersche Integraltheorem, IV, § 3, 3. Unter unseren Voraussetzungen für v gilt nach IV, § 3, (11):

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u) \cos z(u-x)\, du = \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u)\, e^{z(u-x)i}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xzi}\, dz \int_{-\infty}^{\infty} v(u)\, e^{uzi}\, du.$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite stimmt in der Tat, wenn man (31) beachtet, mit der rechten Seite von (32) überein. Da aber, wie man sich leicht überzeugt, das analog gebildete Integral mit $\sin z(u-x)$ (anstatt cos) verschwindet, so darf man das Zeichen $\Re$ („Realteil") auch fortlassen und erhält (32).

Führt man an Stelle von x eine neue Variable y durch $e^x = y$ ein und setzt $v(x) = w(y)$, so erhält man den Zusammenhang von (31) und (32) in der im wesentlichen von Riemann gegebenen Form:

$$f(z) = \int_0^{\infty} w(y)\, y^{zi-1}\, dy, \quad w(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, y^{-zi}\, dz. \tag{33}$$

Eine andere, wesentlich gleichwertige Form, die auch den Zusammenhang mit dem Fourierschen Theorem hervortreten läßt, ist die folgende:

$$(34)\quad f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos xz \,.\, v(x)\, dx, \quad v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos xz \,.\, f(z)\, dz.$$

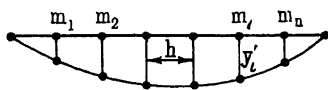
Die diesen Formeln zugrunde liegenden Überlegungen sind gelegentlich angewandt worden zur Berechnung von elektrostatischen Ladungsverteilungen aus gegebenem Potential.

§ 3. Die Idee der unendlich vielen Veränderlichen

Die Beispiele, deren wir uns in § 1 zur Einführung der Integralgleichungen bedient haben, legen die Auffassung nahe, daß es sich hier darum handelt, Gleichungen mit „unendlich vielen Unbekannten" aufzulösen. So ist etwa in § 1, 3 die Integralgleichung (17) unmittelbar dadurch entstanden, daß wir die Zahl n der (als unbekannt anzusehenden) Einzelkräfte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ über jede Grenze hinaus anwachsen ließen, indem wir zu einer stetigen Belastung p übergingen. Derartige Betrachtungen sind schon sehr früh von Lagrange (1759) angestellt worden, und Lord Rayleigh (1877) hat sie zu einem praktischen Verfahren für die Behandlung akustischer Probleme ausgebaut. Aber erst die neuere Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen hat dem Begriff der unendlich vielen Veränderlichen einen festen Platz in der Analysis geschaffen. Wir wollen im folgenden die verschiedenen Richtungen, in denen der fruchtbare Grundgedanke Ausgestaltung und Anwendung gefunden hat, kurz ins Auge fassen.

1. Differenzengleichung. Der einfachste Zusammenhang zwischen Problemen mit endlich vielen und solchen mit unendlich vielen Veränderlichen kommt in dem Verhältnis zwischen Differenzen- (Ketten-) Gleichungen und Differentialgleichungen zum Ausdruck. Wir wollen von dem (dem in § 1, 3 betrachteten analogen) Problem eines gespannten Seiles, das in gleichen Abständen n Punktmassen trägt (Fig. 55), ausgehen. Ist S die Seilspannung, h der Abstand je zweier benachbarter Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, so liefert eine kleine Auslenkung y'_ι der ι-ten Masse eine gegen die Gleichgewichtslage zu gerichtete Kraft von der Größe

Fig. 55

$$-S\left(\frac{y'_{\iota+1} - y'_\iota}{h} - \frac{y'_\iota - y'_{\iota-1}}{h}\right) = -\frac{S}{h}(y'_{\iota+1} - 2\,y'_\iota + y'_{\iota-1}).$$

Diese Kraft ist der mit m_ι multiplizierten Beschleunigung $\ddot{y}'_\iota$ gleichzusetzen. Nimmt man an, daß der zeitliche Verlauf der Bewegung der einer harmonischen Schwingung ist, $y'_\iota = y_\iota \sin \varkappa t$, so erhält man für die y_ι nach Kürzung durch $\sin \varkappa t$:

$$(1) \quad y_{\iota+1} - 2y_\iota + y_{\iota-1} = -\frac{h\varkappa^2}{S} m_\iota y_\iota, \quad \iota = 1, 2 \ldots n \text{ mit } y_0 = y_{n+1} = 0.$$

Dies ist ein linear homogenes Gleichungssystem in n Veränderlichen, dessen Nennerdeterminante mit $\lambda = h\varkappa^2 : S$ lautet:

$$(2) \qquad D_{n+1} = \begin{vmatrix} 2-\lambda m_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda m_2 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda m_n \end{vmatrix}.$$

Nur wenn diese Determinante verschwindet, besitzt (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung (II, § 1, 5), und die Gleichung $D_{n+1} = 0$ liefert so die λ- bzw. $\varkappa$-Werte, die den Frequenzen der Eigenschwingungen entsprechen. Daß die Wurzeln von (2) alle reell sind, erkennt man daraus, daß (2) die Form der Säkulargleichung II, § 2, (12) erhält, wenn man die ι-te Zeile durch $\sqrt{m_\iota}$, die $\varkappa$-te Spalte durch $\sqrt{m_\varkappa}$ dividiert ($\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots n$). Die zugehörige quadratische Form ist, wie sich zeigen läßt, eine positiv definite, daher können die Wurzeln nur positiv sein (S. 64, 65). Mithin folgen aus dem Nullsetzen von (2) in der Tat reelle Frequenzwerte $\varkappa$. Damit ist grundsätzlich das Schwingungsproblem für das aus n Massen bestehende System von n Freiheitsgraden gelöst. Wir wollen die Lösung jetzt so umgestalten, daß sie Schlüsse für den Fall unbegrenzt wachsender n gestattet.

Entwickelt man (2) nach den Elementen der letzten Zeile und bezeichnet man mit D_n, D_{n-1} die zu (2) analogen Determinanten, die aus den ersten $n-1$ bzw. $n-2$ Zeilen und Spalten gebildet werden, so findet man

$$(3) \quad D_{n+1} = (2-\lambda m_n) D_n - D_{n-1} \text{ oder } D_{n+1} - 2D_n + D_{n-1} = -\lambda m_n D_n,$$

d. h. die Zahlenfolge D_2, $D_3 \ldots$ genügt genau derselben Differenzgleichung wie die ursprünglichen Veränderlichen $y_2, y_3 \ldots$. Vergleicht man aber die aus (2) folgenden Werte für D_2 und D_3 miteinander, so zeigt sich, daß $D_0 = 0$, $D_1 = 1$ gesetzt werden muß, damit (2) mit (3) auch für $n = 1$ und $n = 2$ übereinstimmt. Es bildet daher $D_0, D_1, D_2 \ldots$ eine Lösung von (1) mit der „Anfangsbedingung" $D_0 = 0$ (die zweite Bedingung $D_1 = 1$ ist im Hinblick auf den homogenen Charakter des Problems unwesentlich), und die Gleichung $D_{n+1} = 0$ bringt nur die Forderung zum Ausdruck, daß die im

Anfangspunkt verschwindende Lösung von (1) auch im Endpunkt verschwindet.

Mit dieser Deutung der Frequenzdeterminante ist zunächst für die Berechnung der Frequenzen noch nichts gewonnen. Nun bemerke man aber zweierlei. Wenn erstens in (3) $\lambda = 0$ gesetzt wird, liegt die Differenzengleichung vor, die durch die Elemente einer beliebigen arithmetischen Reihe und nur durch solche befriedigt wird. Aus den Bedingungen für $\iota = 0$ und $\iota = 1$ folgt dann, daß die D für $\lambda = 0$ die Werte 0, 1, 2, 3 ... besitzen. Streicht man zweitens in der Determinante (2) die α-te Zeile und α-te Spalte, betrachtet also einen bestimmten Hauptminor $(n-1)$-ter Ordnung, so sieht man, daß er — wofern nur α von 0 und n verschieden ist — als Produkt zweier Determinanten (von den Ordnungen $\alpha - 1$ und $n - \alpha$) der gleichen Form wie (2) erscheint, demnach für $\lambda = 0$ den Wert $\alpha(n + 1 - \alpha)$ besitzt. Dieser Ausdruck bleibt auch noch für $\alpha = 1$ und $\alpha = n$ zutreffend. Ein Hauptminor $(n - k)$-ter Ordnung, der durch Streichen der Zeilen und Spalten mit den Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ entsteht, ist demgemäß gleich dem Produkt $\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \ldots (n + 1 - \alpha_k)$, wobei $1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_k \leqq n$ vorausgesetzt ist. Nun ist die ganze Determinante (2) gewiß ein Polynom n-ten Grades in λ, kann also in der Form

$$D_{n+1} = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 \cdots \pm c_n\lambda^n \tag{4}$$

geschrieben werden. Dabei ist $\pm c_n$ das Produkt $m_1 m_2 \ldots m_n$, c_0 der Wert von D_{n+1} für $\lambda = 0$, also $c_0 = n + 1$, und c_k für irgendein k gleich der Summe aller Ausdrücke von der Form $m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \ldots m_{\alpha_k}$ mal dem durch Streichen der α_1-ten, α_2-ten ... α_k-ten Zeile und Spalte entstehenden Hauptminor bei $\lambda = 0$. Mithin:

$$c_k = \sum_{(\alpha)} \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1) \ldots (n + 1 - \alpha_k) m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \ldots m_{\alpha_k} \quad (k = 1, 2 \ldots n), \tag{4'}$$

die Summation erstreckt über alle Kombinationen ganzer Zahlen, die den Bedingungen $1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_k \leqq n$ genügen. In dieser Gestalt (4), (4′) gestattet der Ausdruck für D_{n+1} einen Grenzübergang zu unendlich großem n in dem Sinne, wie es dem mechanischen Problem der Schwingung eines stetig mit Masse belegten Seiles entspricht.

2. Übergang zur Differentialgleichung. Wenn wir bei einer festen Seillänge l die Abstände $h = l:(n + 1)$ zwischen zwei benachbarten Punktmassen mehr und mehr verkleinern, etwa dadurch, daß wir die Zahl $n + 1$ sukzessive verdoppeln, so erhält ein bestimmter Punkt des Seiles, der einmal Träger einer Punktmasse war, sukzessive sich verdoppelnde Indizes. Die Masse, die diesem Punkt zugeordnet

32*

ist, wollen wir nicht konstant halten, sondern proportional h verkleinern, so daß der Quotient $m_\iota : h$ — bei konstantem Produkt $\iota . h$ — einen nur von der Stelle des Seiles abhängigen Wert $\mu(x)$ besitzt. Die Abszissen x seien etwa vom linken Festpunkt des Seiles aus positiv nach rechts gerechnet. Jedesmal wenn ein n gewählt ist, können wir D_{n+1} nach (4), (4′) bestimmen und durch Nullsetzen dieses Ausdruckes gewisse λ-Werte und daraus ebensoviel $\varkappa$-Werte als Frequenzen der Seilschwingungen ermitteln. Es fragt sich nun, was aus diesen $\varkappa$-Werten wird, wenn wir die Zahl n in der angegebenen Weise ins Unendliche wachsen lassen. Um dies zu erkennen, multiplizieren wir den Ausdruck (4) zunächst mit $h = l:(n+1)$, so daß der erste Koeffizient l wird, und denken uns $\lambda : h$ an Stelle von λ als Variable eingeführt, so daß an Stelle der Koeffizienten c_k neue Koeffizienten gleich $c_k h^{k+1}$ treten. Die Frequenzgleichung lautet dann:

$$l + c_1 h^2\left(-\frac{\lambda}{h}\right) + c_2 h^3\left(-\frac{\lambda}{h}\right)^2 + \cdots + c_n h^{n+1}\left(-\frac{\lambda}{h}\right)^n = 0.$$

Hier kann nun der Grenzübergang in den einzelnen Summanden leicht vollzogen werden. Ersetzt man in (4′) jedes m durch $\mu . h$, so wird zunächst aus $c_1 h^2$ in der Grenze

$$\sum_{\alpha_1} \alpha_1 h(l - \alpha_1 h)\mu(\alpha_1 h) . h \longrightarrow \int_0^l x(l-x)\mu(x)\,dx,$$

da für $\alpha_1 h$ beim Grenzübergang x zu schreiben ist. Der allgemeine Ausdruck für $c_k h^{k+1}$ geht aus einer k-fachen Summe in ein k-faches Integral über mit dem Integranden

$$x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (l - x_k)\mu(x_1)\mu(x_2) \ldots \mu(x_k).$$

Natürlich bricht die Reihe der Glieder nicht ab, sondern an die Stelle des Polynoms (4) tritt eine Potenzreihe. Wenn wir λ für das bisherige $\lambda : h$ schreiben, also $\lambda = \varkappa^2 : S$ setzen, und die neuen Koeffizienten mit $C_k = c_k h^{k+1}$ bezeichnen, so erhalten wir schließlich als Frequenzgleichung für den Fall stetig verteilter Massen:

$$(5)\begin{cases} C_0 - C_1\lambda + C_2\lambda^2 - \cdots = 0 \quad \text{mit} \\ C_0 = l,\; C_k = \int\limits_0^l dx_1 \int\limits_{x_1}^l dx_2 \ldots \int\limits_{x_{k-1}}^l dx_k\, x_1(x_2 - x_1)\ldots(l - x_k)\mu(x_1)\ldots\mu(x_k). \end{cases}$$

Man sieht sehr leicht ein, daß diese Reihe für alle λ gleichmäßig konvergiert, falls $\mu(x)$ beschränkt ist. Hat nämlich $|\mu(x)|$ die obere Schranke M, so ist der zweite Teil des Integranden höchstens gleich M^k, während der erste sein Maximum erreicht für $x_1 = x_2 - x_1 = \cdots = l - x_k$

$= 1/(k+1)$, also höchstens gleich $(k+1)^{-k-1}$ wird. Das Integrationsgebiet hat das Volumen $l^k : k!$, demnach ist

$$|C_k| \leq \frac{l^k}{k!} \frac{M^k}{(k+1)^{k+1}} < \frac{1}{k!}\left(\frac{M\,l}{k}\right)^k.$$

Die Koeffizienten nehmen also stärker ab als die Glieder irgendeiner fallenden geometrischen Reihe, womit die Konvergenz erwiesen ist. Mittels eines Gedankenganges, der später (XII, § 1) näher ausgeführt werden soll, zeigt man, daß die Werte der Polynome D_{n+1} mit wachsendem n gegen die der Potenzreihen (5) gehen, daß dasselbe für $d D_{n+1}/d\lambda$ und die Ableitung der Potenzreihe (5) gilt, und daraus nach dem Cauchyschen Satz, daß die Wurzeln von (5) nur Grenzwerte der Nullstellen von (4) sein können.

Man kann sich nun weiterhin auf verschiedene Standpunkte stellen. Sieht man physikalisch die sogenannte stetige Massenverteilung nur als eine sehr dichte Häufung einzelner Massenpunkte an, so ist der hier angedeutete Rechnungsgang die unmittelbar sich darbietende Theorie, und es bedarf keines weiteren Nachweises, daß die Wurzeln von (5) und nur diese die gesuchten Frequenzen darstellen. Etwas anders liegt es, wenn man neben der Punktmechanik, die wir bei unserer Ableitung allein berücksichtigt haben, einen Differentialgleichungsansatz für die gespannte Saite als physikalische Grundlage gelten läßt. Dann erhebt sich das mathematische Problem: Führt die Integration der Differentialgleichung, nämlich die Lösung von

$$y'' = -\varkappa^2 \frac{\mu}{S}\, y, \quad y(0) = y(l) = 0 \tag{6}$$

(vgl. VII, § 1, 4), zu dem gleichen Ergebnis wie die bisherige Betrachtung? Man kann nun in der Tat an (6) die parallelen Überlegungen anschließen wie an den Ansatz (1), allerdings ohne den Determinantenbegriff, aber mit Verwendung der zweiten Bedeutung von D_{n+1}. Wir skizzieren den Gedankengang, der genau dem in VII, § 2, 2 eingeführten Verfahren der „Grundlösung“ entspricht. Nennen wir $U(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (6), die den Anfangsbedingungen $U(0) = 0$, $d\,U(0)/d\,x = 1$ genügt, und setzen wir

$$U(x) = U_0(x) - \lambda\, U_1(x) + \lambda^2\, U_2(x) - \cdots, \tag{7}$$

so führt Einsetzen in (6) mit $\lambda = \varkappa^2 : S$, $k = 1, 2 \ldots$ zu

$$U_0''(x) = 0,\ U_k'' = \mu U_{k-1};\ U_0(0) = U_k(0) = U_k'(0) = 0,\ U_0'(0) = 1. \tag{8}$$

Daraus folgt, wie man durch zweimaliges Differenzieren erweist:

$$U_0(x) = x, \quad U_k(x) = \int_0^x U_{k-1}(x_k)(x - x_k)\,\mu(x_k)\,d\,x_k \tag{8'}$$

oder auch, durch wiederholte Anwendung der zweiten Formel:

$$(8'') \quad U_k(x) = \int_0^x dx_k \int_0^{x_k} dx_{k-1} \ldots \int_0^{x_2} dx_1 . x_1 (x_2 - x_1) \ldots (x - x_k) \mu(x_1) \ldots \mu(x_k).$$

Die Bedingung dafür, daß die bei $x = 0$ verschwindende Lösung auch bei $x = l$ verschwindet, $U(l) = 0$, führt somit auf genau denselben Ansatz (5) zurück, da $U_k(l)$ offenbar mit C_k identisch ist.

Durch die vorstehenden Betrachtungen wird auf jeden Fall — man mag sich der einen oder der anderen der oben gekennzeichneten physikalischen Auffassungen anschließen — die mathematische Rechtfertigung für das von Lord Rayleigh eingeschlagene Verfahren erbracht: Näherungswerte für die Frequenzen (und die Schwingungsformen) dadurch zu finden, daß man die stetig verteilte Masse in eine endliche Anzahl konzentrierter Punktmassen zerlegt. Man wird sich natürlich, soweit keine besonderen Singularitäten vorliegen, dieses Verfahrens in viel weiterem Umfang bedienen dürfen als dem durch unsere Ableitung unmittelbar gedeckten, beispielsweise bei Stabschwingungen, die auf Gleichungen vierter Ordnung führen (§ 1, **3**), bei anderen Randbedingungen usf.

3. Summen und Integrale. Das genaue Gegenstück zu dem Verhältnis zwischen Differenzen- und Differentialgleichung trifft man im Bereiche der Integralgleichungstheorie an, wenn man ein bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe auffaßt. Wir haben in § 1, **3** angedeutet, wie man unmittelbar von physikalischen Anschauungen aus zu einem Ansatz gelangt, der — bei kontinuierlichen Variablen — die Gestalt einer Integralgleichung besitzt. Wir können uns jetzt von unserer Differenzengleichung (1) aus zu einer „Summengleichung" führen lassen, die dann in eine Integralgleichung übergeht. Schreiben wir nämlich (1) in der Form

$$(9) \qquad -y_{\iota-1} + 2y_\iota - y_{\iota+1} = \varphi_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3 \ldots)$$

und bezeichnen mit $Y_{\iota\varkappa}$ die dem Element der ι-ten Zeile und $\varkappa$-ten Spalte in der Koeffizientenmatrix zugeordnete Unterdeterminante, so lautet die Lösung von (9) nach II, § 1, (8):

$$(10) \qquad y_\iota = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{n} Y_{\varkappa\iota}\varphi_\varkappa}{n+1},$$

da die Gesamtdeterminante von (9), d. i. D_{n+1} für $\lambda = 0$, nach dem oben Gesagten den Wert $n + 1$ besitzt. Die Unterdeterminante $Y_{\varkappa\iota}$ sieht, wenn zunächst $\varkappa < \iota$ vorausgesetzt wird, so aus: In der linken Ecke oben stehen $\varkappa - 1$ unveränderte Zeilen und Spalten, die eine

Determinante der Form (2) mit $\lambda = 0$ bilden; in der rechten Ecke unten steht eine ebenso gebaute Determinante von $n - \iota$ Zeilen und Spalten; die dazwischen liegenden $(\iota - \varkappa)$ Zeilen haben in der Hauptdiagonale immer das Element -1 und links davon lauter Nullen. Demnach ist der absolute Wert von $Y_{\varkappa\iota}$ das Produkt der beiden Eckdeterminanten, d. i. $\varkappa(n + 1 - \iota)$, und das Vorzeichen ist, wenn man die Festsetzung in II, § 1, (6) beachtet, positiv. Bei $\varkappa > \iota$ vertauschen nur die beiden Indizes ihre Rollen. Setzen wir also

$$(11) \quad \begin{cases} K_{\varkappa\iota} = m_\varkappa \dfrac{Y_{\varkappa\iota}}{n+1} = m_\varkappa \cdot \dfrac{\varkappa(n+1-\iota)}{n+1} & \text{für} \quad \varkappa \leqq \iota, \\ \qquad = m_\varkappa \cdot \dfrac{\iota(n+1-\varkappa)}{n+1} & \text{für} \quad \varkappa \geqq \iota, \end{cases}$$

so lautet (10), wenn noch für $\varphi_\varkappa$ der Wert aus (1) eingeführt wird:

$$(12) \qquad y_\iota = \lambda \sum_{\varkappa=1}^{n} K_{\varkappa\iota} y .$$

In dieser Gestalt gleicht der Ansatz schon vollständig den in § 1 besprochenen, die zu der Integralgleichung zweiter Art führten. In der Tat brauchen wir nur, um zum Fall stetiger Massenverteilung überzugehen, die Quotienten $\varkappa:(n+1)$ durch $\xi:l$, dann $\iota:(n+1)$ durch $x:l$, endlich $m_\varkappa.(n+1)$ durch $\mu(\xi)$ zu ersetzen und analog (11) eine Funktion zweier Variablen als „Kern" $K(x, \xi)$ zu definieren:

$$(13) \quad \begin{cases} K(\xi, x) = \mu(\xi) \dfrac{\xi(l-x)}{l} & \text{für} \quad \xi \leqq x, \\ \qquad = \mu(\xi) \dfrac{x(l-\xi)}{l} & \text{für} \quad \xi \geqq x. \end{cases}$$

Dann wird aus (12), mit der wie oben veränderten Bedeutung von λ, die Integralgleichung

$$(14) \qquad y(x) = \lambda \int_0^l K(\xi, x) y(\xi) d\xi.$$

Daß diese mit dem Differentialgleichungsansatz (6) identisch ist, erkennt man am besten durch zweimaliges Differenzieren von (14) unter Beachtung von (13) (wobei man das Integrationsgebiet $0, l$ in die beiden Teile $0, x$ und x, l spalten muß). Da nun einerseits (12) mit (1), andererseits (14) mit (6) übereinstimmt, folgt aus den Überlegungen in 2, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung durch Grenzübergang aus den Lösungen des Gleichungssystems (12) gewonnen werden können. Dieses (12) unterscheidet sich aber von (14) nur dadurch, daß das bestimmte Integral durch

eine Summe ersetzt ist. Im folgenden Kapitel werden wir ein Auflösungsverfahren für Integralgleichungen zweiter Art kennenlernen, das sich ganz auf die formale Analogie zwischen den beiden Ansätzen (12) und (14) stützt.

Handelt es sich um tatsächliche numerische Berechnung von Eigenwerten usf., so kann kein Zweifel darüber bestehen, daß bei dem vorliegenden Problem der Ansatz der Differenzen- bzw. Differentialgleichung der weitaus einfachere ist. Es hat sicherlich keinen Zweck, die einfache Matrix des Gleichungssystems (1) durch die wesentlich kompliziertere von (12) zu ersetzen, oder an Stelle der Grundlösung U und der darauf gegründeten Reihenentwicklung (5) die weit umständlichere treten zu lassen, die man aus den „iterierten Kernen" (XII, § 1, 2) bildet. Aber das Verfahren der Integralgleichungen ist dadurch entscheidend überlegen, daß man damit auch andere Probleme beherrscht, namentlich solche, die aus partiellen Differentialgleichungen entspringen und bei denen der Differenzenansatz nicht mehr zu so bequemen Schlußfolgerungen führt (vgl. z. B. XIII, § 3, 5).

4. Die orthogonalen „Komponenten" einer Funktion. Spricht man heute in der Analysis von „unendlich vielen Variablen", so meint man in der Regel etwas anderes als den Übergang von Differenzen- und Summengleichungen zu Differential- und Integralgleichungen. Wir haben schon an verschiedenen Stellen dieses Buches, besonders ausführlich in VIII, § 1, von der Entwicklung sogenannter willkürlicher Funktionen nach einem Orthogonalsystem gegebener Funktionen gesprochen. Der einfachste und geläufigste Fall ist der der Fourier-Entwicklung. Bezeichnen wir mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\dots$ eine Reihe von normierten orthogonalen Funktionen für ein Intervall a, b (VIII, § 1, 1), als deren Repräsentant etwa die Sinus der Vielfachen von x (mit $a = 0$, $b = 1$)

$$\sqrt{2}\sin \pi x, \quad \sqrt{2}\sin 2\pi x, \quad \sqrt{2}\sin 3\pi x \dots$$

gelten mögen[1]), so kann man eine „willkürliche" Funktion $f(x)$ unter sehr allgemeinen Voraussetzungen in eine Reihe der Form

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \cdots \tag{15}$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten c durch

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \tag{15'}$$

---

[1]) Der Faktor $\sqrt{2}$ ist nur erforderlich, um die Normierungsbedingung $2\int_0^1 \sin^2 n\pi x = 1$ zu erfüllen.

gegeben sind. Es ist in VIII, § 1, 2 näher ausgeführt worden, wie man jede Funktion f als einen „Vektor", die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ als zueinander senkrechte Einheitsvektoren und demgemäß die $c_1, c_2 \ldots$ als die „Komponenten" von f in den Richtungen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ innerhalb eines Raumes von unendlich viel Dimensionen auffassen kann. Man muß nur daran denken, daß ein n-dimensionaler Vektor für $n > 3$ doch auch nur eine gewisse Zusammenfassung von n Zahlen ist, die man der geometrischen Veranschaulichung wegen in Analogie zum Falle $n = 3$ bildet. Der konkrete Inhalt der Analogie ist im wesentlichen nur der, daß, wenn man $\int fg\,dx$ als skalares Produkt von f und g definiert (auf das vektorielle Produkt ist der Gedankengang nicht anwendbar), sich dieses Produkt durch die Fourier-Koeffizienten $c_1, c_2 \ldots$ von f und $k_1, k_2 \ldots$ von g in der Form $c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + \cdots$ darstellt.

Das Operieren mit den abzählbar unendlich vielen Komponenten $c_1, c_2 \ldots$ als den Bestimmungsstücken einer stetigen Funktion nennt man die „Analysis der unendlich vielen Variablen". Grundlegend ist hier der in I, § 5, **3** und VIII, § 1, **5** erwähnte Satz von Fischer und Riesz, der besagt, daß jeder Zahlenfolge $c_1, c_2 \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine, im wesentlichen eindeutig bestimmte, Funktion entspricht. Eine Vorstellung von der Art der Anwendung dieser Begriffsbildungen kann das in § 2, 4 behandelte Beispiel der Integralgleichung mit trigonometrischem Kern vermitteln. Wir hatten dort, § 2, (18′), eine Entwicklung für den Kern $K(x, \xi)$ gefunden, die wir in etwas allgemeinerer Form so schreiben können:

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}, \tag{16}$$

wenn mit λ_n die Eigenwerte $n^2\pi^2$ und mit φ_n die Eigenfunktionen, nämlich die mit $\sqrt{2}$ multiplizierten $\sin n\pi x$ bzw. $\sin n\pi\xi$ bezeichnet werden. Wir werden später (XII, § 3, **3**) sehen, daß eine solche Entwicklung des Kernes in viel allgemeineren Fällen möglich ist. Charakteristisch für die Analysis der unendlich vielen Variablen ist es nun, (16) als Analogie zu der Darstellung einer quadratischen Form in n Veränderlichen, wie sie in II, § 2, (18″) gegeben war, aufzufassen. Die Eigenfunktionen φ_n als Einheitsvektoren spielen jetzt die Rolle der Hauptachsen der durch K bestimmten quadratischen Form. Nimmt man eine beliebige Funktion $f(x)$ durch ihre „Komponenten" c_n gegeben an, so erscheint die Lösung der Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{17}$$

in vollständiger Analogie zu den Ausführungen in II, § 2, 4. Sind nämlich $k_1, k_2 \ldots$ die gesuchten Komponenten von $y(x)$, so erhält man durch Einsetzen von (16) in (17) für jeden Index n:

$$k_n - \lambda \frac{k_n}{\lambda_n} = c_n, \quad \text{also} \quad k_n = c_n\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}\right) \tag{18}$$

und demgemäß die Lösung von (17):

$$y(x) = f(x) + \lambda\left[\frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda}\,\varphi_1(x) + \frac{c_2}{\lambda_2 - \lambda}\,\varphi_2(x) + \cdots\right] \tag{18'}$$

in einer Form, die vollkommen übereinstimmt mit der in II, § 2, (23) gegebenen Lösung des algebraischen Problems. (Vgl. XII, § 3, 4.)

Im übrigen steht die hier betrachtete Analysis von unendlich vielen Veränderlichen in engem Zusammenhang mit den Methoden der Variationsrechnung, die im XX. Kapitel behandelt werden.

Lehrbücher der Integralgleichungstheorie

1. Max. Bôcher, An introduction to the study of integral equations. Cambridge (University Press), 2. Aufl., 1926 (Neudruck). (Ganz kurze Einführung.)
2. A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.), 2. Aufl., 1922.
3. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin (Teubner) 1912.
4. Tr. Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales. Paris (Hermann & fils) 1912.
5. H. B. Heywood und M. Fréchet, L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Paris (Hermann & fils) 1912.
6. E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Encykl. d. Mathem. Wissensch. Bd. II. 3. Teil, Heft 9. Leipzig (Teubner) 1927.

Zwölftes Kapitel

Auflösung der Integralgleichungen

In den §§ 1 bis 3 dieses Kapitels wird vorausgesetzt, daß der Kern der zu lösenden Integralgleichung eine stetige und beschränkte Funktion ist und daß ihr Grundgebiet ganz im Endlichen liegt. Bei mehrdimensionalen Problemen nehmen wir überdies auch an, daß das Integrationsgebiet von endlich vielen analytischen Stücken (Kurven oder Flächen) begrenzt wird. Derartige Integralgleichungen nennen wir regulär.

In § 4 werden bestimmte Fälle, die diesen Einschränkungen nicht unterliegen, als „singuläre" Integralgleichungen behandelt.

§ 1. Fredholm-Hilbertsche Auflösungsformel

Aus der weitgehenden Analogie zwischen Systemen linearer Gleichungen mit n Unbekannten und Integralgleichungen haben Fredholm (1903) und Hilbert (1904) eine allgemeine Auflösungsformel für die Integralgleichungen zweiter Art abgeleitet. Sie stützt sich auf das kräftigste Hilfsmittel aus der Theorie linearer Gleichungen, die Determinanten; ihre tatsächliche Anwendung erfordert aber, wie wir sehen werden, in keinem Falle die Ausrechnung irgendwelcher Determinanten höherer Ordnung.

1. Algebraische Gleichungen. Wir gehen von der folgenden algebraischen Aufgabe aus, deren enge Verwandtschaft mit dem Integralgleichungsproblem schon aus dem vorangehenden Kapitel erhellt. Vorgelegt seien n lineare, nichthomogene Gleichungen mit den n Unbekannten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in der Gestalt

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 - \frac{\lambda}{n}[K_{11}y_1 + K_{12}y_2 + \cdots + K_{1n}y_n] = f_1, \\ y_2 - \frac{\lambda}{n}[K_{21}y_1 + K_{22}y_2 + \cdots + K_{2n}y_n] = f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n - \frac{\lambda}{n}[K_{n1}y_1 + K_{n2}y_2 + \cdots + K_{nn}y_n] = f_n. \end{cases}$$

Wir wollen die Lösung dieser Gleichungen in eine Form zu bringen suchen, die den Einfluß der verschiedenen gegebenen Größen, des Parameters λ, der Koeffizienten $K_{\iota\varkappa}$ (des sogenannten Kerns der Gleichungen), endlich der rechten Seiten f_ι, gesondert möglichst deutlich zum Ausdruck bringt. Dabei setzen wir zunächst voraus, daß die Gleichungen eine eindeutige Lösung besitzen, daß also (II, § 1, **3**) ihre Koeffizientendeterminante nicht verschwindet.

Führen wir für den Augenblick an Stelle der y_ι die Differenzen $z_\iota = y_\iota - f_\iota$ als Unbekannte ein, so nimmt die erste der Gl. (1) die Gestalt an:

$$(2)\quad z_1 - \frac{\lambda}{n}[K_{11}z_1 + K_{12}z_2 + \cdots + K_{1n}z_n] = \frac{\lambda}{n}[K_{11}f_1 + K_{12}f_2 + \cdots + K_{1n}f_n]$$

und analog jede folgende. Aus dem allgemeinen, in II, § 1, **1** näher erörterten Verhalten linearer Gleichungen folgt daher, daß in der Lösung von (2) der Faktor $\frac{\lambda}{n}$ vor die Klammer tritt und daß die Lösung überdies linear und homogen in den f_ι ist. Wir haben also,

wenn wir wieder $y_\iota - f_\iota$ für z_ι schreiben und das f_ι nach rechts hinübernehmen, die Lösung von (2) in der Form

$$(3)\quad \begin{cases} y_1 = f_1 + \frac{\lambda}{n}[\Gamma_{11} f_1 + \Gamma_{12} f_2 + \cdots + \Gamma_{1n} f_n], \\ y_2 = f_2 + \frac{\lambda}{n}[\Gamma_{21} f_1 + \Gamma_{22} f_2 + \cdots + \Gamma_{2n} f_n], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n + \frac{\lambda}{n}[\Gamma_{n1} f_1 + \Gamma_{n2} f_2 + \cdots + \Gamma_{nn} f_n]. \end{cases}$$

Dabei bedeutet die erste Spalte der rechts stehenden Koeffizienten $\Gamma_{\iota\varkappa}$ (des sogenannten **lösenden Kernes** der ursprünglichen Gleichungen), also die Zahlenreihe $\frac{\lambda}{n}\Gamma_{11}, \frac{\lambda}{n}\Gamma_{21}, \ldots, \frac{\lambda}{n}\Gamma_{n1}$, die Lösung des Gleichungssystems (2) für die Annahme $f_1 = 1$, $f_2 = f_3 = f_n = 0$, oder, was dasselbe ist, die Lösung von (1), wenn hier auf der rechten Seite statt der f_ι die Zahlenfolge $\frac{\lambda}{n} K_{11}, \frac{\lambda}{n} K_{21}, \ldots, \frac{\lambda}{n} K_{n1}$ geschrieben wird — denn die linken Seiten von (1) und (2) sind ja identisch. Läßt man den durchgängigen Faktor $\frac{\lambda}{n}$ fort, so sieht man, daß der lösende Kern $\Gamma_{\iota\varkappa}$ sich so definieren läßt: **Die erste, zweite, ..., n-te Spalte der Γ ist die Lösung eines Gleichungssystems, dessen linke Seite mit (1) oder (2) übereinstimmt und auf dessen rechter Seite die erste, zweite, ..., n-te Spalte des ursprünglichen Kernes K steht**; die $\varkappa$-te Spalte ist gegeben durch:

$$(4)\quad \begin{cases} \Gamma_{1\varkappa} - \frac{\lambda}{n}[K_{11}\Gamma_{1\varkappa} + K_{12}\Gamma_{2\varkappa} + \cdots + K_{1n}\Gamma_{n\varkappa}] = K_{1\varkappa}, \\ \Gamma_{2\varkappa} - \frac{\lambda}{n}[K_{21}\Gamma_{1\varkappa} + K_{22}\Gamma_{2\varkappa} + \cdots + K_{2n}\Gamma_{n\varkappa}] = K_{2\varkappa}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma_{n\varkappa} - \frac{\lambda}{n}[K_{n1}\Gamma_{1\varkappa} + K_{n2}\Gamma_{2\varkappa} + \cdots + K_{nn}\Gamma_{n\varkappa}] = K_{n\varkappa} \end{cases}$$

für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$. Man kann auch unmittelbar durch Einsetzen von (3) in (1), indem man gleichzeitig $f_\varkappa = 1$, alle anderen f gleich Null wählt, (4) gewinnen.

Aus (4) folgt jedenfalls, daß die Γ von den f unabhängig sind, so daß in der Lösungsform (3) schon der Einfluß der f abgesondert ist. Um noch den letzten Schritt zu machen und den Einfluß von λ herauszuheben, bedenken wir zunächst, daß nach der **Cramerschen**

Regel (II, § 1, **3**) die Lösung von (1) notwendig die Form eines Bruches haben muß, dessen Nenner die Koeffizientendeterminante von (1)

$$(5)\qquad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{n}K_{11} & -\frac{\lambda}{n}K_{12} & \dots & -\frac{\lambda}{n}K_{1n} \\ -\frac{\lambda}{n}K_{21} & 1-\frac{\lambda}{n}K_{22} & \dots & -\frac{\lambda}{n}K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\lambda}{n}K_{n1} & -\frac{\lambda}{n}K_{n2} & \dots & 1-\frac{\lambda}{n}K_{nn} \end{vmatrix}$$

ist; diese ist, wie man hier sieht, ein Polynom von n-tem Grad in λ mit dem absoluten Glied 1, kann also etwa so geschrieben werden:

$$(5')\qquad D_n(\lambda) = 1 + d_1^{(n)}\lambda + d_2^{(n)}\lambda^2 + \cdots + d_n^{(n)}\lambda^n.$$

Die Zähler der Brüche, die sich nach der Cramerschen Regel für die Unbekannten ergeben, sind Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung von (5), also Polynome vom Grade $n-1$ in λ. Wenn wir die Zerlegung der y in additive Bestandteile nach (3) beibehalten, so erscheint jedes $\Gamma_{\iota\varkappa}$, d. i. jedes Element des lösenden Kernes Γ, als Quotient eines Polynoms $(n-1)$-ten durch ein Polynom n-ten Grades in λ:

$$(6)\qquad \Gamma_{\iota\varkappa} = \frac{D_{\iota\varkappa}(\lambda)}{D_n(\lambda)} = \frac{d_0^{(\iota\varkappa)} + d_1^{(\iota\varkappa)}\lambda + d_2^{(\iota\varkappa)}\lambda^2 + \cdots + d_{n-1}^{(\iota\varkappa)}\lambda^{n-1}}{1 + d_1^{(n)}\lambda + d_2^{(n)}\lambda^2 + \cdots + d_n^{(n)}\lambda^n}.$$

Durch (3) und (6) ist die Lösung von (1) in der gewünschten Form gegeben. Für die Koeffizienten im Zähler und Nenner von (6) werden wir später (**4**) — und zwar gleich für den Fall der Integralgleichung selbst — einfache Formeln angeben, die ihre Berechnung Schritt für Schritt gestatten. Nur um den Konvergenzbeweis, der später notwendig wird, führen zu können, müssen wir für die d auch eine Definition in Determinantenform geben, die zur wirklichen Berechnung allerdings nicht geeignet ist.

Da jedes Element der Determinante (5) außerhalb der Hauptdiagonale den Faktor λ enthält, so bekommt man bei der Entwicklung von (5) dann und nur dann ein Glied von m-ter Ordnung $(m < n)$ in λ, wenn man $n-m$ Elemente aus der Hauptdiagonale nimmt und von diesen bei der Multiplikation nur die Einser beibehält, während man in den weiter hinzutretenden m Faktoren, soweit sie aus der Hauptdiagonale stammen, die Einser wegläßt. Nach dem allgemeinen Laplaceschen Entwicklungssatz sind $n-m$ Hauptdiagonalelemente jeweils zu multiplizieren mit der Determinante m-ter Ordnung, die aus der ganzen Determinante durch Streichen

der $n-m$ Zeilen und Spalten, die sich in den betreffenden Hauptdiagonalelementen schneiden, entsteht. Bezeichnen wir mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Nummern der Zeilen und Spalten, die nach dem Streichen übrigbleiben, so ist das allgemeine Entwicklungsglied von (5) das Produkt von $\left(-\frac{\lambda}{n}\right)^m$ mal der Determinante m-ter Ordnung auf der rechten Seite von (7). Lassen wir die α alle Kombinationen zu m aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen und summieren alle diese Determinanten, so treten immer je $m!$ Determinanten auf, die sich nur in der Anordnung der Zeilen und Spalten, also nicht dem Werte nach, unterscheiden und von denen jedesmal nur eine, z. B. die mit der natürlichen Aufeinanderfolge der α_i, beizubehalten wäre. Daher können wir schreiben:

$$(7) \qquad d_m^{(n)} = \frac{(-1)^m}{n^m} \frac{1}{m!} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1 \alpha_1} & K_{\alpha_1 \alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1 \alpha_m} \\ K_{\alpha_2 \alpha_1} & K_{\alpha_2 \alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2 \alpha_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\alpha_m \alpha_1} & K_{\alpha_m \alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_m \alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Um auch die Zählerkoeffizienten von (6) zu bestimmen, gehen wir von den die Γ definierenden Gleichungen (4) aus und denken uns die ι-te unter ihnen in der Form

$$(8) \qquad -\frac{\lambda}{n}[K_{\iota 1}\Gamma_{1\varkappa} + K_{\iota 2}\Gamma_{2\varkappa} + \cdots + K_{\iota n}\Gamma_{n\varkappa}] = K_{\iota\varkappa} - \Gamma_{\iota\varkappa}$$

noch einmal daruntergeschrieben. Da die $n+1$ Gleichungen (4) plus (8) für die n Variablen $\Gamma_{1\varkappa}, \Gamma_{2\varkappa}, \ldots, \Gamma_{n\varkappa}$ miteinander verträglich sind, muß die Determinante $(n+1)$-ter Ordnung, gebildet aus ihren Koeffizienten und rechten Seiten, verschwinden (II, § 1, 5). Die Determinante in (9) unterscheidet sich von dieser nur dadurch, daß im letzten Element rechts unten $K_{\iota\varkappa}$ statt $K_{\iota\varkappa} - \Gamma_{\iota\varkappa}$ steht. Das letzte Element ist aber mit der Determinante aus den ersten n Zeilen und Spalten zu multiplizieren, die, wie man sieht, genau mit $D_n(\lambda)$ nach (5) übereinstimmt. Es fehlt somit links in (9) zu der verschwindenden Determinante nur das Produkt $-D_n(\lambda)\Gamma_{\iota\varkappa}$; also ist:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{n}K_{11} & -\frac{\lambda}{n}K_{12} & \ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{1n} & K_{1\varkappa} \\ -\frac{\lambda}{n}K_{21} & 1-\frac{\lambda}{n}K_{22} & \ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{2n} & K_{2\varkappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\lambda}{n}K_{n1} & -\frac{\lambda}{n}K_{n2} & \ldots & 1-\frac{\lambda}{n}K_{nn} & K_{n\varkappa} \\ -\frac{\lambda}{n}K_{\iota 1} & -\frac{\lambda}{n}K_{\iota 2} & \ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{\iota n} & K_{\iota\varkappa} \end{vmatrix} - \Gamma_{\iota\varkappa}D_n(\lambda) = 0.$$

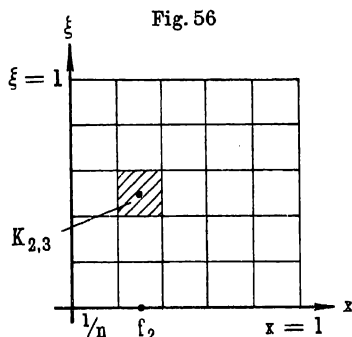
Andererseits ist nach (6) die gesuchte Zählerdeterminante $D_{\iota\varkappa}$ gerade das Produkt $\Gamma_{\iota\varkappa} D_n$, so daß die Determinante in (9) mit $D_{\iota\varkappa}$ identisch ist. Wie man sieht, unterscheidet sich $D_{\iota\varkappa}(\lambda)$ von $D_n(\lambda)$ nur dadurch, daß die letztere Determinante „gerändert" wird mit einer Spalte und Zeile, die von den Indizes ι und $\varkappa$ abhängen. Die Entwicklung von (9) nach Potenzen von λ erfolgt daher in genau gleicher Weise, wie es oben für $D_n(\lambda)$ beschrieben wurde; die Determinanten rechts in (7) erhalten nur ihren Rand, der aus den betreffenden Teilen des Randes von (9) besteht:

$$(10)\quad d_m^{(\iota\varkappa)} = \frac{(-1)^m}{n^m}\frac{1}{m!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_m} & K_{\alpha_1\varkappa} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_m} & K_{\alpha_2\varkappa} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_m\alpha_m} & K_{\alpha_m\varkappa} \\ K_{\iota\alpha_1} & K_{\iota\alpha_2} & \ldots & K_{\iota\alpha_m} & K_{\iota\varkappa} \end{vmatrix}.$$

2. Übertragung auf die Integralgleichung. Ist nun an Stelle des Gleichungssystems (1) die reguläre Integralgleichung zweiter Art

$$(11)\qquad y(x) - \lambda\int_0^1 K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = f(x)$$

vorgelegt, so ist leicht zu erkennen, wie sich die eben abgeleiteten Resultate hierher übertragen lassen. Denken wir uns das von der x- und ξ-Achse sowie den Geraden $x = 1$, $\xi = 1$ begrenzte Quadrat der x-ξ-Ebene durch zweimal $n-1$ äquidistante Parallellinien in n^2 gleiche Quadrate geteilt, und bezeichnen wir mit $K_{\iota\varkappa}$ den Wert von $K(x,\xi)$ im Mittelpunkt (oder einem irgendwie anders gewählten Punkt) desjenigen Quadrates, das dem ι-ten Abschnitt von x und dem $\varkappa$-ten Abschnitt von ξ entspricht, ebenso mit f_ι den Wert von $f(x)$ im Mittelpunkt des ι-ten Intervalls auf der x-Achse. Damit wird, für ein beliebiges n, der Integralgleichung (11) ein Gleichungssystem der Form (1) eindeutig zugeordnet. Stellen wir uns

Fig. 56

nun vor, diese Gl. (1) seien gelöst und die n Werte von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als konstante Ordinaten über den n Teilintervallen der x-Achse aufgetragen. Läßt man n größer und größer werden [wobei jedesmal die f_ι und $K_{\iota\varkappa}$ aus $f(x)$ und $K(x,\xi)$ berechnet werden], so kann es sein, daß die Treppenlinie der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ allmählich in eine

stetige Kurve übergeht, die dann eine eindeutige Funktion $y(x)$ darstellt. Trifft das tatsächlich zu, so muß dieses $y(x)$ eine Lösung von (11) sein; denn bei genügend großem n kann man jedem Wert von x den Mittelpunkt eines Intervalls beliebig nahe bringen, und für alle Mittelpunkte ist (1), das sich dann beliebig wenig von (11) unterscheidet, erfüllt. Andererseits kann es keine stetige Lösung $y(x)$ von (11) geben, ohne daß für hinreichend große n der Unterschied zwischen $y(x)$ und der Lösung y_ι von (1) für den dem x nächstbenachbarten Intervallmittelpunkt gegen Null ginge.

Um nachzuweisen, daß tatsächlich die Treppenlinie der $y_1, \ldots, y_n$ gegen eine stetige Funktion $y(x)$ konvergiert, werden wir in **3** zeigen, daß eine analoge Eigenschaft für die $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{nn}$ besteht, nämlich: Denkt man sich die n^2 aus (6) ermittelten Zahlen Γ_{11} bis Γ_{nn} als konstante Ordinaten über den Punkten jedes der n^2 Teilquadrate aufgetragen, die in der x-ξ-Ebene durch Zerlegung des Quadrates von der Seitenlänge 1 entstanden sind, so behaupten wir, daß diese „Treppenfläche" gegen eine stetige Funktion $\Gamma(x, \xi)$ konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst. Ist das bewiesen, so folgt aus (3), daß sich die Lösung $y(x)$ von (11) in die Form bringen läßt:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

wo Γ von f unabhängig ist. Man nennt dieses $\Gamma(x, \xi)$ den lösenden Kern der Integralgleichung (11) und zeigt für ihn leicht die zu (4) analoge Eigenschaft, bei konstantem ξ die Lösung von (11) zu sein, wenn auf die rechte Seite $K(x, \xi)$ statt $f(x)$ gesetzt wird. Um dies nachzuweisen, führe man (12) in (11) ein, wobei man nur für die Integrationsvariable in (11) einen beliebigen anderen Buchstaben, z. B. ϱ, zu setzen hat. Dann erhält man:

$$f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi - \lambda \int_0^1 K(x, \varrho) f(\varrho)\, d\varrho$$
$$- \lambda^2 \int_0^1 K(x, \varrho) \int_0^1 \Gamma(\varrho, \xi) f(\xi)\, d\xi \,.\, d\varrho = f(x).$$

Hier fällt $f(x)$ beiderseits fort, durch λ läßt sich kürzen, und da das, was bleibt, für jede Wahl von $f(x)$ gelten muß, so muß der Klammerausdruck (der Faktor von f) im Integranden von

$$\int_0^1 [\Gamma(x, \xi) - K(x, \xi) - \lambda \int_0^1 K(x, \varrho) \Gamma(\varrho, \xi)\, d\varrho] f(\xi)\, d\xi = 0 \tag{13}$$

verschwinden. Das liefert aber genau die zu (4) analoge Gleichung, die aus (11) hervorgeht, wenn darin $\Gamma(x,\xi)$ für $y(x)$ und $K(x,\xi)$ für $f(x)$ gesetzt wird.

Es ist auch leicht anzugeben, wie $\Gamma(x,\xi)$ aussehen muß, wenn es wirklich, wie wir zunächst voraussetzen und später beweisen werden, durch Grenzübergang aus den $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{nn}$ gewonnen werden kann. Aus den beiden Polynomen im Zähler und Nenner von (6) werden für $n = \infty$ Potenzreihen:

$$(14) \quad \Gamma(x,\xi) = \frac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{K(x,\xi) + d_1(x,\xi)\lambda + d_2(x,\xi)\lambda^2 + \cdots}{1 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \cdots},$$

deren Koeffizienten die Grenzwerte der in (7) und (10) definierten Koeffizienten der beiden Polynome sein müssen. Zufolge der Erklärung der $K_{\iota\varkappa}$ sind diese Grenzwerte der m-fachen Summen in (7) und (10) die m-fachen Integrale:

$$(15) \quad d_m = \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^1 \begin{vmatrix} K(\alpha_1,\alpha_1) & K(\alpha_1,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ K(\alpha_2,\alpha_1) & K(\alpha_2,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(\alpha_m,\alpha_1) & K(\alpha_m,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m.$$

$$(16) \quad d_m(x,\xi) = \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^1 \begin{vmatrix} K(\alpha_1,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) & K(\alpha_1,\xi) \\ K(\alpha_2,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_2,\alpha_m) & K(\alpha_2,\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(\alpha_m,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m) & K(\alpha_m,\xi) \\ K(x,\alpha_1) & \ldots & K(x,\alpha_m) & K(x,\xi) \end{vmatrix} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m.$$

Die Integration ist hinsichtlich aller Variablen von 0 bis 1 zu erstrecken. In (16) ist der Grenzübergang so zu verstehen, daß bei jedem n der den festgehaltenen x, ξ-Werten nächstgelegene Quadratmittelpunkt für $K_{\iota\varkappa}$ gewählt wird.

Alle in diesem Abschnitt gegebenen Formeln bleiben gültig, wenn die Integrationsgrenzen statt 0 und 1 irgendwelche endlichen Zahlen $a < b$ sind. Nur um den Grenzübergang zu vollziehen, muß man im allgemeinen Falle vorher eine triviale Koordinatentransformation eintreten lassen. Dagegen sind unsere Überlegungen nicht ohne weiteres auf den Fall unendlicher Grenzen oder unendlich werdender $K(x,\xi)$ übertragbar, weil dann die Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe nicht mehr zu Recht besteht.

Für die Koeffizienten d_m und $d_m(x,\xi)$ werden wir in 4 Rekursionsformeln kennenlernen, die ihre tatsächliche Berechnung ermöglichen, von (15) und (16) machen wir bei dem jetzt folgenden Konvergenzbeweis Gebrauch.

3. Konvergenzbeweis. Um nachzuweisen, daß die Lösung der regulären Integralgleichung (11) durch die Formel (12) geliefert wird, bei der in (14) bis (16) erklärten Bedeutung von $\Gamma(x, \xi)$, haben wir folgendes zu zeigen:

1. Daß die beiden Reihen im Zähler und Nenner von (14) für alle λ konvergent sind.

2. Daß der Wert der beiden Polynome im Zähler und Nenner von (6) mit wachsendem n gegen den Wert der eben genannten Reihen konvergiert, und zwar für jedes λ, x und ξ.

Aus diesen beiden Sätzen folgt in der Tat, daß die in (14) angeschriebene Größe $\Gamma(x, \xi)$ bei nicht verschwindendem Nenner eine stetige Funktion von x und ξ bildet, und daß die oben erwähnte „Treppenfläche" der $\Gamma_{\iota\varkappa}$ gegen diese Funktion konvergiert. Die Einschränkung, daß $D(\lambda)$ nicht verschwindet, darf nicht außer acht gelassen werden.

Den ersten Teil erledigen wir durch Berufung auf einen von Hadamard herrührenden Determinantensatz, wonach der Absolutwert einer Determinante nicht größer sein kann als das Produkt aus den Längen der aus den Elementen jeder Reihe als Komponenten gebildeten Vektoren. Da $K(x, \xi)$ beschränkt ist, ist die Vektorlänge für jede Reihe der in (15) auftretenden Determinante nicht größer als $K\sqrt{m}$, wo K eine obere Schranke der $K(x, \xi)$ ist. Der Absolutwert der Determinante ist dann nicht größer als $K^m \sqrt{m^m}$, daher wegen $m! > m^m e^{-m}$:

$$(17) \quad \begin{cases} |d_m| \leq \dfrac{K^m \sqrt{m^m}}{m!} < \dfrac{(K e)^m}{\sqrt{m^m}}; \\ |d_m(x, \xi)| \leq \dfrac{K^{m+1} \sqrt{(m+1)^{m+1}}}{m!} < \dfrac{(K e)^{m+1} \sqrt{(m+1)^{m+1}}}{(m+1)^{m-1}} \\ \qquad = \dfrac{(K e)^{m+1}}{\sqrt{(m+1)^{m-3}}}. \end{cases}$$

Zufolge der Größe der Nenner in diesen Ausdrücken gehen die Glieder der beiden Reihen in (14) für beliebige λ, x und ξ stärker gegen Null als die irgendeiner geometrischen Reihe [vgl. auch IV, § 1, (11)]; die Reihen in (14) konvergieren also gleichmäßig für alle endlichen Werte von $|\lambda|$ und für alle x und ξ des Integrationsgebietes.

Dieselben Schranken wie in (17) gelten auch für die durch (7) und (10) definierten Koeffizienten der Polynome. Denn die Summe, die in (7) für $d_m^{(n)}$ angeschrieben wurde, besteht aus n^m (übrigens

zum Teil verschwindenden) m-reihigen Determinanten, deren Absolutwert die Schranke $K^m \sqrt{m^m}$ besitzt. Zufolge des Nenners n^m in (7) und (10) hat man daher auch

$$(18) \qquad |d_m^{(n)}| < \frac{(Ke)^m}{\sqrt{m^m}}; \qquad |d_m^{(\iota\varkappa)}| < \frac{(Ke)^{m+1}}{\sqrt{(m+1)^{m-3}}}.$$

Hier ist entscheidend, daß die rechten Seiten von n nicht abhängen. Denn man kann danach ein m_0 so groß wählen, daß **für alle** n der Wert der Polynome $D_n(\lambda)$ und $D_{\iota\varkappa}(\lambda)$ durch die Summe ihrer ersten m_0 Glieder bis auf einen beliebig angegebenen Fehlerbetrag, sagen wir $\varepsilon/3$, genau wiedergegeben wird. Für dasselbe m_0 ist dann auch der Rest der Potenzreihen $D(\lambda)$ und $D(x, \xi; \lambda)$ höchstens gleich $\varepsilon/3$. Nun haben wir aber schon oben bemerkt, daß jeder einzelne Koeffizient $d_m^{(n)}$ bzw. $d_m^{(\iota\varkappa)}$ zufolge der Definition der $K_{\iota\varkappa}$ und der Eigenschaft bestimmter Integrale (im Riemannschen Sinne) gegen die in (15) und (16) angeschriebenen Koeffizienten d_m bzw. $d_m(x, \xi)$ geht, wenn n wächst. Man kann daher, nachdem m_0 schon feststeht, ein n so groß wählen, daß für jeden der in Betracht kommenden Koeffizienten der Unterschied zwischen der Summe in (7) bzw. (10) und dem zugehörigen Integralwert (15) bzw. (16) nicht größer als $\varepsilon/3\,m_0$ wird; dann unterscheidet sich die mit dem m_0-ten Glied abgebrochene Potenzreihe um höchstens $\varepsilon/3$ von dem abgebrochenen Polynom und daher die vollständige Reihe von dem vollständigen Polynom nach dem Früheren höchstens um $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Damit ist bewiesen, daß jedes der Polynome $D_n(\lambda)$ und $D_{\iota\varkappa}(\lambda)$ gegen die betreffende Potenzreihe $D(\lambda)$ bzw. $D(x, \xi; \lambda)$, also auch, falls $D(\lambda)$ nicht verschwindet, der Quotient $\Gamma_{\iota\varkappa}$ gegen $\Gamma(x, \xi)$ konvergiert, und zwar gleichmäßig für alle x und ξ des Bereiches und alle irgendwie begrenzten λ-Werte.

Auf Grund dieser im wesentlichen von Hilbert stammenden Überlegung wird die in (12) bis (16) enthaltene Fredholmsche Auflösungsformel der regulären Integralgleichung zweiter Art als zu Recht bestehend erkannt. Sie enthält das für die gesamte Theorie fundamentale Resultat, daß der lösende Kern der Integralgleichung (11) sich ebenso wie der des linearen Gleichungssystems (1) als Quotient zweier ganzer Funktionen von λ darstellen läßt. Die Lösung versagt natürlich für solche λ, für die die Nennerreihe verschwindet.

4. Berechnung der Koeffizienten durch Rekursion. Wir tragen die oben schon angekündigten Rekursionsformeln für die d_m und $d_m(x, \xi)$ nach, die für ihre praktische Berechnung unentbehrlich sind. Setzt man in (16) $x = \xi$ ein, so erhält die Determinante unter dem

Integralzeichen dieselbe Form wie die im Integranden von (15) vorkommende für den Index $m+1$. Integriert man also $d_m(\xi,\xi)$ nochmals über ξ, so entsteht, bis auf den Faktor $-1:(m+1)$, der Ausdruck für d_{m+1} mit $m = 0, 1, 2 \ldots$:

$$d_{m+1} = -\frac{1}{m+1}\int_0^1 d_m(\xi,\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Für $d_0(\xi,\xi)$ ist dabei $K(\xi,\xi)$ zu nehmen. Damit ist die Berechnung der $d_1, d_2, \ldots$ auf die der $d_m(x,\xi)$ zurückgeführt, und man kann sofort daraus eine Beziehung zwischen den Reihen

$$\begin{cases} D(\lambda) = 1 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3 + \cdots, \\ D(x,\xi;\,\lambda) = K(x,\xi) + d_1(x,\xi)\lambda + d_2(x,\xi)\lambda^2 + \cdots \end{cases} \tag{20}$$

ableiten. Wird nämlich die zweite, nachdem $x = \xi$ gesetzt ist, über ξ von 0 bis 1 integriert, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz gliedweise geschehen darf, die erste aber nach λ differenziert, so zeigt die Vergleichung der einzelnen Glieder zufolge (19):

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\int_0^1 D(\xi,\xi;\,\lambda)\,d\xi. \tag{21}$$

Multipliziert man den Integranden von (13), von dem oben gezeigt wurde, daß er identisch verschwinden muß, mit $D(\lambda)$, so erhält man mit Benutzung von (14) die in vielfacher Hinsicht sehr wichtige Gleichung

$$D(x,\xi;\,\lambda) = K(x,\xi)D(\lambda) + \lambda\int_0^1 K(x,\varrho)D(\varrho,\xi;\,\lambda)\,d\varrho. \tag{22}$$

Führt man hier beiderseits für die D die Reihenentwicklungen (20) ein und vergleicht die Koeffizienten von λ^m, so gewinnt man die gesuchte Rekursionsformel für die $d_m(x,\xi)$ mit $m = 0, 1, 2 \ldots$:

$$d_m(x,\xi) = K(x,\xi)\,d_m + \int_0^1 K(x,\varrho)\,d_{m-1}(\varrho,\xi)\,d\varrho. \tag{23}$$

Da $d_0(x,\xi) = K(x,\xi)$ bekannt ist, so sieht man, daß mit (19) und (23) die Fredholmschen Reihen (20) und daher alle Lösungen der Integralgleichung (11) für irgendwelche rechten Seiten $f(x)$ berechnet werden können, ohne daß auch nur eine einzige Determinante ausgemittelt zu werden braucht. Die Rechnung, die wir im folgenden Kapitel an einem Beispiel erläutern werden, erfordert lediglich die Ausführung wiederholter Quadraturen. — Natürlich

bestehen zu (19) und (23) analoge Formeln für das algebraische Problem von 1, die wir hier nur anführen:

$$(24)\qquad \begin{cases} d_{m+1}^{(n)} = -\dfrac{1}{m+1}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} d_m^{\varkappa\varkappa)}, \\ d_m^{(\iota\varkappa)} = K_{\iota\varkappa}\, d_m^{(n)} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{\varrho=1}^{n} K_{\iota\varrho}\, d_{m-1}^{(\varrho\varkappa)}. \end{cases}$$

Zusammenfassend wollen wir sagen: Die reguläre Integralgleichung (11) wird gelöst durch den Ansatz (12), wobei der lösende Kern Γ durch (14) gegeben ist; die Koeffizienten der beiden Reihen in (14) sind nach (19) und (23) schrittweise zu berechnen.

5. Homogene Gleichung. Die eben abgeleiteten Beziehungen (21) und (22) setzen uns auch instand, die homogene Integralgleichung zweiter Art:

$$(25)\qquad y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0,$$

zu behandeln. Aus der Auflösungsformel (12) sieht man zunächst, daß mit $f = 0$ auch die Lösung y verschwindet. Dies gilt unter der Voraussetzung, unter der (12) bewiesen wurde, nämlich daß die Nennerreihe $D(\lambda)$ in (14) von Null verschieden ist. Nur wenn $D(\lambda) = 0$ ist, kann die homogene Gleichung eine Lösung außer der trivialen $y = 0$ besitzen. Eine solche ist auch leicht anzugeben, wenn man bedenkt, daß (22) auch bestehen bleiben muß, wenn man für λ einen Wert λ_1 setzt, für den $D(\lambda_1) = 0$ ist. Denn jedes Glied dieser Gleichung behält, wenn man zu $\lambda = \lambda_1$ übergeht, seinen Sinn. Dann hat man also

$$(26)\qquad D(x,\xi;\lambda_1) = \lambda_1 \int_0^1 K(x,\varrho)\, D(\varrho,\xi;\lambda_1)\, d\varrho,$$

das heißt aber nichts anderes, als daß die Potenzreihe $D(x,\xi;\lambda)$ bei festgehaltenem, beliebigem ξ und $\lambda = \lambda_1$ die homogene Gl. (25) löst. Freilich ist es möglich, daß $D(x,\xi;\lambda_1)$ identisch in x und ξ verschwindet, so daß (26) doch nur wieder die triviale Lösung wäre.

Angenommen nun, es sei λ_1 eine k-fache Nullstelle der Potenzreihe $D(x,\xi;\lambda)$, es beginne also die Entwicklung nach Potenzen von $(\lambda - \lambda_1)$ mit dem k-ten Gliede:

$$D(x,\xi;\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^k d_k'(x,\xi) + (\lambda-\lambda_1)^{k+1} d_{k+1}'(x,\xi) + \cdots;$$

dann zeigt die gleiche Überlegung, die zu (23) führte, daß die Entwicklung von $D(\lambda)$ erst mit dem $(k+1)$-ten Gliede beginnen kann:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k+1} d'_{k+1} + (\lambda - \lambda_1)^{k+2} d'_{k+2} + \cdots.$$

Setzt man diese Reihenentwicklungen in (22) ein, kürzt durch die k-te Potenz von $\lambda - \lambda_1$ und läßt dann $\lambda = \lambda_1$ werden, so erhält man

$$d'_k(x, \xi) = \lambda_1 \int_0^1 K(x, \varrho)\, d'_k(\varrho, \xi)\, d\varrho. \tag{27}$$

Diese Gleichung besagt: Hat $D(x, \xi; \lambda)$ für $\lambda = \lambda_1$ eine k-fache, also $D(\lambda)$ eine mindestens $(k+1)$-fache Nullstelle, so liefert der erste nicht verschwindende Koeffizient $d'_k(x, \xi)$ in der Entwicklung von $D(x, \xi; \lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - \lambda_1$ ein Kontinuum von Lösungen (mit dem Parameter ξ) der homogenen Integralgleichung (25). Mit dem Früheren zusammengenommen haben wir also, je nachdem $D(\lambda) \neq 0$ oder $= 0$ ist, die Alternative: Eine Integralgleichung (11) hat entweder für jedes f eine eindeutig bestimmte Lösung (12), dabei für $f = 0$ nur die Lösung 0, oder die Gleichung besitzt für $f = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung, wobei der Fall $f \neq 0$ noch unbestimmt bleibt.

Zu einer vollständigen Diskussion des Falles $D(\lambda) = 0$ werden wir aber erst in § 3 auf Grund neuer Begriffsbildungen gelangen, wobei wir von gewissen Einschränkungen für den Kern $K(x, \xi)$ ausgehen werden. Für den allgemeinen Fall sind noch folgende Schlüsse von Bedeutung. Wir betrachten neben der Integralgleichung (11) die ihr „adjungierte", deren Kern $K(\xi, x)$ lautet:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(\xi, x)\, y(\xi)\, d\xi = f(x). \tag{28}$$

Wenn wir das dieser Gleichung entsprechende algebraische Problem im Sinne von 1 untersuchen wollten, würden in allen Matrizen, z. B. in (5), nur Zeilen und Spalten ihre Rollen vertauschen. Da aber dabei der Wert der Determinante sich nicht ändert, so folgt, daß $D_n(\lambda)$ für alle n, mithin auch $D(\lambda)$ selbst, für (28) den gleichen Wert hat wie für (11): Von zwei adjungierten Gleichungen hat entweder jede oder keine eine nicht triviale Lösung für verschwindende rechte Seiten. Erinnern wir uns nun an die Lösbarkeitsbedingung gewöhnlicher nichthomogener Gleichungen, wie sie am Schluß von II, § 1, 5 abgeleitet, dann in II, § 2, 1 neu formuliert wurde, so erkennt man, daß die Übertragung auf den Fall der Integralgleichung so lauten müßte: Die nichthomogene Integralgleichung (11) hat im Falle $D(\lambda) = 0$ dann und nur

dann eine Lösung, wenn $f(x)$ orthogonal ist zu allen Lösungen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ der adjungierten Gl. (28) mit $f = 0$, also

$$\int_0^1 f\psi_1\,dx = 0, \quad \int_0^1 f\psi_2\,dx = 0, \ldots; \tag{29}$$

die Bedingung annulliert sich, wenn es keine ψ außer $\psi = 0$ gibt. Wir unterlassen hier die Ableitung dieses Resultates durch Ausführung des Grenzüberganges und werden in § 3 für den wichtigeren Fall symmetrischer Kerne darauf zurückkommen.

§ 2. Neumannsche Reihe, Goursat-Schmidtsche Auflösung

1. Die Neumannsche Reihe. Wenn wir wieder von der regulären Integralgleichung zweiter Art (11) in § 1

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{1}$$

ausgehen, wobei wir jetzt nur allgemeinere Grenzen a, b an Stelle von 0, 1 schreiben wollen, so können wir uns auch auf den Standpunkt stellen, daß man willkürlich den lösenden Kern $\Gamma(x,\xi)$ in Form eines Bruches

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{c_0(x,\xi) + \lambda c_1(x,\xi) + \lambda^2 c_2(x,\xi) + \cdots}{c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \cdots} \tag{2}$$

ansetzt, ohne sich zunächst auf irgendeinen Zusammenhang von (1) mit einem System linearer Gleichungen zu stützen. Dabei soll $\Gamma(x,\xi)$ dadurch definiert sein, daß es die Auflösung von (1) in der Gestalt

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi \tag{3}$$

liefert oder, was, wie wir wissen, dasselbe ist, daß Γ für $\xi =$ konst die Lösung von (1) selbst, bei $f(x) = K(x,\xi)$, bildet:

$$\Gamma(x,\xi) - \lambda\int_a^b K(x,\varrho)\,\Gamma(\varrho,\xi)\,d\varrho = K(x,\xi). \tag{4}$$

Setzt man in (4) den Bruch (2) ein und vergleicht beiderseits, nach Wegschaffung des Nenners, gleich hohe Potenzen von λ, so gelangt man zu der mit (23) in § 1 übereinstimmenden Rekursionsformel:

$$c_m(x,\xi) = c_m K(x,\xi) + \int_a^b K(x,\varrho)\,c_{m-1}(\varrho,\xi)\,d\varrho. \tag{5}$$

Dieser Formel, die wir noch durch $c_0 = 1$, $c_0(x,\xi) = K(x,\xi)$ ergänzt denken wollen, kann man formal genügen bei willkürlicher Wahl

der Konstanten $c_1, c_2, \ldots$, was ja natürlich ist, weil sich zu einem beliebigen Nenner in (2) immer noch ein passender Zähler finden lassen muß. Eine andere Frage ist es, ob und in welchem Umfang die so gebildeten Reihen im Zähler und Nenner konvergieren. Der Sinn der Fredholmschen Ableitung im vorigen Paragraphen war es eben, daß bei der dort in Gl. (15) getroffenen Verfügung über die Nennerkonstanten beide Reihen in (2) für alle λ-Werte konvergent sind, so daß man in dieser Weise zu einer vollständigen Lösung der Integralgleichung (1) gelangt. Man kann sich aber jetzt die Aufgabe stellen, eine Lösung wenigstens für gewisse λ-Bereiche zu suchen, die einer einfacheren Annahme über die $c_1, c_2, \ldots$ entspricht.

Die Neumannsche Reihe entsteht, wenn man den Ansatz (2) bzw. (5) dahin spezialisiert, daß man $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = 0$ setzt oder, mit anderen Worten, die gebrochene Funktion $\Gamma(x, \xi)$ in der Umgebung von $\lambda = 0$ nach Potenzen von λ entwickelt:

$$\Gamma(x, \xi) = K^{(1)}(x, \xi) + \lambda K^{(2)}(x, \xi) + \lambda^2 K^{(3)}(x, \xi) + \cdots, \tag{6}$$

wobei die neuen Koeffizienten $K^{(m)}(x, \xi)$ zufolge (5) der Rekursionsformel

$$K^{(m)}(x, \xi) = \int_a^b K(x, \varrho) K^{(m-1)}(\varrho, \xi) \, d\varrho \tag{7}$$

genügen, mit $K^{(1)}(x, \xi) = K(x, \xi)$. Natürlich kann man (7) auch durch direktes Einsetzen von (6) in (4) ableiten, ohne den Umweg über (2). Man nennt die $K^{(m)}(x, \xi)$ die „iterierten Kerne“ von (1) und folgert leicht aus (7) die independente Darstellung

$$K^{(m)}(x, \xi) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \varrho_1) K(\varrho_1, \varrho_2) \ldots K(\varrho_{m-2}, \varrho_{m-1}) K(\varrho_{m-1}, \xi) \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 \ldots d\varrho_{m-1} \tag{8}$$

und daraus die allgemeinere Rekursionsformel

$$K^{(m+n)}(x, \xi) = \int_a^b K^{(m)}(x, \varrho) K^{(n)}(\varrho, \xi) \, d\varrho. \tag{9}$$

Wenn $K(x, \xi)$, wie in der Einleitung des Kapitels vorausgesetzt, eine obere Schranke K besitzt, so besagt (8), daß

$$|K^{(m)}(x, \xi)| \leqq (b-a)^{m-1} K^m$$

ausfällt. Demnach konvergiert die Neumannsche Reihe einer regulären Integralgleichung zweiter Art für Parameterwerte

$$|\lambda| < \frac{1}{K \cdot (b-a)}. \tag{10}$$

Unter dieser Voraussetzung stellt sich also die Lösung von (1) in der Gestalt

$$(11)\qquad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K^{(1)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \cdots$$

dar, wo die $K^{(2)}(x,\xi), \ldots$ die durch (7) bzw. (8) oder (9) definierten iterierten Kerne sind.

2. Beispiele. Volterrasche Gleichung. Wollte man auf das im folgenden Kapitel behandelte Beispiel der schwingenden Saite die Neumannsche Methode anwenden, so würde sich kaum eine Vereinfachung gegenüber der dortigen Reihenentwicklung ergeben. Man hätte zwar nur eine Potenzreihe zu rechnen, aber man hätte ja auch nur eine für $|\lambda| < 1$[1]) gültige Lösung. In anderen Fällen ist jedoch der Vorteil der Neumannschen Reihe sehr groß, namentlich dann, wenn man bei besonderer Gestalt des Kernes eine günstigere Konvergenzschranke als (10) angeben kann.

Ein solcher Fall liegt vor bei der sogenannten Volterraschen Integralgleichung

$$(1')\qquad y(x) - \lambda \int_a^x H(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x),$$

die sich von (1) dadurch unterscheidet, daß die obere Grenze des Integrals gleich der Variablen x ist. Man bringt (1′) auf die Form (1) durch Einführung des Kernes $K(x,\xi)$:

$$(2')\qquad \begin{cases} K(x,\xi) = H(x,\xi) & \text{für } \xi \leqq x, \\ = 0 & \;\, \text{„} \;\; \xi > x. \end{cases}$$

Dies ist allerdings ein unstetiger Kern, und wir greifen damit über das in der Einleitung dieses Kapitels festgelegte Gebiet regulärer Integralgleichungen hinaus. Aber es ist leicht zu sehen, daß eine derartige stückweise Stetigkeit an Stelle der vollständigen treten darf, ohne die Gültigkeit der bisherigen Überlegungen zu beeinträchtigen.

Bildet man zu (2′) die iterierten Kerne nach (7) (mit $\xi \leqq x$)[2]):

$$K^{(2)}(x,\xi) = \int_a^b K^{(1)}(x,\varrho) K^{(1)}(\varrho,\xi)\, d\varrho = \int_\xi^x K^{(1)}(x,\varrho) K^{(1)}(\varrho,\xi)\, d\varrho,$$

$$K^{(3)}(x,\xi) = \int_a^b K^{(1)}(x,\varrho) K^{(2)}(\varrho,\xi)\, d\varrho$$

$$= \int_\xi^x K^{(1)}(x,\varrho_1)\, d\varrho_1 \int_\xi^{\varrho_1} K^{(1)}(\varrho_1,\varrho_2) K^{(1)}(\varrho_2,\xi)\, d\varrho_2, \ldots,$$

---

[1]) Man vergleiche die Formeln (4) und (5) in Kap. XIII, § 1.

[2]) Für $\xi > x$ verschwinden sämtliche $K^{(m)}(x,\xi)$.

so erkennt man, daß die zu (8) analoge, independente Darstellung jetzt lautet:

(3')
$$K^{(m)}(x, \xi)$$
$$= \int_{\xi}^{x} K(x, \varrho_1) d\varrho_1 \int_{\xi}^{\varrho_1} K(\varrho_1, \varrho_2) d\varrho_2 \int_{\xi}^{\varrho_2} \cdots \int_{\xi}^{\varrho_{m-2}} K(\varrho_{m-2}, \varrho_{m-1}) K(\varrho_{m-1}, \xi) d\varrho_{m-1},$$

woraus folgt
$$|K^{(m)}(x, \xi)| \leqq \frac{(b-a)^{m-1} K^m}{(m-1)!}.$$

Die Neumannsche Reihe der Volterraschen Integralgleichung zweiter Art konvergiert also für alle Parameterwerte λ, da die Fakultäten im Nenner die Konvergenz sicherstellen.

Auf eine Volterrasche Integralgleichung kann man das einfache Anfangswertproblem einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zurückführen. Wir wollen dies an dem Beispiel der Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a(x)\frac{dz}{dx} + b(x) z = f(x), \quad z(0) = \frac{dz}{dx}(0) = 0 \tag{4'}$$

zeigen. Durch Produktintegration findet man

$$z(x) = \int_0^x z'(\xi) d\xi = \left[\xi z'(\xi)\right]_0^x - \int_0^x \xi z''(\xi) d\xi,$$

wobei für den ersten Ausdruck rechts

$$x z'(x) = \int_0^x x z''(\xi) d\xi$$

gesetzt werden darf. Schreiben wir y für z'', so lautet daher (4')

$$y(x) + \int_0^x a(x) y(\xi) d\xi + \int_0^x b(x)(x-\xi) y(\xi) d\xi = f(x). \tag{5'}$$

Dies ist schon eine Volterrasche Integralgleichung mit dem Kern
$$H(x, \xi) = a(x) + b(x)(x-\xi).$$

Die Verallgemeinerung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung und beliebige Anfangsbedingungen macht keine Schwierigkeiten. Die Neumannsche Reihe führt hier zu der Möglichkeit gewisser Reihenentwicklungen für die Integrale linearer Differentialgleichungen.

3. Erweiterte Konvergenzbedingung für die Neumannsche Reihe. Erhard Schmidt hat gezeigt, daß die Konvergenz der Neumannschen Reihe in vielen Fällen über das durch (10) gegebene Gebiet wesentlich hinausreicht, und konnte mit Hilfe dieser Überlegung die Neumannsche Entwicklung zur Grundlage eines allgemeinen Auf-

lösungsverfahrens der regulären Integralgleichung zweiter Art machen. Er geht aus von der sogenannten Schwarzschen Ungleichheit (VIII, § 1, 5), die für zwei Reihen reeller Größen a_ι und b_ι lautet:

$$(12) \qquad \left(\sum_{\iota=1}^{n} a_\iota b_\iota\right)^2 \leqq \sum_{\iota=1}^{n} a_\iota^2 \cdot \sum_{\iota=1}^{n} b_\iota^2$$

und, geometrisch gesprochen, die einfache Tatsache zum Ausdruck bringt, daß das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht größer sein kann als das Produkt der Vektorlängen. An Stelle der diskreten Summen in (12) können natürlich auch Integrale treten [1]). Dies liefert, auf (9) angewandt, wenn darin 1 für n und $n-1$ für m eingeführt wird:

$$[K^{(n)}(x,\xi)]^2 \leqq \int_a^b [K^{(n-1)}(x,\varrho)]^2 d\varrho \cdot \int_a^b [K(\varrho,\xi)]^2 d\varrho,$$

weil ja $K^{(1)}$ nichts anderes als der ursprüngliche Kern K ist. Integriert man beiderseits über x und ξ, so hat man zu beachten, daß rechts jeder der beiden Faktoren nur von einer dieser Variablen abhängt, so daß

$$\int_a^b \int_a^b [K^{(n)}(x,\xi)]^2 dx\, d\xi \leqq \int_a^b \int_a^b [K^{(n-1)}(x,\varrho)]^2 dx\, d\varrho \cdot \int_a^b \int_a^b [K(\varrho,\xi)]^2 d\xi\, d\varrho.$$

Hier erscheint also als obere Grenze für das Integralquadrat des n-ten iterierten Kernes ein Produkt aus dem Integralquadrat des $(n-1)$-ten mal einem von n unabhängigen Faktor. Wendet man dies Ergebnis auf den $(n-1)$-ten Kern an, dann auf den $(n-2)$-ten usf., so erhält man schließlich

$$(13) \qquad \int_a^b \int_a^b [K^{(n)}(x,\xi)]^2 dx\, d\xi \leqq \left[\int_a^b \int_a^b [K(\varrho,\xi)]^2 d\xi\, d\varrho\right]^n = C^n.$$

Andererseits folgt aus (7), wenn man $m = n + 2$ setzt und dann auf $K^{(n+1)}$ die Formel (9) mit 1 für n und n für m anwendet:

$$(14) \qquad K^{(n+2)}(x,\xi) = \int_a^b \int_a^b K(x,\varrho) K(\varrho_1,\xi) \cdot K^{(n)}(\varrho,\varrho_1)\, d\varrho\, d\varrho_1.$$

---

[1]) Man schließt dies direkt wie folgt: Es muß, da $\int_a^b (f+\lambda g)^2 dx$ eine positiv-definite quadratische Form in λ ist, ihre Diskriminante $\int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx - [\int_a^b fg\, dx]^2$ positiv sein, also für zwei beliebige stetige Funktionen $f(x)$, $g(x)$ stets $\int f^2(x)dx \cdot \int g^2(x)\, dx \geqq [\int f(x)\, g(x)\, dx]^2$.

Die Schwarzsche Ungleichheit auf (14) angewendet, gibt unter Heranziehung von (13):

$$[K^{(n+2)}(x,\xi)]^2 \leqq \int_a^b\int_a^b [K(x,\varrho)K(\varrho_1,\xi)]^2 d\varrho\, d\varrho_1 \cdot \int_a^b\int_a^b [K^{(n)}(\varrho,\varrho_1)]^2 d\varrho\, d\varrho_1 \leqq k C^n,$$

da das erste der Integrale im zweiten Gliede von n unabhängig ist. Diese Ungleichheit besagt, daß die Absolutwerte der iterierten Kerne nicht stärker anwachsen können als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\sqrt{C}$, dessen Wert aus (13) hervorgeht. Die Neumannsche Reihe konvergiert also sicher für alle λ-Werte, für die $\lambda^2 C$ kleiner als 1 oder

$$(15) \qquad |\lambda| \leqq \frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b [K(x,\xi)]^2\, dx\, d\xi}}$$

ist. Es kommt danach nicht wie früher in (10) auf den Höchstwert von K an, sondern auf das Integralquadrat. Wenn $K(x,\xi)$ in einem größeren Teil des Bereiches beträchtlich unter seinem Höchstwert bleibt, kann die Grenze (15) ganz bedeutend über (10) liegen. Die grundsätzliche Bedeutung dieser Erweiterung der Konvergenzgrenze werden wir sofort kennenlernen.

4. Allgemeines Auflösungsverfahren. In XI, § 2, 2 haben wir eine umfassende Gruppe von Integralgleichungen kennengelernt, die eine unmittelbare Lösung in geschlossener Form gestatten. Ihr Kern vom „Typus eines Polynoms" war dadurch gekennzeichnet, daß er sich als eine Summe von Produkten, deren Faktoren nur von je einer Variablen abhängen, darstellen ließ, also

$$(16) \qquad K(x,\xi) = s_1(x)t_1(\xi) + s_2(x)t_2(\xi) + \cdots + s_m(x)t_m(\xi).$$

Den allgemeinen Fall der Auflösung einer Integralgleichung auf das in XI angegebene Verfahren zurückzuführen, hat zuerst E. Goursat unternommen, der auf diesem Wege wieder zu den Fredholmschen Formeln gelangte. E. Schmidt (1907) verband diesen Gedanken mit der Anwendung der Neumannschen Reihe zu einem neuen, in vielen Fällen gut brauchbaren Auflösungsverfahren, das wir jetzt in Kürze besprechen.

Der Kern $K(x,\xi)$ der Integralgleichung (1) bestehe aus einer Summe der Form (16) und einem beliebigen Rest $K_1(x,\xi)$:

$$(17) \qquad K(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{m} s_\nu(x)t_\nu(\xi) + K_1(x,\xi).$$

Wir setzen (17) in (1) ein und bringen den ersten Teil auf die rechte Seite:

$$(18)\quad y(x)-\lambda\int_a^b K_1(x,\xi)y(\xi)\,d\xi=f(x)+\lambda\sum_{\nu=1}^{m}s_\nu(x)\int_a^b t_\nu(\xi)\,y(\xi)\,d\xi=f_1(x).$$

Stellen wir uns zunächst vor, daß f_1 eine gegebene Funktion wäre (in Wahrheit enthält es noch die Unbekannte y unter dem $\int$-Zeichen), und denken wir uns (18) als Integralgleichung mit dem Kern K_1 und der rechten Seite f_1 gelöst, so daß nach (3) in

$$(19)\qquad y(x)=f_1(x)+\lambda\int_a^b \Gamma_1(x,\xi)f_1(\xi)\,d\xi$$

Γ_1 den zu K_1 gehörigen lösenden Kern darstellt. Führt man hier rechts beidemal, wo f_1 auftritt, den Wert für f_1 aus dem zweiten Teil von (18) ein, so erhält man vier Glieder, von denen wir die zwei von y unabhängigen zusammenfassen zu

$$(20)\qquad f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma_1(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=F(x)$$

und die zwei anderen so umformen:

$$(21)\quad \lambda\int_a^b\sum_{\nu=1}^{m}t_\nu(\xi)s_\nu(x)y(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^b\int_a^b\Gamma_1(x,\varrho)\sum_{\nu=1}^{m}s_\nu(\varrho)\,t_\nu(\xi)\,y(\xi)\,d\xi\,d\varrho$$

$$=\lambda\int_a^b\sum_{\nu=1}^{m}S_\nu(x)t_\nu(\xi)y(\xi)\,d\xi \text{ mit } S_\nu(x)=s_\nu(x)+\lambda\int_a^b\Gamma_1(x,\varrho)s_\nu(\varrho)\,d\varrho.$$

Demnach wird aus (19), wenn wir den einen Bestandteil auf die linke Seite nehmen:

$$(22)\qquad y(x)-\lambda\int_a^b\sum_{\nu=1}^{m}S_\nu(x)\,t_\nu(\xi)\,y(\xi)\,d\xi=F(x).$$

Das ist aber eine Integralgleichung von genau der in XI, § 2, 2 behandelten Form, nur daß S_ν an Stelle von s_ν und $F(x)$ an Stelle von $f(x)$ geschrieben ist. Das Auflösungsverfahren für die beliebige Gl. (1) zerfällt somit in folgende Schritte: 1. Aufsuchung des lösenden Kernes Γ_1 zu dem „Rest" K_1 des gegebenen Kernes K; 2. Bestimmung der Funktionen F und S_ν nach (20) und der zweiten Gleichung (21), was nach Kenntnis von Γ_1 nur Quadraturen erfordert; 3. Lösung der Integralgleichung (22) mit dem Kern von Polynomtypus, was nur die Lösung von m linearen Gleichungen mit m Unbekannten voraussetzt.

Die grundsätzliche Bedeutung dieses Verfahrens besteht darin, daß es stets möglich ist, von einer stetigen Funktion $K(x, \xi)$ eine Produktsumme $\sum s_\nu(x) t_\nu(\xi)$ derart abzuziehen, daß der Rest $K_1(x, \xi)$ ein beliebig kleines Integralquadrat ergibt. Damit rückt die Konvergenzgrenze der Neumannschen Reihe für Γ_1 nach (15) beliebig weit hinauf, und man kann somit für jeden λ-Wert den ersten Schritt des Verfahrens, nämlich die Aufstellung von Γ_1, entsprechend den Formeln (6), (7) erledigen, d. h.

$$\Gamma_1(x,\xi) = K_1(x,\xi) + \lambda K_1^{(2)}(x,\xi) + \lambda^2 K_1^{(3)}(x,\xi) + \cdots \tag{23}$$

setzen, mit der aus (7) bis (9) hervorgehenden Bedeutung der iterierten Kerne $K_1^{(\nu)}$. So ist das hier beschriebene Lösungsverfahren ein allgemeines.

Praktisch wird man aber eine viel weitergehende Anwendung von diesen Überlegungen machen können. Denn da nach (23) Γ_1 sich stetig mit K_1 verändert und mit K_1 zugleich verschwindet, ferner nach (20) und (21) mit verschwindendem Γ_1 einerseits $F(x)$ in $f(x)$, andererseits jedes $S_\nu(x)$ in $s_\nu(x)$ übergeht, so sieht man: Sobald nur der Rest K_1 genügend klein ist, unterscheidet sich (22) kaum von der Integralgleichung, die man durch Fortlassung von K_1 aus dem ursprünglichen Ansatz erhält, und die m linearen Gleichungen, die nach XI, § 2, 2 zur Lösung von (22) aufzustellen sind, haben fast die gleichen Koeffizienten, wie wenn für den Kern K allein die Summe der Produkte $s_\nu(x) t_\nu(\xi)$ gesetzt wird. Die Lösungen der linearen Gleichungen werden dann auch nicht viel durch völlige Fortlassung des Restes K_1 verändert, vorausgesetzt, daß man sich nicht gerade in der Nähe eines solchen λ-Wertes befindet, der die Koeffizientendeterminante zu Null macht. Es ergibt sich daraus folgende praktische Auflösungsregel:

Man sucht den gegebenen Kern $K(x, \xi)$ durch eine (möglichst kleine) Summe von Produkten $s_\nu(x) t_\nu(\xi)$ so zu ersetzen, daß der Rest im Integralquadrat möglichst klein wird, z. B. in der Weise, daß man die ersten m Glieder der Fourierschen Entwicklung für $K(x, \xi)$ setzt; hierauf löse man unter Weglassung des Restes K_1 von K die Integralgleichung durch Auflösung der m linearen Gleichungen nach XI, § 2, 2. Das Ergebnis wird dann als Näherungslösung von (1) brauchbar sein, wenn man sich nicht gerade in der unmittelbaren Nähe eines λ-Wertes befindet, für den die Determinante des Gleichungssystems Null wird. In diesem Falle muß man K_1 in der oben dargelegten Weise berücksichtigen, wenn man nicht überhaupt andere Wege einschlägt.

§ 3. Symmetrische Kerne, Eigenfunktionen

Bei der Anwendung der Integralgleichungen auf Schwingungsprobleme und auch sonst häufig hat man es mit Gleichungen zu tun, deren Kern symmetrisch ist, d. h. seinen Wert nicht ändert, wenn man die beiden unabhängig Veränderlichen vertauscht: $K(x,\xi) = K(\xi,x)$. Es folgen aus dieser Eigenschaft wesentlich neue Gesichtspunkte für die Auflösung, die man hier besser an die Betrachtung der homogenen Gleichung (rechte Seite gleich Null gesetzt) anknüpft.

1. Das Orthogonalsystem der Eigenfunktionen. Es sei also wieder die in § 1 und 2 betrachtete Integralgleichung zweiter Art, aber jetzt mit $f = 0$ und mit $K(x,\xi) = K(\xi,x)$ vorgelegt:

$$(1) \qquad y(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Wir wissen schon aus § 1, 5, daß die Fredholmsche Formel hier einfach die Lösung $y = 0$ liefert, die man die „triviale" nennt, daß aber außerdem eine nicht identisch verschwindende Lösung vorhanden ist, falls für den betreffenden λ-Wert in (1) die Nennerreihe $D(\lambda)$ des Fredholmschen Bruches Null ist. Gesetzt, $\lambda = \lambda_1$ wäre ein solcher Wert, so gibt es natürlich nicht nur eine zugehörige Lösung von (1), sondern deren unendlich viele, weil jedes Vielfache einer Lösung wieder (1) befriedigt. Unter allen diesen Funktionen, die (1) für $\lambda = \lambda_1$ erfüllen und sich dabei nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, suchen wir uns diejenige bis aufs Vorzeichen bestimmte Funktion[1]) φ_1 heraus, deren über das Grundgebiet a, b erstrecktes Integralquadrat gleich 1 ist, und nennen sie eine „normierte Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1". Es hat also $\varphi_1(x)$ die Eigenschaften:

$$(2) \qquad \varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,\xi)\, \varphi_1(\xi)\, d\xi \quad \text{und} \quad \int_a^b \varphi_1^2(x)\, dx = 1.$$

Wie man aus irgendeiner Lösung die normierte gewinnt, ist ohne weiteres klar (vgl. dazu Vorbem. zu VIII, § 1).

Sind λ_1 und λ_2 zwei Eigenwerte, d. h. λ-Werte, für die (1) eine Lösung außer der trivialen besitzt, und φ_1, φ_2 zugehörige normierte Eigenfunktionen:

$$(3) \qquad \varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,\xi)\, \varphi_1(\xi)\, d\xi, \quad \varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x,\xi)\, \varphi_2(\xi)\, d\xi,$$

---

[1]) Sich nur ums Vorzeichen unterscheidende normierte Eigenfunktionen sehen wir als nicht verschieden an.

so kann man leicht ableiten, daß φ_1 und φ_2 zueinander orthogonal sind (Vorbem. zu VIII, § 1), d. h. der Bedingung genügen:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Man braucht zu diesem Zwecke nur die erste der Gleichungen (3) mit $\varphi_2(x):\lambda_1$, die zweite mit $\varphi_1(x):\lambda_2$ zu multiplizieren, zu subtrahieren und dann über x von a bis b zu integrieren. Man erhält so

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)\,dx\,d\xi$$
$$-\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Die rechte Seite ist aber Null wegen $K(x,\xi) = K(\xi,x)$, daher folgt (4), wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Die zu zwei verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal. Hier liegt die gemeinsame Quelle der in VIII und IX wiederholt erörterten Orthogonalitätseigenschaft der Funktionen, die aus Randwertproblemen entspringen und das Verhalten schwingungsfähiger Systeme beschreiben.

Aus der Orthogonalität (4) folgt weiter auch, daß es nur reelle Eigenwerte geben kann. Wäre nämlich λ_1 in (2) eine komplexe Zahl, so müßte, wie (2) erkennen läßt, bei reellen Koeffizienten auch die dazu konjugierte Größe ein Eigenwert sein. Nennen wir diesen konjugierten λ-Wert λ_2, so muß auch die zugehörige Eigenfunktion φ_2 zu φ_1 konjugiert komplex sein, dies wäre aber ein Widerspruch gegen (4); denn das Produkt zweier konjungiert komplexer Größen $u+iv$ und $u-iv$ ist immer positiv, ein Integral über eine positive Funktion kann aber nicht verschwinden.

Wenn zu jedem Eigenwert $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ nur eine, bis auf einen konstanten Faktor bestimmte, Lösung von (1) gehört, so können wir uns die Reihe der λ_ν etwa ihrem absoluten Betrage nach geordnet und jedesmal die zugehörige normierte Eigenfunktion angeschrieben denken und haben dann schon das, was wir das „vollständige System normierter Eigenfunktionen von K“ nennen. Es ist aber von vornherein nicht ausgeschlossen, daß etwa zu λ_1 mehrere nicht nur durch einen Faktor verschiedene Eigenfunktionen, nämlich Lösungen von (1), gehören. Dann ist auch jede lineare Kombination dieser Lösungen eine Lösung [linearer Charakter von (1), vgl. II, § 1, 1], und es kommt nur darauf an, wie viele Lösungen linear

unabhängig sind. Nehmen wir an, es gäbe für $\lambda = \lambda_1$ gerade m solcher linear unabhängigen Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so kann man nach VIII, § 1, **3** die Gesamtheit ihrer linearen Kombinationen auch als die linearen Kombinationen von m wechselweise orthogonalen und normierten Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ darstellen. Dies bedeutet nichts anderes als die Einführung eines orthogonalen Achsenkreuzes in dem m-dimensionalen Vektorgebilde, das durch die $y_1, y_2, \ldots, y_m$ bestimmt wird. So gelangt man schließlich zu folgendem Bilde von der Gesamtheit der Lösungen von (1):

Wir denken uns die Eigenwerte ihrem absoluten Betrag nach geordnet und jeden m-mal angeschrieben, wenn ihm m linear unabhängige Lösungen entsprechen; dies sei die Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$. Zu jedem dieser λ_ν setzen wir dann eine der m Funktionen, die nach dem eben Gesagten die Gesamtheit der zu einem λ gehörigen Lösungen repräsentieren, dies sei die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$; sie bildet das vollständige System normierter und orthogonaler Eigenfunktionen von (1). Jede Lösung von (1) ist entweder unmittelbar in dieser Aufzählung enthalten oder sie läßt sich als eine lineare Kombination solcher φ_ν, die zu gleichem λ_ν gehören, darstellen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch zeigen, daß bei einem Kern K mit beschränktem Integralquadrat die Aufzählung nicht etwa daran scheitern kann, daß die Zahl der φ_ν ins Unendliche wächst, während man noch mit dem Betrag der Eigenwerte unterhalb einer endlichen Schranke M geblieben ist. Denkt man sich dem x für den Augenblick einen festen Wert erteilt, so besagt die mit (3) übereinstimmende Gleichung

$$\int_a^b K(x, \xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x), \tag{5}$$

daß $\varphi_\nu(x) : \lambda_\nu$ in der Ausdrucksweise von VIII, § 1, **1** der ν-te Fouriersche Koeffizient von $K(x, \xi)$ in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist. Dann folgt aber aus der Besselschen Ungleichheit [VIII, § 1, (10)]

$$\int_a^b [K(x, \xi)]^2\, d\xi \geqq \frac{\varphi_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2}{\lambda_2^2} + \cdots$$

durch Integration über alle x zwischen a und b mit Rücksicht auf die Normierung der φ_ν [vgl. die zweite Gl. (2)]:

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2\, dx\, d\xi \geqq \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \cdots.$$

Solange $|\lambda_\nu| < M$, ist jeder Summand $> 1 : M^2$, die Zahl der Summanden kann also nicht unendlich sein, da die Summe es nicht ist. Wir können das Ergebnis so aussprechen: Die Eigenwerte eines symmetrischen Kernes von endlichem Integralquadrat sind diskrete Zahlen; gibt es ihrer unendlich viele, so wachsen ihre Beträge ins Unendliche; zu jedem Eigenwert gibt es nur endlich viele Eigenfunktionen.

2. Existenz von Eigenwerten. Daß die Gleichung $D(\lambda) = 0$ für symmetrische Kerne mindestens eine Lösung besitzt, daß es also mindestens einen Eigenwert gibt, hat E. Schmidt in Anlehnung an einen Gedankengang von H. A. Schwarz in folgender Weise gezeigt. Offenbar kommt es nur darauf an, einzusehen, daß die Neumannsche Reihe hier nicht für alle λ-Werte konvergiert [anders als bei den wesentlich nichtsymmetrischen Volterraschen Kernen (§ 2, **2**), bei denen es weder Eigenwerte noch Eigenfunktionen gibt]; denn diese Reihe, die den Wert des lösenden Kernes $\Gamma(x, \xi)$ darstellt, ist nichts anderes als die Potenzentwicklung des Fredholmschen Bruches und müßte immer konvergieren, wenn nicht der Nenner des Bruches einmal Null wird.

Konvergiert nun die Reihe § 2, (6), so müssen ihre einzelnen Glieder gegen Null gehen, und keinesfalls kann die Folge der Zahlen $K^{(2)}(x, x), \lambda^2 K^{(4)}(x, x), \lambda^4 K^{(6)}(x, x), \ldots$ ins Unendliche wachsen. Dasselbe gilt, wenn $U_{2\nu} = \int_a^b K^{(2\nu)}(x, x)\,dx$ gesetzt wird, für die Zahlenfolge $U_2, \lambda^2 U_4, \lambda^4 U_6, \cdots$. Soll die Neumannsche Reihe für jedes noch so große λ konvergieren, so müßte daher der Quotient $U_{2\nu} : U_{2\nu-2}$ unter jede Grenze sinken; denn wäre er etwa immer größer als ein Betrag k^2, so würde für $|\lambda| > 1/|k|$ die Folge $U_2, \lambda^2 U_4, \ldots$ unbeschränkt zunehmen. Es läßt sich aber in der Tat zeigen, daß $U_{2\nu} : U_{2\nu-2}$ nicht nur nicht unbeschränkt abnimmt, sondern sogar zunimmt. Wendet man nämlich auf $K^{(2\nu)}$ die Formel (9) des § 2 mit $m = \nu - 1$, $n = \nu + 1$ an und berücksichtigt die Symmetrie, die sich vom ursprünglichen Kern K auf alle seine Iterationen überträgt, so wird:

$$U_{2\nu} = \int_a^b K^{(2\nu)}(x, x)\,dx = \int_a^b\!\!\int_a^b K^{(\nu-1)}(x, \varrho)\,K^{(\nu+1)}(x, \varrho)\,dx\,d\varrho,$$

daher nach der Schwarzschen Ungleichheit, § 2, **3**:

$$U_{2\nu}^2 \leqq \int_a^b\!\!\int_a^b [K^{(\nu-1)}(x, \varrho)]^2\,dx\,d\varrho \cdot \int_a^b\!\!\int_a^b [K^{(\nu+1)}(x, \varrho)]^2\,dx\,d\varrho.$$

Die beiden Integrale rechts sind aber nichts anderes als $U_{2\nu-2}$ bzw. $U_{2\nu+2}$, wenn man wieder (9) von § 2 einmal mit $m = n = \nu - 1$ und einmal mit $m = n = \nu + 1$ anwendet. Also ist

$$(6) \qquad U_{2\nu}^2 \leqq U_{2\nu-2} U_{2\nu+2} \quad \text{oder} \quad \frac{U_{2\nu+2}}{U_{2\nu}} \geqq \frac{U_{2\nu}}{U_{2\nu-2}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man kann darüber hinaus beweisen, daß der Grenzwert, bis zu dem der Quotient $U_{2\nu} : U_{2\nu-2}$ mit wachsendem ν ansteigt, genau die Konvergenzgrenze der Neumannschen Reihe liefert, so daß man für den dem Betrag nach kleinsten Eigenwert den Ansatz

$$(7) \qquad |\lambda_1| = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt{\frac{U_{2\nu}}{U_{2\nu+2}}}$$

erhält[1]).

3. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen. Die für alle Schwingungsprobleme fundamentale Frage nach der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen (der Anfangswerte von Koordinaten und Geschwindigkeiten) wird in sehr allgemeiner Weise im Anschluß an die Integralgleichung (1) erledigt. Wir folgen hier wieder dem Gedankengang von E. Schmidt, obwohl die entscheidenden Ergebnisse schon etwas früher in anderer Weise von Hilbert gefunden worden waren.

Nehmen wir an, der symmetrische Kern $K(x, \xi)$ gestatte für jeden Wert von ξ eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen in der Form

$$(8) \qquad K(x, \xi) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x) + \cdots,$$

so ergeben sich durch Multiplikation mit $\varphi_\nu(x)$ und darauf folgende Integration nach x über das Grundgebiet, mit Rücksicht auf Orthogonalität (4) und Normierung, für die c die Fourierschen Ausdrücke:

$$c_\nu = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_\nu(x)\, dx.$$

Der Definition von φ_ν wegen [vgl. z. B. Gl. (3)] ist aber das Integral rechter Hand gleich $\varphi_\nu(\xi) : \lambda_\nu$, so daß die Reihenentwicklung für $K(x, \xi)$ lauten muß (falls sie zu Recht besteht):

$$(9) \qquad K(x, \xi) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(\xi)}{\lambda_2} + \frac{\varphi_3(x)\varphi_3(\xi)}{\lambda_3} + \cdots$$

(vgl. a. XI, § 3, 4). Natürlich ist Gl. (9), die sogenannte Bilinearformel, damit noch nicht bewiesen; denn wenn wir z. B. aus irgend-

[1]) Vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann., Bd. 63 (1907), S. 455 u. f.

einem Grunde rechts in (8) nur jede zweite aus der vollständigen Reihe der Eigenfunktionen angeschrieben hätten, so würde diese Schlußweise ergeben, daß sich K auch durch diese geringere Anzahl von Funktionen darstellen läßt. Wir wollen jetzt den Beweis für das Bestehen der Gl. (9) unter der Voraussetzung, daß die Reihe rechts im ganzen Grundintervall gleichmäßig konvergiert, erbringen[1]).

Da sowohl die linke wie die rechte Seite von (9) symmetrisch in bezug auf x und ξ sind, ist auch die Differenz

$$Q(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \tag{10}$$

eine symmetrische Funktion von x und ξ, daher muß es nach 2 mindestens einen Eigenwert μ und eine Eigenfunktion ψ zu Q geben. Das sind Größen, die der Gleichung

$$\psi(x) = \mu \int_a^b Q(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

genügen. Multipliziert man hier beiderseits mit $\varphi_\nu(x)$ und integriert, so erhält man nach Einsetzen von (10):

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_\nu(x)\,dx = \mu \int_a^b \psi(\xi)\,d\xi \left[\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi_\nu(x)\,dx - \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}\right].$$

Denn bei der Integration der Summe fallen wegen der Orthogonalität alle Glieder mit anderem Index als ν fort. Der Klammerausdruck rechts ist Null zufolge der Definition von φ_ν nach (3), also ist ψ „orthogonal" zu sämtlichen Eigenfunktionen φ_ν des Kernes K. Aus dieser Orthogonalität folgt, wenn man (10) beiderseits mit ψ multipliziert und integriert:

$$\int_a^b Q(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \int_a^b K(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Führt man dies in (11) ein, so besagt diese Gleichung, daß ψ auch Eigenfunktion von K zum Eigenwert μ ist. So sind wir zu dem Widerspruch gelangt, daß ψ einerseits orthogonal zu sämtlichen Eigenfunktionen, andererseits selbst eine Eigenfunktion sein soll.

---

[1]) Auf diesen Konvergenzbeweis gehen wir hier nicht ein. Es sei nur bemerkt, daß A. Hammerstein die Konvergenz der Bilinearreihe bewiesen hat für jeden Kern, der der Lipschitzschen Bedingung genügt (Sitzungsber. Berl. Akad. 1923, S. 181). Man vergleiche ferner für logarithmisch unstetige Kerne die Ergebnisse von A. Hammerstein in den Sitzungsber. Berl. Akad. 1925, S. 590—595.

Die einzige Lösung dieses Widerspruches liegt darin, daß es einen Kern Q überhaupt nicht gibt, sondern die Differenz (10) identisch Null ist.

Auf die Analogie der Bilinearformel (9) mit der Lösung des Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung ist schon in XI, § 3, **4** hingewiesen worden. Völlig gleichlaufend mit den Anwendungen dieser Lösung, die wir in II, § 2, **4** gebracht haben, ergibt sich jetzt die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den φ_ν und die Lösung der nichthomogenen Integralgleichung.

Es sei zunächst $y(x)$ irgendeine Funktion, die dem „Kern K erreichbar" ist, d. h. sich in der Form

$$y(x) = \int_a^b K(x,\xi) z(\xi) d\xi \tag{12}$$

darstellen läßt. Setzt man rechts für K die Bilinearformel (9) ein, so erhält man

$$y(x) = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b \varphi_1(\xi) z(\xi) d\xi \cdot \varphi_1(x) + \frac{1}{\lambda_2}\int_a^b \varphi_2(\xi) z(\xi) d\xi \cdot \varphi_2(x) + \cdots, \tag{12'}$$

d. i. ein Ausdruck von der Form $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots$. Die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ wird man aber dann besser nicht nach (12) bestimmen, sondern im Hinblick auf die Orthogonalität der φ_ν [so wie oben die Koeffizienten von (8)], indem man den Ansatz beiderseits mit φ_ν multipliziert und dann integriert. So erhält man schließlich

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \cdots \text{ mit } c_\nu = \int_a^b y(x)\varphi_\nu(x) dx \tag{13}$$

als Entwicklung einer willkürlichen, dem Kern K erreichbaren Funktion y nach den Eigenfunktionen dieses Kernes. Über Beispiele und Anwendungen hierzu vgl. XIII, § 2, **5**.

4. Lösung der nichthomogenen Gleichung. Wenn jetzt die Gleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi) y(\xi) d\xi = f(x) \tag{14}$$

vorgelegt ist, so können wir sie vor allem dahin auslegen, daß die Differenz $y(x) - f(x)$ eine „dem Kern K erreichbare" Funktion ist. Daher gibt es eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen für diese Differenz:

$$y(x) - f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots, \tag{15}$$

wobei die Koeffizienten sich so wie in (13) rechnen:

$$(15') \quad \begin{cases} c_\nu = \int_a^b [y(x) - f(x)] \varphi_\nu(x)\, dx \\ = \lambda \int_a^b y(\xi)\, d\xi \int_a^b K(x,\xi) \varphi_\nu(x)\, dx = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \int_a^b y(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichheiten gewinnt man durch Einsetzen von $y - f$ aus (14), die dritte, indem man die immer wieder benutzte Definition von φ_ν beachtet. Nimmt man aber jetzt den zweiten und vierten der in (15') einander gleichgesetzten Ausdrücke zusammen, so sieht man, daß

$$\int_a^b y(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi - \int_a^b f(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \int_a^b y(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi,$$

$$\int_a^b y(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi$$

und daher, wenn man c_ν gleich dem letzten der Ausdrücke (15') setzt:

$$(16) \qquad c_\nu = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(\xi) \varphi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Indem wir diese Werte in (15) einsetzen, erhalten wir die explizite Lösung der Gl. (14):

$$(17) \quad y(x) = f(x) + \lambda \left[\frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda} \int_a^b \varphi_1(\xi) f(\xi)\, d\xi + \frac{\varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda} \int_a^b f(\xi) \varphi_2(\xi)\, d\xi + \cdots \right].$$

Man kann dies auf die Form bringen, die in den früheren Paragraphen benutzt wurde, nämlich

$$(18) \qquad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

wobei man erkennt, daß der lösende Kern $\Gamma(x,\xi)$ den Wert hat

$$(19) \qquad \Gamma(x,\xi) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(\xi)}{\lambda_2 - \lambda} + \cdots.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck etwa mit (14) in § 1, 2, so kann man feststellen, daß (19) die Partialbruchzerlegung des Fredholmschen Bruches für den Fall des symmetrischen Kernes darstellt.

Man kann durch eine kleine Änderung des Gedankenganges auch ohne Kenntnis der Konvergenz der Bilinearformel zeigen, daß jede dem Kern erreichbare Funktion nach den Eigenfunktionen des Kernes entwickelbar ist, daß also auch die Lösungen (17) bis (19) der nichthomogenen Gleichung zu Recht bestehen in solchen Fällen, in denen (9) nicht konvergent ist.

Wird λ gleich einem Eigenwert λ_ν der homogenen Gl. (14), so sieht man aus (16), daß die inhomogene Gleichung nur dann eine Lösung besitzen kann, wenn $f(x)$ auf allen zu λ_ν gehörenden Eigenfunktionen orthogonal steht. Man kann umgekehrt zeigen, daß in diesem Falle die inhomogene Gleichung wirklich lösbar ist.

§ 4. Singuläre Integralgleichungen

1. Übersicht. Die zu Beginn dieses Kapitels für die lineare Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \tag{1}$$

gemachten Voraussetzungen der Beschränktheit und Stetigkeit des Kernes $K(x,\xi)$ und der Endlichkeit des Grundgebietes sind nicht immer erfüllt bei den Gleichungen, auf die man in den Anwendungen der Theorie geführt wird. Man ist daher genötigt, außer den regulären Integralgleichungen auch singuläre zu betrachten, d. h. solche, bei denen mindestens eine der genannten Voraussetzungen nicht erfüllt ist. Eine Klasse von diesen, die quasiregulären oder uneigentlich singulären, kann durch geringe Abänderung der Ansätze und des Beweisganges behandelt werden und läßt auch die Hauptsätze der Auflösungs- und Eigenwerttheorie weiterbestehen. Alle übrigen heißen eigentlich singulär. Hier können gänzlich andere Verhältnisse vorkommen; so braucht die Gesamtheit der Eigenwerte, das Spektrum des Kernes, nicht mehr eine abzählbare Menge diskreter Punkte, ein Punktspektrum, zu bilden, sondern kann z. B. ein endliches oder unendliches Intervall der λ-Geraden überall dicht erfüllen. Dies ist die Erscheinung des Streckenspektrums. Für solche eigentlich singulären Integralgleichungen sollen in **5** und **6** einige Beispiele gegeben werden.

Im folgenden sollen nur stetige Lösungen $y(x)$ betrachtet werden. Daher sei die gegebene Funktion $f(x)$ auch weiterhin immer als stetig vorausgesetzt. Diese Einschränkung ist indessen nicht wesentlich. Ferner soll in diesem Paragraphen der Kern $K(x,\xi)$ stets als symmetrisch angenommen werden. Alle iterierten Kerne sind dann ebenfalls symmetrisch.

Unter der Voraussetzung, daß der Kern der Integralgleichung (1) im endlichen Grundgebiet überall **beschränkt** bleibt, kann man für ihn ohne weiteres solche Unstetigkeiten zulassen, die im Quadrat $a \leqq x, \xi \leqq b$ sämtlich auf einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurvenstücke liegen, von denen ein jedes von Parallelen zur x- oder ξ-Achse nur in endlich vielen Punkten getroffen wird. Eine solche Verteilung der Unstetigkeiten wird **regulär** genannt. Setzt man nämlich voraus, daß die Unstetigkeiten zweier beschränkter Funktionen $F_1(x, \xi)$ und $F_2(x, \xi)$ in jenem Quadrat regulär verteilt seien, so stellt das Integral

$$J(x, \xi) = \int_a^b F_1(x, \varrho) F_2(\varrho, \xi)\, d\varrho \tag{2}$$

dort eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen x und ξ dar. Das wird sofort anschaulich klar, wenn man den Integranden als Ortsfunktion der drei rechtwinkligen Raumkoordinaten x, ξ, ϱ in jedem Punkte des Würfelgebietes $a \leqq x, \xi, \varrho \leqq b$ deutet. Dann liegen die Unstetigkeitsstellen auf zwei Scharen von Zylinderflächen mit zur x- bzw. zur ξ-Achse parallelen Erzeugenden. Jede Schnittgerade zweier Ebenen $x = x_0$ und $\xi = \xi_0$ trifft nach Voraussetzung jene Flächen nur in endlich vielen Punkten, woraus die Behauptung leicht folgt. Insbesondere folgt für einen beschränkten Kern mit regulär verteilten Unstetigkeiten die Stetigkeit aller iterierten Kerne $K^{(\nu)}(x, \xi)$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$. Die Neumannsche Reihe konvergiert gleichmäßig für kleine $|\lambda|$ und stellt den lösenden Kern $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ dar, der dieselben Unstetigkeiten wie $K(x, \xi)$ aufweist. Ferner sind wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ auch $\int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi$ und die Lösung $y(x)$ selbst stetig. Alle früheren Sätze bleiben für solche Kerne unverändert bestehen. Zu ihnen gehören die in § 2, 2 erwähnten Volterraschen Kerne, deren Unsymmetrie an den eben geschilderten Verhältnissen nichts ändert.

Als quasiregulär werden sich auch solche Integralgleichungen erweisen, deren Kerne im endlichen Grundgebiet zwar unendlich werden, aber doch so, daß der n-te iterierte Kern endlich bleibt. In diesem Falle läßt sich die Aufgabe auf die Lösung einer regulären Gleichung zurückführen. In welchem Umfang diese mit der ursprünglichen Integralgleichung äquivalent ist, muß zuvor noch untersucht werden.

2. Die Integralgleichung mit dem Kern $K^{(n)}(x, \xi)$. Von der — zunächst als regulär vorausgesetzten — Integralgleichung (1) kann man stets zu einer anderen übergehen, deren Kern der n-te

iterierte Kern der ursprünglichen Gleichung ist. Durch schrittweises Einsetzen (Iteration) folgt nämlich aus (1)

$$y(x) - \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f_n(x), \tag{3}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$f_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \cdots + \lambda^{n-1} \int_a^b K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

$f_n(x)$ ist also eine bekannte Funktion. Die hierbei nötige Vertauschung der Integrationsfolgen

$$\int_a^b K^{(m)}(x, \varrho) \left[\int_a^b K(\varrho, \xi)\, y(\xi)\, d\xi\right] d\varrho = \int_a^b \left[\int_a^b K^{(m)}(x, \varrho) K(\varrho, \xi)\, d\varrho\right] y(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

ist statthaft.

Die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Gl. (1) — es sei dort λ kein Eigenwert — befriedigt also auch (3). Da insbesondere aus $f(x) \equiv 0$ auch $f_n(x) \equiv 0$ folgt, so ergibt sich weiter, daß jede zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion des Kernes $K(x, \xi)$ auch eine zum Eigenwert λ^n gehörige Eigenfunktion des Kernes $K^{(n)}(x, \xi)$ ist.

Eine Umkehrung der letzten Behauptung ergibt sich nach E. Schmidt wie folgt: Es sei $\varphi(x)$ eine zum Eigenwert Λ gehörige Eigenfunktion des Kernes $K^{(n)}$, der wegen der vorausgesetzten Symmetrie von K ebenfalls symmetrisch ist, also

$$\varphi(x) - \Lambda \int_a^b K^{(n)}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0. \tag{6}$$

Dann bilde man die Ausdrücke

$$\begin{cases} n\chi_\nu(x) = \varphi(x) + h_\nu \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + h_\nu^2 \int_a^b K^{(2)}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \\ \qquad + \cdots + h_\nu^{n-1} \int_a^b K^{(n-1)}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{7}$$

Hierbei sind $h_1, h_2, \ldots, h_n$ die n Wurzeln der Gleichung $h^n = \Lambda$. Durch Summation folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \chi_\nu(x) = \varphi(x), \tag{8}$$

weil $\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^k = 0$ ist für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ferner ist, wenn man (7) mit $h_\nu K(\varrho, x)\,dx$ multipliziert, integriert und die entstehende Gleichung von (7) abzieht,

$$(9)\qquad \chi_\nu(x) = h_\nu \int_a^b K(x,\xi)\chi_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Wegen (8) können nicht alle $\chi_\nu(x)$ identisch verschwinden; es gibt also wenigstens ein $\chi_\nu(x)$, das Eigenfunktion von K ist. Nun hat aber ein symmetrischer Kern, wie er hier vorausgesetzt wird, nur reelle Eigenwerte, und es muß daher $\chi_\nu(x) \equiv 0$ sein, wenn h_ν komplex ist. Nunmehr sind zwei Fälle zu unterscheiden. Fall 1: n ungerade. Es gibt nur eine reelle Wurzel der Gleichung $h^n = \varDelta$. Diese sei $h_1 = \sqrt[n]{\varDelta}$; dann ist $\varphi(x) = \chi_1(x)$ und

$$(10)\qquad \varphi(x) = \sqrt[n]{\varDelta}\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Fall 2: n gerade. Es muß notwendig $\varDelta > 0$ sein, sonst würde sich ergeben, daß der symmetrische Kern K einen imaginären Eigenwert hätte, was unmöglich ist. Die reellen Wurzeln von $h^n = \varDelta$ seien $h_1 = +\sqrt[n]{\varDelta}$ und $h_2 = -\sqrt[n]{\varDelta}$; es ist dann nach (8) $\varphi(x) = \chi_1(x) + \chi_2(x)$ und nach (9)

$$(11)\qquad \chi_1(x) = +\sqrt[n]{\varDelta}\int_a^b K(x,\xi)\chi_1(\xi)\,d\xi$$

und

$$(12)\qquad \chi_2(x) = -\sqrt[n]{\varDelta}\int_a^b K(x,\xi)\chi_2(\xi)\,d\xi.$$

$\chi_1(x)$ oder $\chi_2(x)$, aber nicht beide gleichzeitig, können identisch verschwinden. Es gilt also der Satz: Bei ungeradem n ist jede Eigenfunktion von $K^{(n}$ auch eine Eigenfunktion von K, bei geradem n ist jede Eigenfunktion von $K^{(n)}$ entweder eine Eigenfunktion von K oder die Summe zweier solcher, die natürlich im allgemeinen nicht normiert sein werden. Der letzte Fall kann nach (11) und (12) nur dann eintreten, wenn K zwei Eigenwerte von entgegengesetztem Vorzeichen hat, etwa $\lambda = +\mu, -\mu$. Die zugehörigen Eigenfunktionen $\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ sind nach (3) auch Eigenfunktionen von $K^{(2m)}$, die zum mindestens doppelt zählenden Eigenwert μ^{2m} gehören. Jede lineare Verbindung von $\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ ist dann auch Eigenfunktion von $K^{(2m)}$.

Die Eigenwerte des Kernes K sind die n-ten Wurzeln der Eigenwerte von $K^{(n)}$. Bei geradem n ist bei jedem Eigenwert zu untersuchen, ob das Plus- oder Minuszeichen der Wurzel oder beide einen

Eigenwert von K liefern. Der n-te iterierte Kern $K^{(n)}$ hat also die n-ten Potenzen der Eigenwerte von K zu Eigenwerten, aber auch nur diese. Ist insbesondere n gerade, so hat $K^{(n)}$ nur positive Eigenwerte.

Schließlich ist noch zu beweisen, daß umgekehrt die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Gl. (3) auch der ursprünglichen Gl. (1) genügt. Dabei ist vorläufig für $n = 2m$ noch ausdrücklich vorauszusetzen, daß λ^n kein Eigenwert von $K^{(n)}$ sei; denn selbst wenn λ kein Eigenwert von K ist, kann λ^{2m} ein Eigenwert von $K^{(2m)}$ sein. Dieser Fall tritt ein, wenn $-\lambda$ ein Eigenwert von K ist. Setzt man nun zum Beweis der obigen Behauptung in Gl. (3)

$$\bar{y}(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x) \tag{13}$$

an Stelle von $y(x)$ ein, so erhält man

$$\lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x) - \lambda^{n+1} \int_a^b K^{(n+1)}(x,\varrho)\, y(\varrho)\, d\varrho \\ - \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi = f_n(x).$$

Diese Gleichung ist aber richtig; denn man gelangt auch zu ihr, wenn man (3) mit $\lambda K(\varrho, x)\, dx$ multipliziert, über das Grundgebiet integriert, dabei berücksichtigt, daß

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, f_n(\xi)\, d\xi = f_n(x) + \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \tag{14}$$

ist, und schließlich noch die Veränderlichen passend anders bezeichnet. $\bar{y}(x)$ ist also auch eine Lösung von (3). Da diese Gleichung aber nur eine Lösung hat, so muß $\bar{y}(x) \equiv y(x)$ sein, und die Behauptung folgt aus (13).

Es bleibt noch der bisher zurückgestellte Ausnahmefall zu behandeln. Es sei jetzt $-\lambda$, aber nicht $+\lambda$, ein Eigenwert von K; dann ist auch, wie schon erwähnt, λ^{2m} ein Eigenwert von $K^{(2m)}$. Trotzdem ist die inhomogene Gl. (3) mit $n = 2m$,

$$Y(x) - \lambda^{2m} \int_a^b K^{(2m)}(x,\xi)\, Y(\xi)\, d\xi = f_{2m}(x), \tag{15}$$

wo sich $f_{2m}(x)$ aus (4) mit beliebigem $f(x)$ bestimmt, lösbar. Denn nach § 1, 5 hat eine inhomogene Integralgleichung für einen Eigenwert dann und nur dann eine Lösung, wenn ihre rechte Seite orthogonal ist zu allen Lösungen der adjungierten Gleichung mit ver-

schwindender rechter Seite; diese adjungierte Gleichung fällt aber wegen der Symmetrie des Kernes mit der zugehörigen homogenen Gleichung zusammen. $f_{2m}(x)$ muß also orthogonal sein zu allen zu λ^{2m} gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\iota(x)$ von $K^{(2m)}$, also

$$\int_a^b f_{2m}(\xi)\,\varphi_\iota(\xi)\,d\xi = 0. \tag{16}$$

Da aber nach Voraussetzung $+\lambda$ kein Eigenwert von K ist, so muß die Gesamtheit jener Eigenfunktionen $\varphi_\iota(x)$ übereinstimmen mit der aller zu $-\lambda$ gehörigen Eigenfunktionen von K; es gilt demnach

$$\varphi_\iota(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\,\varphi_\iota(\xi)\,d\xi = 0 \tag{17}$$

und

$$\varphi_\iota(x) - (-\lambda)^\nu \int_a^b K^{(\nu)}(x,\xi)\,\varphi_\iota(\xi)\,d\xi = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{18}$$

Daß nun tatsächlich die Beziehung (16) erfüllt ist, ist unmittelbar durch Einsetzen von (4) mit $n = 2m$ in (16) und Benutzung von (18) nachzurechnen. Die Lösung $Y(x)$ von (15) ist aber nicht eindeutig, sondern, wie man leicht bestätigt, nur bestimmt bis auf eine lineare Verbindung der zu λ^{2m} gehörigen Eigenfunktionen von $K^{(2m)}$, hier also der $\varphi_\iota(x)$. Trotzdem läßt sich, wenn irgendeine Lösung $Y(x) = Y_1(x)$ von (15) bekannt ist, die eindeutige Lösung $y(x)$ der Gl. (1) zurückgewinnen. Man wendet die bei (13) und (14) benutzte Schlußweise an, bildet

$$\overline{Y}_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\,Y_1(\xi)\,d\xi + f(x) \tag{19}$$

und findet so, daß sowohl $\overline{Y}_1(x)$ als auch $Y_1(x)$ Lösungen von (15) sind, sich also nur um eine lineare Verbindung der $\varphi_\iota(x)$ unterscheiden. Die Differenz erfüllt also Gl. (17), d. h. es gilt

$$[Y_1(x) - \overline{Y}_1(x)] + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\,[Y_1(\xi) - \overline{Y}_1(\xi)]\,d\xi = 0. \tag{20}$$

Multipliziert man Gl. (20) mit $\frac{1}{2}$ und addiert sie zu (19), so folgt

$$\tfrac{1}{2}[Y_1(x) + \overline{Y}_1(x)] - \lambda \int_a^b K(x,\xi)\cdot\tfrac{1}{2}[Y_1(\xi) + \overline{Y}_1(\xi)]\,d\xi = f(x). \tag{21}$$

In $y(x) = \frac{1}{2}[Y_1(x) + \overline{Y}_1(x)]$ hat man somit die eindeutige Lösung von (1) gewonnen, unabhängig von der Willkürlichkeit in der Wahl der Funktion $Y_1(x)$. Aus einer Lösung von (3) läßt sich also in allen Fällen die eindeutige Lösung von (1) finden.

Aus den abgeleiteten Beziehungen zwischen den Eigenwerten von $K(x, \xi)$ und $K^{(n)}(x, \xi)$ ergibt sich die Existenz des lösenden Kernes $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ der Gl. (1), wenn der lösende Kern $\Gamma_n(x, \xi; \lambda^n)$ von (3) existiert. Daß das Umgekehrte nicht zu gelten braucht, folgt aus dem Vorhergehenden: Ist $-\lambda$ ein Eigenwert von $K(x, \xi)$, $+\lambda$ aber nicht, dann existiert $\Gamma(x, \xi; \lambda)$, $\Gamma_{2m}(x, \xi; \lambda^{2m})$ dagegen nicht. Es gilt nun die Formel

$$\left\{\begin{aligned}\Gamma(x, \xi; \lambda) &= G_n(x, \xi; \lambda) + \lambda^{n-1}\Gamma_n(x, \xi; \lambda^n) \\ &\quad + \lambda^n \int^b G_n(x, \varrho; \lambda)\Gamma_n(\varrho, \xi; \lambda^n)\, d\varrho.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt

$$G_n(x, \xi; \lambda) = K(x, \xi) + \lambda K^{(2)}(x, \xi) + \cdots + \lambda^{n-2}K^{(n-1)}(x, \xi). \tag{23}$$

Dieses Ergebnis kann durch Einsetzen der Neumannschen Reihen für kleines $|\lambda|$ unmittelbar bestätigt werden; es gilt aber auch allgemein, und zwar hat man dann in (22) zu setzen [vgl. § 1, (14)]

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} \tag{24}$$

und

$$\Gamma_n(x, \xi; \lambda^n) = \frac{D_n(x, \xi; \lambda^n)}{D_n(\lambda^n)}, \tag{25}$$

wo die D_n die zu $K^{(n)}(x, \xi)$ gehörigen Fredholmschen Reihen sind.

Die vorstehenden Sätze behalten nun auch bei solchen Kernen ihre Gültigkeit, die im endlichen Grundgebiet von nicht höherer als α-ter Ordnung $(0 < \alpha < 1)$ unendlich werden, wofern nur die Unstetigkeitsstellen regulär verteilt sind. In **3** wird an einem wichtigen Spezialfall gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen in der Folge der iterierten Kerne K, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$, ... ein jeder ebenfalls regulär verteilte Unendlichkeitsstellen, und zwar von geringerer Ordnung als der vorhergehende hat, bis ein gewisser — es sei $K^{(n)}$ — und mit ihm alle folgenden beschränkt bleiben. Der dort gegebene Beweis läßt sich ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen. Ferner folgt unmittelbar, daß $\int_a^b |K^{(\nu)}(x, \xi)|\, d\xi$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ für alle $a \leqq x \leqq b$ existiert. Da $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und somit beschränkt ist, so folgt auch die Beschränktheit von $\int_a^b K^{(\nu)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$. Man kann sogar zeigen, daß diese Ausdrücke

stetige Funktionen von x sind. Dazu umgibt man die Kurven, längs derer $K^{(\nu)}(x,\xi)$ unendlich wird, mit Streifen der Breite ε, setzt $K^{(\nu)}(x,\xi) = K_1^{(\nu)}(x,\xi) + K_2^{(\nu)}(x,\xi)$, wo $K_1^{(\nu)}$ außerhalb der Streifen gleich $K^{(\nu)}$ und innerhalb gleich Null ist und für $K_2^{(\nu)}$ das Umgekehrte gilt, und läßt schließlich $\varepsilon \to 0$ gehen. Daher ist auch die in (4) definierte Funktion $f_n(x)$ stetig. Gl. (3) besitzt also eine stetige Lösung $y(x)$. Weiter behalten auch $\int\limits_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$ und die in (13) eingeführte Funktion $\bar{y}(x)$ ihren Sinn und sind stetig. Schließlich ist noch der Nachweis zu führen, daß die Umkehrung der Integrationsfolgen in Gl. (5) statthaft bleibt. Dies geschieht, indem man wieder $K = K_1 + K_2$ setzt, wo K_1 und K_2 die obigen Bedeutungen haben, und zeigt, daß die Differenz der rechten und linken Seite von (5) für $\varepsilon \to 0$ gegen Null geht. Es erübrigt sich, im einzelnen nachzuweisen, daß auch alle übrigen Sätze von 2 für die hier betrachteten uneigentlich singulären Integralgleichungen gelten. Man ist also berechtigt, statt einer solchen die ihr weitgehend äquivalente reguläre Gleichung mit dem Kern $K^{(n)}$ aufzulösen.

3. Der Kern $K(x,\xi) = \dfrac{H(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}$ und seine Verallgemeinerung für k Paare von Veränderlichen. Von großer Wichtigkeit sind solche singulären Integralgleichungen, deren Kerne längs der Diagonale des Grundquadrats unendlich werden, eine Unstetigkeit, wie sie bei Greenschen Funktionen häufig auftritt. Hier werde ein solcher Kern in der Form

$$K(x,\xi) = \frac{H(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}, \qquad \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1, \\ a \leqq x, \xi \leqq b, \end{array} \tag{26}$$

betrachtet. $H(x,\xi)$ sei im ganzen Grundquadrat symmetrisch und stetig, und es sei dort überall $|H(x,\xi)| \leqq M$. $K(x,\xi)$ ist also ein symmetrischer Kern mit regulär verteilten Unstetigkeiten. Zunächst soll nun gezeigt werden, daß alle iterierten Kerne von (26) von einem gewissen Index ab absolut beschränkt bleiben. Man hat nämlich

$$|K^{(2)}(x,\xi)| = \left|\int\limits_a^b K(x,\varrho)K(\varrho,\xi)\,d\varrho\right| \leqq M^2 \int\limits_a^b \frac{d\varrho}{|x-\varrho|^\alpha \cdot |\varrho-\xi|^\alpha}. \tag{27}$$

Ist $2\alpha - 1 < 0$, so hat das letzte Integral stets einen endlichen Wert, da der Integrand selbst im Fall $x = \xi$ noch von geringerer

als erster Ordnung unendlich wird; dann ist also schon $K^{(2)}$ beschränkt. Ist $2\alpha - 1 > 0$, dann werde durch

$$\varrho = x\sigma + \xi(1-\sigma), \quad d\varrho = (x-\xi)\,d\sigma$$

eine neue Veränderliche σ eingeführt, wobei zunächst $x \geqq \xi$ angenommen wird, was wegen der Symmetrie des Kernes keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Man erhält dann

$$(28) \qquad |K^{(2)}(x,\xi)| \leqq \frac{M^2}{|x-\xi|^{2\alpha-1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{\alpha} \cdot |\sigma|^{\alpha}}.$$

Dabei ist das Integral vergrößert worden, indem statt

$$\frac{a-\xi}{x-\xi} \quad \text{und} \quad \frac{b-\xi}{x-\xi}$$

als Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ gesetzt worden sind. Das so erhaltene Integral ist für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ eine endliche positive Zahl $P_2(\alpha)$. Um dies nachzuweisen, hat man das Integral nur an den Unendlichkeitsstellen $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ des Integranden und im Unendlichen abzuschätzen. Es läßt sich jedoch sogar der genaue Wert von $P_2(\alpha)$ angeben, wenn man das Integral wegen der Absolutbeträge im Nenner in drei Teile $\left(\int_{-\infty}^{0}, \int_{0}^{1} \text{ und } \int_{1}^{\infty}\right)$ spaltet und jeden Teil durch das Eulersche Integral 1. Gattung

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \; q > 0,$$

(vgl. I, § 4, 2) ausdrückt. $K^{(2)}$ wird also im Fall $2\alpha - 1 > 0$ längs der Geraden $x = \xi$ unendlich wie $\dfrac{1}{|x-\xi|^{2\alpha-1}}$. Um zu sehen, daß $K^{(2)}$ auch noch für $2\alpha - 1 = 0$ dort unendlich wird, und zwar wie $\log|x-\xi|$, rechnet man am einfachsten das Integral in (28), das sich in diesem Fall durch elementare Funktionen ausdrücken läßt, aus und trägt

$$\frac{a-\xi}{x-\xi} \quad \text{und} \quad \frac{b-\xi}{x-\xi}$$

als Grenzen ein.

In gleicher Weise folgt allgemein aus der Abschätzung des Integrals

$$K^{(n)}(x,\xi) = \int_a^b K^{(n-1)}(x,\varrho)\,K(\varrho,\xi)\,d\varrho, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

daß $|K^{(n)}(x, \xi)|$ überall im Grundgebiet beschränkt bleibt, sobald $n\alpha - (n-1) < 0$ ist, daß dies jedoch für $n\alpha - (n-1) > 0$ nicht mehr zutrifft und dann

$$(29) \quad |K^{(n)}(x,\xi)| \leq \frac{M^n}{|x-\xi|^{n\alpha-(n-1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{(n-1)\alpha-(n-2)} \cdot |\sigma|^{\alpha}}$$

gilt, wobei das letzte Integral eine endliche positive Zahl $P_n(\alpha)$ ist. Alle iterierten Kerne des Kernes (26) können also nur längs der Diagonale $x = \xi$ des Grundquadrats Unstetigkeiten haben, falls solche überhaupt vorhanden sind. Wählt man also bei gegebenem α eine ganze Zahl $n > \frac{1}{1-\alpha}$, so ist $K^{(n)}$ ein beschränkter Kern.

Daß beim Kern

$$(30) \qquad K(x,\xi) = H(x,\xi) \log \frac{1}{|x-\xi|},$$

wo $H(x, \xi)$ beschränkt ist, schon $K^{(2)}$ beschränkt bleibt, folgt daraus, daß der Logarithmus schwächer unendlich wird als eine noch so kleine positive Potenz, daß also $\lim\limits_{z \to 0} \left[\log \frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}\right] = 0$ ist für $\alpha > 0$.

Nach dem am Schluß von 2 aufgestellten Satz ist damit die Existenz von Lösungen der nunmehr als quasiregulär zu bezeichnenden Integralgleichung mit dem Kern (26) oder (30) gesichert. Man erhält diese Lösungen — im Fall der inhomogenen Gleichung eine einzige — durch Auflösen der regulären Gleichung mit dem überall im Grundgebiet stetigen Kern $K^{(n)}$.

Ohne Beweis sei noch ein Kriterium [1]) mitgeteilt, das über die Existenz von unendlich vielen positiven bzw. negativen Eigenwerten des Kernes (26) aussagt: Wenn $H(x, x)$ positiv (negativ) ist in einem Teilintervall vom Intervall $a \ldots b$, dann sind positive (negative) Eigenwerte in unendlicher Anzahl vorhanden.

Nunmehr sollen die gefundenen Ergebnisse auf Kerne vom Typus (26) mit k Paaren von Veränderlichen übertragen werden, eine Verallgemeinerung, deren man oft in den Anwendungen bedarf. Betrachtet werde der Kern

$$(31) \quad K(x_1, x_2, \ldots, x_k; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = \frac{H(x_1, x_2, \ldots, x_k; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)}{r^{\alpha}},$$

wobei $|H(x_1, \ldots, \xi_k)| \leq M$ im ganzen Grundgebiet ist,

$$r = \left|\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + \cdots + (x_k-\xi_k)^2}\right|$$

---

[1]) T. Carleman, Arkiv f. matem. **13** (1918), Nr. 6.

und $0 < \alpha < k$. Für den iterierten Kern folgt dann, wenn als Grundgebiet der $2\,k$-dimensionale Würfel gewählt wird,

$$(32)\quad \begin{cases} |K^{(2)}(x_1,\ldots,\xi_k)| \\ = \left| \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b \frac{H(x_1,\ldots,x_k;\varrho_1,\ldots,\varrho_k) H(\varrho_1,\ldots,\varrho_k;\xi_1,\ldots,\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_{\iota=1}^k (x_\iota-\varrho_\iota)^2}^{\,\alpha} \sqrt{\sum\limits_{\iota=1}^k (\varrho_\iota-\xi_\iota)^2}^{\,\alpha}} d\varrho_1 \ldots d\varrho_k \right| \\ \leqq M^2 \left| \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b \frac{d\varrho_1 . d\varrho_2 \ldots d\varrho_k}{\sqrt{\sum\limits_{\iota=1}^k (x_\iota-\varrho_\iota)^2}^{\,\alpha} \cdot \sqrt{\sum\limits_{\iota=1}^k (\varrho_\iota-\xi_\iota)^2}^{\,\alpha}} \right|. \end{cases}$$

Nun wird benutzt, daß das arithmetische Mittel nie kleiner als das geometrische ist, daß also immer

$$\sum_{\iota=1}^k (x_\iota - y_\iota)^2 \geqq k \sqrt[k]{\prod_{\iota=1}^k (x_\iota - y_\iota)^2}.$$

Mithin wird

$$|K^{(2)}(x_1,\ldots,\xi_k)| \leqq M^2 \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b \frac{d\varrho_1 . d\varrho_2 \ldots d\varrho_k}{\sqrt{k} \prod\limits_{\iota=1}^k |x_\iota - \varrho_\iota|^{\frac{\alpha}{k}} \cdot \sqrt{k} \prod\limits_{\iota=1}^k |\varrho_\iota - \xi_\iota|^{\frac{\alpha}{k}}}$$

$$\leqq \frac{M^2}{k} \prod_{\iota=1}^k \int\limits_a^b \frac{d\varrho_\iota}{|x_\iota - \varrho_\iota|^{\frac{\alpha}{k}} \cdot |\varrho_\iota - \xi_\iota|^{\frac{\alpha}{k}}}.$$

Ebenso wie bei Formel (27) und (28) folgt, daß $|K^{(2)}(x_1,\ldots,\xi_k)|$ beschränkt ist, falls $2\frac{\alpha}{k} - 1 < 0$, dagegen nicht beschränkt, falls $2\frac{\alpha}{k} - 1 > 0$, da dann

$$(33)\qquad |K^{(2)}(x_1,\ldots,\xi_k)| \leqq \frac{M^2}{k} P_2^k\left(\frac{\alpha}{k}\right) \prod_{\iota=1}^k \frac{1}{|x_\iota - \xi_\iota|^{2\frac{\alpha}{k}-1}}.$$

Allgemein gilt

$$(34)\qquad \begin{cases} |K^{(n)}(x_1,\ldots,\xi_k)| \leqq \frac{M^n}{k^{\frac{n}{2}}} P_n^k\left(\frac{\alpha}{k}\right) \prod\limits_{\iota=1}^k \frac{1}{|x_\iota - \xi_\iota|^{n\frac{\alpha}{k}-(n-1)}}, \\ \qquad n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

für $n\frac{\alpha}{k}-(n-1)>0$. Wählt man aber bei gegebenem α eine ganze Zahl n derart, daß $n\frac{\alpha}{k}-(n-1)<0$, also $n>\frac{1}{1-\frac{\alpha}{k}}$ ist, so bleibt $|K^{(n)}(x_1,\ldots,\xi_k)|$ im ganzen Grundgebiet beschränkt.

4. Unendliches Grundgebiet. Ist das Grundgebiet der Integralgleichung unendlich, so kann man zuerst versuchen, durch eine Transformation der beiden Veränderlichen ein endliches zu erhalten. So führt die Substitution $x=\frac{x'}{1-x'}$, $\xi=\frac{\xi'}{1-\xi'}$ das Grundgebiet $0\leqq x$, $\xi\leqq\infty$ in $0\leqq x'$, $\xi'\leqq 1$ über. Es ist möglich, daß man so auf eine Integralgleichung geführt wird, die nach den geschilderten Methoden behandelt werden kann, jedoch wird im allgemeinen der transformierte Kern im endlichen Grundgebiet stellenweise unendlich werden und keine regulär verteilten Unstetigkeiten mehr haben. Immerhin läßt sich ein großer Teil der für endliches Grundgebiet gegebenen Beweise auch auf das Intervall $a\cdots\infty$, insbesondere $0\cdots\infty$ und $-\infty\cdots+\infty$, übertragen, wenn noch einige Zusatzvoraussetzungen erfüllt sind. Ein wesentliches Hilfsmittel bei jenen Beweisen ist die Schwarzsche Integralungleichung (vgl. S. 523), die ihre Gültigkeit auch bei unendlichem Intervall behält. Es genügt daher, von allen vorkommenden Funktionen einer Veränderlichen die Existenz des Integralquadrats vorauszusetzen, also u. a. die von $\int_a^\infty f(x)^2\,dx$, $\int_a^\infty \varphi_\nu(x)^2\,dx$ und $\int_a^\infty z(x)^2\,dx$, wo $z(x)$ die in § 3, **3**, (12) vorkommende Funktion ist. Von dem (symmetrischen) Kern ist zu verlangen, daß $\int_a^\infty K(x,\xi)^2\,d\xi<M$ für alle x und $\int_a^\infty\int_a^\infty K(x,\xi)^2\,dx\,d\xi=C$ ist. Dann existieren auch alle iterierten Kerne. Schließlich hat man noch die Zulässigkeit der notwendigen Vertauschungen von Integrationsfolgen in jedem Einzelfall zu prüfen und zu berücksichtigen, daß eine unendliche Reihe $\sum\limits_\nu u_\nu(x)$ nur dann über ein unendliches Intervall gliedweise integriert werden darf, wenn sie in jedem beliebig großen, aber endlichen Intervall gleichmäßig konvergent ist, wenn $\sum\limits_\nu\int_a^\infty u_\nu(x)\,dx$ konvergiert und $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left[\sum\limits_\nu\int_\omega^\infty u_\nu(x)\,dx\right]=0$ ist[1]). Ein unendliches Grund-

[1]) Wegen der Durchführung der Beweise im einzelnen muß auf die Dissertation von Rud. Neumann, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen (Breslau 1912), verwiesen werden.

gebiet haben auch die meisten der behandelten eigentlich singulären Integralgleichungen mit speziellen Kernen (siehe **5** und **6**).

5. Beispiele eigentlich singulärer Integralgleichungen. Da der Begriff der eigentlich singulären Integralgleichungen definitionsgemäß alle die Gleichungen umfaßt, die weder regulär noch quasiregulär sind, so lassen sich allgemeinere Sätze nur in dem Maße gewinnen, wie der Natur des Kernes oder des Grundgebiets noch besondere Einschränkungen auferlegt werden. Jedoch ist man so nur mittels der Hilbertschen Theorie der Hauptachsentransformation quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen zu umfassenderen Ergebnissen gekommen. Nach speziellen Methoden sind ferner eine Anzahl von Kernen näher untersucht worden, die sich in den Anwendungen, namentlich in der Physik, darbieten.

Es folgen nunmehr einige Beispiele für charakteristische Erscheinungen, die bei den eigentlich singulären Gleichungen auftreten können.

Ein Streckenspektrum besitzt die homogene Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty e^{-x\xi}\, y(\xi)\, d\xi = 0. \tag{35}$$

Berücksichtigt man nämlich, daß für $x > 0$ und reelles $a < 1$

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\, \xi^{-a}\, d\xi = \int_0^\infty e^{-\eta} \left(\frac{\eta}{x}\right)^{-a} \frac{d\eta}{x} = \Gamma(1-a)\,.\, x^{a-1} \tag{36}$$

gilt und ebenso, wenn man a durch $1-a$ ersetzt,

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\, \xi^{a-1}\, d\xi = \Gamma(a)\,.\, x^{-a}, \tag{37}$$

wobei $1 - a < 1$, also $a > 0$ sein muß, und setzt man

$$\sqrt{\Gamma(a)}\,.\, x^{-a} + \sqrt{\Gamma(1-a)}\,.\, x^{a-1} = \varphi_a^{(+)}(x) \tag{38}$$

und

$$\sqrt{\Gamma(a)}\,.\, x^{-a} - \sqrt{\Gamma(1-a)}\,.\, x^{a-1} = \varphi_a^{(-)}(x) \tag{39}$$

mit $0 < a < 1$, dann folgt aus (36) und (37)

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\, \varphi_a^{(+)}(\xi)\, d\xi = +\sqrt{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}\,.\, \varphi_a^{(+)}(x) \tag{40}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\, \varphi_a^{(-)}(\xi)\, d\xi = -\sqrt{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}\,.\, \varphi_a^{(-)}(x). \tag{41}$$

Da $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$ ist (vgl. S. 226), so sind die zu den Eigenfunktionen $\varphi_a^{(+)}(x)$ bzw. $\varphi_a^{(-)}(x)$ gehörigen Eigenwerte

$$\lambda_a = \pm \sqrt{\frac{\sin \pi a}{\pi}}. \tag{42}$$

Die Eigenwerte erfüllen also das endliche Intervall $-\frac{1}{\sqrt{\pi}} < \lambda < +\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ mit Ausschluß des Wertes $\lambda = 0$. Ob es noch weitere Eigenwerte gibt, muß hier unentschieden bleiben.

Als weiteres Beispiel folge die Klasse der sogenannten Fourierkerne, die nur zwei Eigenwerte von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

Das Fouriersche Integraltheorem (IV, § 3, 3) gestattet bekanntlich, eine willkürliche Funktion $y(x)$, von der nur verlangt wird, daß sie in jedem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung genügt und daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\,dx$ existiert, in Form eines bestimmten Integrals mit unendlichen Grenzen darzustellen. Insbesondere ist für eine gerade Funktion

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\xi)\left[\int_0^\infty \cos(\xi\varrho)\, y(\varrho)\, d\varrho\right] d\xi. \tag{43}$$

Ist nun die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty \cos(x\xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{44}$$

gegeben, so folgt, wenn man sie in sich selbst einsetzt,

$$y(x) = \lambda^2 \int_0^\infty \cos(x\xi)\left[\int_0^\infty \cos(\xi\varrho)\, y(\varrho)\, d\varrho\right] d\xi. \tag{45}$$

Mithin ist $\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Hiermit ist nur gezeigt: wenn es überhaupt Eigenwerte des Kernes $\cos(x\xi)$ gibt, so können diese nur die Werte $+\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ haben.

Schreibt man das Fouriertheorem für eine ungerade Funktion $y(x)$ auf, so erhält man das gleiche Ergebnis für den Kern $\sin(x\xi)$.

Ferner gilt nach VIII, § 3, (36) ein ähnliches Fouriertheorem für die Besselsche Funktion n-ter Ordnung $J_n(x)$:

$$(46)\qquad y(x) = \frac{1}{4}\int_0^\infty J_n(\sqrt{x\xi})\left[\int_0^\infty J_n(\sqrt{\xi\varrho})\, y(\varrho)\, d\varrho\right] d\xi.$$

In gleicher Weise folgt hier, daß der Kern $J_n(\sqrt{x\xi})$ nur $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ zu Eigenwerten haben kann, wenn solche überhaupt existieren[1]).

Daß $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ wirklich ein Eigenwert des Kernes $\cos(x\xi)$ ist, und zwar ein zur Eigenfunktion $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ gehöriger, folgt aus der Integralbeziehung

$$(47)\qquad \int_0^\infty \cos(x\xi)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Was den Kern $\sin(x\xi)$ betrifft, so folgt durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Integralformeln

$$(48)\qquad \int_0^\infty \sin(x\xi)\, e^{-a\xi}\, d\xi = \frac{x}{a^2+x^2}$$

und

$$(49)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x\xi)}{a^2+\xi^2}\,\xi\, d\xi = \frac{\pi}{2}\, e^{-ax}$$

($a > 0$, reell; $x > 0$) die Beziehung

$$(50)\quad \int_0^\infty \sin(x\xi)\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a\xi} \pm \frac{\xi}{a^2+\xi^2}\right] d\xi = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2+x^2}\right].$$

$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ist also ein zur Eigenfunktion $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2+x^2}$ und $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ein zur Eigenfunktion $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} - \frac{x}{a^2+x^2}$ gehöriger unendlich vielfach zählender Eigenwert; da $a > 0$ ganz beliebig ist, so gehört zu jedem der beiden Eigenwerte ein Kontinuum von Eigenfunktionen. Dagegen kann bei den regulären Integralgleichungen ein endlicher Eigenwert nur eine endliche Vielfachheit haben (vgl. S. 530).

[1]) Weiteres über Fourierkerne bei H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen, Dissertation Göttingen, 1908.

Da $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$ ist (vgl. S. 226), so sind die zu den Eigenfunktionen $\varphi_a^{(+)}(x)$ bzw. $\varphi_a^{(-)}(x)$ gehörigen Eigenwerte

$$\lambda_a = \pm\sqrt{\frac{\sin\pi a}{\pi}}. \tag{42}$$

Die Eigenwerte erfüllen also das endliche Intervall $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}<\lambda<+\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ mit Ausschluß des Wertes $\lambda = 0$. Ob es noch weitere Eigenwerte gibt, muß hier unentschieden bleiben.

Als weiteres Beispiel folge die Klasse der sogenannten Fourierkerne, die nur zwei Eigenwerte von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

Das Fouriersche Integraltheorem (IV, § 3, 3) gestattet bekanntlich, eine willkürliche Funktion $y(x)$, von der nur verlangt wird, daß sie in jedem endlichen Intervall der Dirichletschen Bedingung genügt und daß $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y(x)|\,dx$ existiert, in Form eines bestimmten Integrals mit unendlichen Grenzen darzustellen. Insbesondere ist für eine gerade Funktion

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos(x\xi)\left[\int\limits_0^\infty \cos(\xi\varrho)\,y(\varrho)\,d\varrho\right]d\xi. \tag{43}$$

Ist nun die Integralgleichung

$$y(x)=\lambda\int\limits_0^\infty \cos(x\xi)\,y(\xi)\,d\xi \tag{44}$$

gegeben, so folgt, wenn man sie in sich selbst einsetzt,

$$y(x)=\lambda^2\int\limits_0^\infty \cos(x\xi)\left[\int\limits_0^\infty \cos(\xi\varrho)\,y(\varrho)\,d\varrho\right]d\xi. \tag{45}$$

Mithin ist $\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Hiermit ist nur gezeigt: wenn es überhaupt Eigenwerte des Kernes $\cos(x\xi)$ gibt, so können diese nur die Werte $+\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ haben.

Schreibt man das Fouriertheorem für eine ungerade Funktion $y(x)$ auf, so erhält man das gleiche Ergebnis für den Kern $\sin(x\xi)$.

Ferner gilt nach VIII, § 3, (36) ein ähnliches Fouriertheorem für die Besselsche Funktion n-ter Ordnung $J_n(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{4}\int_0^\infty J_n(\sqrt{x\xi})\left[\int_0^\infty J_n(\sqrt{\xi\varrho})\, y(\varrho)\, d\varrho\right] d\xi. \tag{46}$$

In gleicher Weise folgt hier, daß der Kern $J_n(\sqrt{x\xi})$ nur $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ zu Eigenwerten haben kann, wenn solche überhaupt existieren[1]).

Daß $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ wirklich ein Eigenwert des Kernes $\cos(x\xi)$ ist, und zwar ein zur Eigenfunktion $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ gehöriger, folgt aus der Integralbeziehung

$$\int_0^\infty \cos(x\xi)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{47}$$

Was den Kern $\sin(x\xi)$ betrifft, so folgt durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Integralformeln

$$\int_0^\infty \sin(x\xi)\, e^{-a\xi}\, d\xi = \frac{x}{a^2 + x^2} \tag{48}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x\xi)}{a^2 + \xi^2}\, \xi\, d\xi = \frac{\pi}{2}\, e^{-ax} \tag{49}$$

($a > 0$, reell; $x > 0$) die Beziehung

$$\int_0^\infty \sin(x\xi)\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a\xi} \pm \frac{\xi}{a^2 + \xi^2}\right] d\xi = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2 + x^2}\right]. \tag{50}$$

$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ist also ein zur Eigenfunktion $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2 + x^2}$ und $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ein zur Eigenfunktion $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} - \frac{x}{a^2 + x^2}$ gehöriger unendlich vielfach zählender Eigenwert; da $a > 0$ ganz beliebig ist, so gehört zu jedem der beiden Eigenwerte ein Kontinuum von Eigenfunktionen. Dagegen kann bei den regulären Integralgleichungen ein endlicher Eigenwert nur eine endliche Vielfachheit haben (vgl. S. 530).

---

[1]) Weiteres über Fourierkerne bei H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen, Dissertation Göttingen, 1908.

6. Weitere Beispiele: Kerne der Form $H(|x-\xi|)$. Um zu Aussagen über die singuläre Integralgleichung mit dem Kern $e^{-|x-\xi|}$ und dem Grundgebiet $-\infty \cdots +\infty$ zu gelangen, kann man nach Picard folgendermaßen verfahren: In der Identität

$$(51) \qquad y''(\xi)z(\xi)-y(\xi)z''(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi}[y'(\xi)z(\xi)-y(\xi)z'(\xi)]$$

wird $y(\xi)$ durch eine überall samt erster Ableitung beschränkte Lösung der Differentialgleichung

$$(52) \qquad y''(\xi)-(1-2\lambda)y(\xi)=g(\xi)$$

ersetzt. $g(\xi)$ ist eine gegebene beschränkte Funktion. $z(\xi)$ wird durch eine Lösung der Differentialgleichung

$$(53) \qquad z''(\xi)-\mu z(\xi)=0, \quad \mu>0,$$

ersetzt, und zwar wird $z(\xi)$ in der Form

$$(54) \qquad z(\xi)=e^{\varepsilon\sqrt{\mu}(\xi-x)}$$

angenommen. Für ε ist $+1$ oder -1 zu setzen; man erhält so ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gl. (53). Die Integrationskonstante ist mit x bezeichnet worden. Die aus (51) unter Berücksichtigung von (52), (53) und (54) entstehende Gleichung wird von $\xi=-\infty$ bis $\xi=x$ für $\varepsilon=+1$ und von $\xi=x$ bis $\xi=+\infty$ für $\varepsilon=-1$ integriert. Addition der beiden integrierten Gleichungen liefert schließlich

$$(55) \quad [(1-2\lambda)-\mu]\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sqrt{\mu}|x-\xi|}y(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sqrt{\mu}|x-\xi|}g(\xi)d\xi=-2\sqrt{\mu}\,y(x).$$

Jede den Voraussetzungen genügende Lösung $y(x)$ von (52) ist also auch eine Lösung der Integralgleichung (55), und zwar ganz gleich, welchen Wert man der positiven Konstanten μ erteilt. Das Umgekehrte gilt auch, wovon man sich durch erlaubtes Differenzieren unter dem Integralzeichen überzeugt. Sei etwa $\mu=1$, dann erhält man aus (55) die der Differentialgleichung (52) ebenfalls gleichwertige Integralgleichung

$$(56) \qquad y(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|}y(\xi)d\xi=f(x),$$

wobei zur Abkürzung

$$(57) \qquad f(x)=-\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|}g(\xi)d\xi$$

eingeführt worden ist. Setzt man ferner $\mu = 1 - 2\lambda$ (da $\mu > 0$ vorausgesetzt war, muß hier $\lambda < \frac{1}{2}$ sein), so ist die entstehende Gleichung

$$(58) \qquad y(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-\xi|} g(\xi)\, d\xi$$

der Differentialgleichung (52) wiederum gleichwertig. Jede Lösung $y(x)$ von (56) muß daher auch (58) befriedigen, und umgekehrt. Nun erscheint aber Gl. (58) bereits nach $y(x)$ aufgelöst, und man hat somit in (58) auf bequeme Weise die einzige Lösung der Integralgleichung (56), (57) gefunden, da die durch (58) dargestellte Funktion wegen der Beschränktheit von $g(x)$ selbst samt erster Ableitung beschränkt ist. Vorausgesetzt ist dabei noch, daß es gelingt, die rechte Seite $f(x)$ der gegebenen Gl. (56) in der Gestalt (57) darzustellen.

Gl. (56) gibt zugleich ein Beispiel dafür, daß bei singulären Integralgleichungen die Werte von λ, für die die inhomogene Gleichung nicht lösbar ist, nicht durch den Kern allein — wie bei den regulären — bestimmt zu sein brauchen, sondern überdies noch von der rechten Seite abhängen können. Wird nämlich

$$g(\xi) = -\cos\alpha\xi$$

gesetzt, wobei α eine beliebige reelle Zahl ist, so wird aus (57)

$$f(x) = \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}$$

und aus (58) für $\lambda < \frac{1}{2}$

$$(59) \qquad y(x) = \frac{\cos\alpha x}{1 - 2\lambda + \alpha^2}.$$

Daß dieser Ausdruck auch für $\lambda \geqq \frac{1}{2}$ gilt, folgt durch Einsetzen in (52) oder (56). Die inhomogene Gleichung

$$(60) \qquad y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} y(\xi)\, d\xi = \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}$$

ist also für $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$ nicht lösbar, da (59) dann für alle x unendlich wird. Dieser Ausnahmewert hängt von der rechten Seite von (60) ab, da die Konstante α nur dort vorkommt; er kann jede Stelle der λ-Achse zwischen $\frac{1}{2}$ und $+\infty$ einnehmen.

Darüber hinaus läßt sich noch zeigen, daß für jedes $\frac{1}{2} \leqq \lambda < +\infty$ die zu (56) oder (60) gehörige homogene Gleichung

$$(61) \qquad y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} y(\xi)\, d\xi = 0$$

lösbar ist, jedes λ zwischen $\frac{1}{2}$ und $+\infty$ auch als Eigenwert bezeichnet werden darf. (61) ist nämlich nach dem Vorstehenden durch jede samt ihrer ersten Ableitung beschränkte Lösung von

$$y''(x) - (1 - 2\lambda)\, y(x) = 0 \tag{62}$$

befriedigt. $\cos(\sqrt{2\lambda - 1}\, x)$ und $\sin(\sqrt{2\lambda - 1}\, x)$ sind also Lösungen von (61), und jedes $\lambda > \frac{1}{2}$ ist ein doppelt, $\lambda = \frac{1}{2}$ ein einfach zählender Eigenwert. Man hat hier also zugleich ein Beispiel eines „Streckenspektrums", das ein unendliches Intervall erfüllt. Die Ergebnisse können dahin zusammengefaßt werden, daß für $-\infty < \lambda < \frac{1}{2}$ die inhomogene Gl. (56) stets eine eindeutige, durch (58) gegebene beschränkte Lösung besitzt. Für $\frac{1}{2} \leqq \lambda < +\infty$ kann für gewisse rechte Seiten der Fall eintreten, daß sie nicht lösbar ist; existiert aber auch hier eine beschränkte Lösung, dann ist diese vieldeutig, da es für $\frac{1}{2} \leqq \lambda < +\infty$ beschränkte Eigenfunktionen der homogenen Gl. (61) gibt, die zur Lösung der inhomogenen addiert werden können, ohne daß diese aufhört, Lösung zu sein. Die Alternative (vgl. S. 518) braucht also bei singulären Integralgleichungen nicht mehr zu gelten [1].

Von den Integralgleichungen der Form

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(|x - \xi|)\, y(\xi)\, d\xi = 0, \tag{63}$$

deren Kern eine gerade Funktion des Arguments $x - \xi$ ist und zu denen auch Gl. (61) gehört, lassen sich sofort Eigenfunktionen angeben. Durch Einsetzen bestätigt man nämlich, daß $e^{\alpha x}$ und $e^{-\alpha x}$ die Gleichung befriedigen, wenn man setzt

$$\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = \frac{1}{\int_0^\infty H(\varrho)(e^{\alpha\varrho} + e^{-\alpha\varrho})\, d\varrho}. \tag{64}$$

Die Existenz des Integrals ist dabei immer vorausgesetzt. α werde vorläufig als reell angenommen. Nimmt man von der Funktion $H(\varrho)$ noch an [2], daß sie für $\varrho \geqq 0$, abgesehen von endlich vielen Stellen, positiv und stetig ist, daß es ferner eine Konstante A gibt $(0 < A \leqq +\infty)$, so daß das Integral in (64) für alle positiven $\alpha < A$ konvergiert und für $\alpha = A$ divergiert, und bedenkt, daß der zweite Faktor im Inte-

[1] Die Integralgleichung mit dem Kern $e^{-|x-\xi|}$ und dem Grundgebiet $0 \cdots +\infty$ ist von Lalesco behandelt worden. Vgl. T. Lalesco, Théorie des équations intégrales, Paris 1912, S. 121 ff.

[2] Vgl. E. Hopf, Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Kl., 1928, S. 233. Dort finden sich weitere Sätze über singuläre Integralgleichungen mit positivem Kern.

granden als Funktion von α im Intervall $0 \cdots + \infty$ monoton wächst, so folgt, daß $\lambda(\alpha)$ im Intervall $0 \leqq \alpha < A$ von $\lambda(0) = \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(\varrho)\,d\varrho}$ bis $\lambda(A) = 0$ monoton und stetig abnimmt. Zu jedem λ mit $0 < \lambda \leqq \lambda(0)$ gehört daher ein wohlbestimmtes $\alpha \geqq 0$. Die zugehörige Lösung darf in der Form $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$ geschrieben werden. Wählt man $\lambda = \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(\varrho)\,d\varrho}$, also $\alpha = 0$, dann ist insbesondere auch $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha} = x$ eine Lösung. Hat man ein $\lambda > \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(\varrho)\,d\varrho}$, so kommen nur rein imaginäre Werte von α in Frage, falls nur reelle λ in Betracht gezogen werden sollen. Es ist nämlich

$$(65)\qquad \lambda(\beta i) = \lambda(-\beta i) = \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(\varrho)\cos\beta\varrho\,d\varrho} > \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(\varrho)\,d\varrho}.$$

Zu $\lambda(\beta i) = \lambda(-\beta i)$ gehören $\cos\beta x$ und $\sin\beta x$ als reelle Eigenfunktionen.

Um wieder auf Gl. (61) zurückzukommen, hat man $H(\varrho) = e^{-\varrho}$ zu setzen. Für die Funktion $\lambda(\alpha)$ ergibt sich in diesem Falle $\frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$ mit $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ und $A = 1$. Wegen $\lambda(\beta i) = \frac{1}{2}(1 + \beta^2)$ gehören zu einem Wert λ die Eigenfunktionen $\cos\sqrt{2\lambda - 1}\,x$ und $\sin\sqrt{2\lambda - 1}\,x$, falls $\lambda(0) \leqq \lambda < + \infty$, wie bereits oben gefunden.

Die zu (63) gehörige inhomogene Gleichung

$$(66)\qquad y(x) - \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = f(x) \quad \text{mit} \quad K(x,\xi) = H(|x - \xi|)$$

läßt, wie eine reguläre Gleichung, in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$ stets eine und nur eine beschränkte Lösung $y(x)$ zu, die in eine Potenzreihe in λ entwickelbar ist, vorausgesetzt, daß $|f(x)| \leqq F$ ist und daß $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |H(|x - \xi|)|\,d\xi$ für jedes x existiert. Dieses Integral reduziert sich dann übrigens stets auf eine positive Konstante k. (Die folgenden Betrachtungen gelten auch noch, wenn der Kern nur von

einer beliebigen in x und ξ linearen Funktion abhängt.) Um zu Lösung der Integralgleichung (66) zu gelangen, setzt man die Reih

$$(67)\quad \begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x, \varrho_1) f(\varrho_1) d\varrho_1 \\ \qquad + \lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x, \varrho_2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\varrho_2, \varrho_1) f(\varrho_1) d\varrho_1 d\varrho_2 + \cdots \end{cases}$$

an; nach den Voraussetzungen ist

$$(68)\qquad |\varphi(x)| \leqq F + F\lambda k + F\lambda^2 k^2 + \cdots$$

und die Majorante auf der rechten Seite konvergiert für $|\lambda k| <$: absolut; sobald dies erfüllt ist, konvergiert die Reihe (67) gleichmäßi in x im Intervall $-\infty \cdots + \infty$. Durch Einsetzen in (66) läßt sicl nun leicht zeigen, daß $\varphi(x)$ tatsächlich eine Lösung $y(x)$ der Integral gleichung ist. Die Beschränktheit folgt aus (68). Angenommen es gäbe zwei beschränkte Lösungen $y(x)$ und $\bar{y}(x)$, dann wäre di Differenz $\delta(x) = \bar{y}(x) - y(x)$, für die $|\delta(x)| \leqq \varDelta$ gelte, eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(69)\qquad \delta(x) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi)\, \delta(\xi)\, d\xi = 0$$

für $|\lambda k| < 1$ und nach dem in 2 Gesagten auch von

$$(70)\qquad \delta(x) - \lambda^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(n)}(x, \xi)\, \delta(\xi)\, d\xi = 0.$$

Da $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K^{(n)}(x, \xi)|\, d\xi \leqq k^n$ ist, so folgt aus (70)

$$(71)\qquad |\delta(x)| \leqq \varDelta \,.\, |\lambda k|^n$$

für beliebig großes n. Nun ist $|\lambda k| < 1$ und mithin $\delta(x) \equiv 0$, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist. Die oben gezeigte Existenz von Eigenfunktionen für kleine λ ist kein Widerspruch gegen die eindeutige Auflösbarkeit von (66), da für $0 < \lambda < \lambda(0) = \frac{1}{k}$ nur unbeschränkte Eigenfunktionen existieren, während hier ausdrücklich die Beschränktheit der Lösung vorausgesetzt ist.

Bei dem Kern $e^{-|x-\xi|}$ finden sich diese Ergebnisse bestätigt. Es ist $k = 2$; für $|\lambda| < \frac{1}{2}$ ist also die inhomogene Gleichung sicher lösbar. Die gegebene Abschätzung ist in diesem Falle sehr gut, da schon für $\lambda = \frac{1}{2}$ keine Lösung von ihr mehr zu existieren braucht.

Literatur siehe S. 506.

Dreizehntes Kapitel

Anwendung der Integralgleichungen auf Randwertprobleme

§ 1. Ein Beispiel zu den Fredholmschen Formeln

1. Die Aufgabe. Wir wollen die harmonischen Schwingungen einer gespannten Saite untersuchen, deren Masse ungleichförmig über die Länge verteilt ist. Es bezeichne $\mu(x)$ die Massendichte an der Stelle x, S die überall gleiche Spannung der Saite, und es seien $x = -1$ und $x = 1$ die festen Einspannungspunkte. Der elastische Ausschlag an der Stelle x zur Zeit t habe die Form $y(x) \sin \varkappa t$, so daß $\varkappa$ die Schwingungsfrequenz bezeichnet. Wir lassen auch die Einwirkung einer äußeren periodischen Kraft zu, deren Amplitude $\varphi(x)$ heiße, deren Größe zur Zeit t (auf die Längeneinheit reduziert) also $\varphi(x) \sin \varkappa t$ ist.

Für die Amplituden y besteht dann der bekannte Differentialgleichungsansatz (vgl. VII, § 1, **4**)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\varkappa^2 \frac{\mu(x)}{S} y + \frac{\varphi}{S}, \quad y(-1) = y(1) = 0. \tag{1}$$

Diesem entspricht eine Integralgleichung zweiter Art für y:

$$y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{2}$$

wobei $\lambda = \varkappa^2$ gesetzt ist und die Funktionen K und f folgende Bedeutung haben:

$$f(x) = -\int_{-1}^{1} \frac{K(x, \xi)}{\mu(\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

$$K(x, \xi) = \frac{\mu(\xi)}{2S} (1 \pm x)(1 \mp \xi), \quad \text{für } x \lesseqgtr \xi. \tag{4}$$

Der Kern $K(x, \xi)$ wird also durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt: im Intervall für x von -1 bis ξ gelten die oberen Zeichen in (4), von ξ bis 1 die unteren. Den Übergang von der Differentialgleichung (1) zu dem Ansatz (2) bis (4) vermittelt eine Überlegung, die in XI, § 1, **3** kurz angedeutet wurde und im nächsten Paragraphen allgemein ausgeführt werden soll. Will man sich nur hinterher von der Übereinstimmung der Ansätze überzeugen,

so muß man (2) differenzieren und dabei gemäß (4) das Integrationsintervall in die beiden Teile -1 bis x und x bis 1 zerlegen; auf diese Weise kommt die Variable x auch in die Integrationsgrenzen. Einfacher, wenn auch weniger streng, schließt man so: Da K im Innern jedes der beiden Teilintervalle linear in x ist. also die zweite Ableitung Null hat, so kommt es bei zweimaligem Differenzieren nur auf die Übergangsstelle $\xi = x$ an, wo die erste Ableitung von K vom Werte $\frac{\mu}{2S}(-1-x)$ auf den Wert $\frac{\mu}{2S}(1-x)$ um die Größe $\frac{\mu}{S}$ springt. Die Größe des Sprunges mit dem y-Werte an der Stelle $\xi = x$ multipliziert, gibt die zweite Ableitung des negativ genommenen Integrals in (2). Ebenso erhält man die zweite Ableitung von f nach (3), indem man die eben betrachtete Sprunggröße mit $\varphi:\mu$ multipliziert, damit also Gl. (1). Die Randbedingungen, die in (1) noch besonders hinzugefügt werden mußten, sind jetzt schon von selbst erfüllt, da K als Funktion von x ihnen genügt, demnach beide Ausdrücke in (2) an den Grenzen verschwinden.

Für die Massenverteilung werden wir dann insbesondere die Annahme machen, daß sie parabolisch sei, also

$$\frac{\mu(x)}{S} = 1 - x^2. \tag{5}$$

Doch ist der Gedankengang der Lösung in jedem Falle der gleiche, in dem für μ ein Polynom in x gesetzt wird. Für φ machen wir vorerst keine besondere Annahme, da es ja zunächst auf die Herstellung des lösenden Kernes ankommt, der von φ und f unabhängig ist.

2. Ansatz für die Koeffizienten des lösenden Kernes. Die Koeffizienten $d_m(x,\xi)$ und d_m der Zähler- und Nennerreihe des lösenden Kernes sind jetzt nach den Rekursionsformeln (19) und (23) in XII, § 1 zu berechnen. Der Umstand aber, daß $K(x,\xi)$ durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke definiert erscheint, macht die Anwendung der Integralformeln unbequem. Man kann von der eben angeführten Gl. (23) zu einer Differentialgleichung übergehen, indem man sie zweimal nach x differenziert und den in **1** angedeuteten Gedanken benutzt: da die zweite Ableitung von K nach x verschwindet, hat man nur die Übergangsstelle $\varrho = x$ zu berücksichtigen und erhält

$$\frac{\partial^2 d_m(x,\xi)}{\partial x^2} = -\frac{\mu(x)}{S}\, d_{m-1}(x,\xi). \tag{6}$$

Außerdem erkennt man aus XII, § 1, (23), daß $d_m(x,\xi)$ an den Enden $x = \pm 1$ verschwindet und daß es ebenso wie $K(x,\xi)$ eine stetige Funktion von x ist, die aber durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke links und rechts von der Stelle $x = \xi$ dargestellt wird. Differenziert man die Rekursionsformel einmal nach x, setzt $x = \xi$ und verwendet dabei einmal den ersten, dann den zweiten Ausdruck für $K(x,\xi)$ und subtrahiert schließlich, so findet man die Größe des Sprunges in der ersten Ableitung von $d_m(x,\xi)$:

$$\left[\frac{\partial d_m(x,\xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial d_m(x,\xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi-0} = -\frac{\mu(\xi)}{S} d_m. \tag{6'}$$

Diese Gleichung zusammen mit

$$d_m(-1,\xi) = d_m(1,\xi) = 0, \qquad d_m(\xi-0,\xi) = d_m(\xi+0,\xi) \tag{6''}$$

bestimmt die vier Integrationskonstanten für die beiden Ausdrücke von $d_m(x,\xi)$, wofern wir die Koeffizienten d_m der Nennerreihe als bekannt voraussetzen.

Eine weitere, die Rechnung sehr erleichternde Eigenschaft der $d_m(x,\xi)$ folgern wir am besten aus ihrer allgemeinen Darstellung als Determinanten, XII, § 1, (16). Man beachte, daß der Kern $K(x,\xi)$, abgesehen von dem Faktor $\mu(\xi)$, nach (4) symmetrisch ist. Denkt man sich in dem Integranden der eben angeführten Gl. (16) die spaltenweise gleichen μ-Werte herausgehoben, so bleibt eine Matrix stehen, die völlig symmetrisch ist, und wenn man den der letzten Spalte entsprechenden Faktor $\mu(\xi)$ vor das Integralzeichen zieht, wird der Wert des Integrals symmetrisch in bezug auf x und ξ. Es haben mithin die $d_m(x,\xi)$ die gleiche Symmetrieeigenschaft wie $K(x,\xi)$, d. h. sie sind Produkte aus $\mu(\xi)$ in Faktoren, die symmetrisch sind in x,ξ.

Nach all diesen Bestimmungen für $d_m(x,\xi)$ ergibt sich als der einzig mögliche Ansatz — bei Annahme des Wertes (5) für $\mu(x)$ oder auch allgemeiner, falls μ irgendein Polynom in x ist — der eines Produktes von $\mu(\xi)$ in ein Polynom endlichen Grades in $1 \pm x$ und $1 \mp \xi$, also

$$d_m(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\mu(\xi)}{S}\sum_{\iota,\varkappa} A^{(m)}_{\iota\varkappa}(1 \pm x)^{\iota}(1 \mp \xi)^{\varkappa}. \tag{7}$$

Um die Koeffizienten $A_{\iota\varkappa}$ zu bestimmen, die natürlich der Symmetriebedingung $A_{\iota\varkappa} = A_{\varkappa\iota}$ genügen und erst von $\iota,\varkappa = 1$ zu laufen beginnen (damit die Randbedingungen erfüllt werden), setzen wir (7) in (6) ein. Zu diesem Zwecke muß man das gegebene Polynom $\mu(x)$ in ein Polynom in $(1+x)$ bzw. $(1-x)$ verwandeln. In unserem Falle der Gl. (5) ist $x^2 - 1 = (1+x)^2 - 2(1+x) = (1-x)^2 - 2(1-x)$.

Führt man dies rechts in (6) ein, differenziert (7) zweimal nach x, um die linke Seite von (6) zu erhalten, so liefert die Gleichsetzung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen links und rechts die Rekursion für die $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$:

$$(8) \qquad A_{\iota\varkappa}^{(m)} = \frac{A_{\iota-4,\varkappa}^{(m-1)} - 2A_{\iota-3,\varkappa}^{(m-1)}}{\iota(\iota-1)}, \quad \iota = 2, 3 \cdots.$$

Für $m = 0$ fällt $d_0(x, \xi)$ mit $K(x, \xi)$ zusammen, so daß man durch Vergleich von (4) mit (7) als einzigen Koeffizienten $A_{11}^{(0)} = 1$ erhält[1]).

3. Bestimmung der Zähler- und Nennerreihe. Die Rekursion (8) reicht zur vollständigen Bestimmung von $d_m(x, \xi)$ keineswegs aus. Man erhält beispielsweise für $m = 1$ aus dem Werte $A_{11}^{(0)} = 1$ die Zahlen $A_{21}^{(1)} = A_{31}^{(1)} = 0$, $A_{41}^{(1)} = -\frac{1}{6}$ und $A_{51}^{(1)} = \frac{1}{20}$, denen dann $A_{14}^{(1)}$ bzw. $A_{15}^{(1)}$ aus Symmetriegründen gleichzusetzen sind; aber $A_{11}^{(1)}$ bleibt unbestimmt, da ein lineares Glied in $d_1(x, \xi)$ bei der zweimaligen Differentiation herausfällt. Dies erklärt sich dadurch, daß wir von den beiden Rekursionsformeln (19) und (23) in XII, § 1 bisher nur die zweite benutzt haben. Die erste, die d_m aus $d_{m-1}(x, \xi)$ zu rechnen gestattete, ist mit (6′) in Zusammenhang zu bringen und liefert, indem man die Koeffizienten der von ξ freien Glieder aufsucht, folgende Schlußgleichung:

$$(9) \qquad 2\sum_{\iota,\varkappa}(\iota+\varkappa)A_{\iota\varkappa}^{(m)} = -\frac{1}{m}\sum_{\iota,\varkappa}\frac{(\iota+1)!\,(\varkappa+1)!\,2^{\iota+\varkappa+3}}{(\iota+\varkappa+3)!}A_{\iota\varkappa}^{(m-1)},$$

die aus den bekannten Formeln für binomische Integrale (I, § 2, **3**) abgeleitet werden kann. Wendet man (9) auf $m = 1$ an, so erhält man $A_{11}^{(1)} = 0$.

Es wäre aber sehr umständlich, müßte man für jedes m, um den ersten Koeffizienten $A_{11}^{(m)}$ zu finden, auf (9) zurückgreifen. Erinnern wir uns daher an das in XII, § 2, **1** über die Konvergenz der beiden Fredholmschen Reihen Gesagte! Wir haben dort gesehen, daß die in der ersten Rekursionsformel von XII, § 1, **4** getroffene Festsetzung über d_m nur den Zweck hat, die beiden Reihen für alle λ-Werte konvergent zu machen. Den Wert des lösenden Kernes erhalten wir richtig bei jeder Festsetzung über d_m, die den Zähler zu einer für alle λ im ganzen Grundgebiet für x, ξ gleichmäßig konvergenten Reihe macht, den Nenner zu einer für alle λ konvergenten. Wir werden nun sehen, daß dies Ziel erreicht werden kann, indem

---

[1]) Die Bedingung (6′) ist natürlich durch unseren Ansatz noch nicht erfüllt, da wir ja von den Koeffizienten d_m noch nicht gesprochen haben. Das wird in **3** zu behandeln sein.

man einfach für jedes m den ersten Koeffizienten $A_{11}^{(m)}$ für $m > 0$ zu Null macht[1]).

Vor allem sieht man, da die Rekursion (8) für jedes $\varkappa$ gleich lautet, daß die ganze mit den Koeffizienten $d_m(x, \xi)$ gebildete Potenzreihe $D(x, \xi; \lambda)$, abgesehen von dem Faktor $\mu : 2S$, Produkt einer Funktion von $1 \pm x$ in eine Funktion von $(1 \mp \xi)$ ist. Ferner folgt aus (8) mit $A_{11}^{(m)} = 0$ $(m > 0)$, daß der Koeffizientenindex ι bei festem $\varkappa = 1$ jedesmal von $3m + 1$ bis $4m + 1$ läuft. Wir machen daher den neuen Ansatz

$$(10)\quad D(x,\xi;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m d_m(x,\xi) = \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda^\mu (1 \pm x)^{3\mu+1} P_\mu(1 \pm x)\right] \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda^\mu (1 \mp \xi)^{3\mu+1} P_\mu(1 \mp \xi)\right].$$

Darin bedeuten die P_μ Polynome μ-ten Grades ihrer Argumente:

$$(10')\qquad P_\mu(x) = a_0^{(\mu)} + a_1^{(\mu)} x + a_2^{(\mu)} x^2 + \cdots + a_\mu^{(\mu)} x^\mu,$$

deren Koeffizienten mit dem früheren $A_{\iota\varkappa}^{(\mu)}$ so zusammenhängen, daß

$$(10'')\qquad \begin{cases} a_{\iota - 3\mu - 1}^{(\mu)} = A_{1\iota}^{(\mu)} = A_{\iota 1}^{(\mu)}, \\ \text{also} \\ a_\varkappa^{(\mu)} = \dfrac{a_{\varkappa-1}^{(\mu-1)} - 2a_\varkappa^{(\mu-1)}}{(\varkappa + 3\mu)(\varkappa + 3\mu + 1)}, \qquad a_0^{(0)} = 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $a^{(\mu)}$ den Betrag des größten unter den $a_\varkappa^{(\mu)}$, so zeigt (10''), daß

$$a^{(\mu)} < \frac{3\,a^{(\mu-1)}}{(3\mu)^2} < \frac{3 \,.\, 3\,a^{(\mu-2)}}{(3\mu)^2(3\mu-3)^2} \cdots < \frac{1}{3^\mu(\mu!)^2}.$$

Es nehmen also die a mit dem Quadrat von $\mu!$ ab, und da die P_μ nur aus $\mu + 1$ Summanden bestehen, verschwinden die Koeffizienten von λ^μ hinreichend stark, und es konvergieren die beiden Reihen in (10) gewiß gleichmäßig für alle x- und ξ-Werte.

Um die Reihen praktisch zu berechnen, schafft man am besten die Brüche in (10'') dadurch fort, daß man neue Koeffizienten $c_\varkappa^{(\mu)} = (\varkappa + 3\mu + 1)!\, a_\varkappa^{(\mu)}$ einführt, für die dann die Rekursion lautet:

$$(11)\quad c_\varkappa^{(\mu)} = (\varkappa + 3\mu - 1)(\varkappa + 3\mu - 2)c_{\varkappa-1}^{(\mu-1)} - 2(\varkappa + 3\mu - 1)c_\varkappa^{(\mu-1)}.$$

Man kann danach die c als „figurierte Zahlen" bestimmen, indem man in der untenstehenden Dreiecksanordnung jede Zahl aus den

---

[1]) Zu diesem Schluß gelangt man auch, wenn man die Nennerreihe nach der in XI, § 3, 2 dargelegten Methode aus der Differentialgleichung direkt herzuleiten sucht.

beiden über ihr stehenden durch Multiplikation mit bestimmten, **nur** von der Stellung abhängigen Faktoren — den beiden Koeffizienten in (11) — hervorgehen läßt (wobei leere Stellen durch Nullen besetzt zu denken sind). Die c-Werte für $\mu = 0$ bis 4 sind

$$(12)\quad \begin{cases} \mu = 0: & & & & & 1 \\ \quad 1: & & & & -4 & & 6 \\ \quad 2: & & & 40 & & -192 & & 252 \\ \quad 3: & & -640 & & 6336 & & -22320 & & 27720 \\ \quad 4: & 14080 & & -236544 & & 1568736 & & -4838400 & & 5821200. \end{cases}$$

Das starke Anwachsen dieser Zahlenreihe wird wettgemacht durch die Fakultäten, die den Übergang von den c zu den a bilden; über die endgültigen Zahlenwerte vgl. 4.

Hat man die Zählerreihe $D(x, \xi; \lambda)$, so erhält man den Nenner $D(\lambda)$ mit seinen Koeffizienten d_m am besten aus (6′), indem man (10) gliedweise nach x differenziert und dann $x = \xi = 0$ setzt. Denkt man sich dabei P aus (10′) eingeführt und die a durch die c ausgedrückt, so erscheint schließlich $D(\lambda)$ als Produkt zweier Potenzreihen in λ, deren μ-te Koeffizienten

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{c_0^{(\mu)}}{(3\mu)!} + \dfrac{c_1^{(\mu)}}{(3\mu+1)!} + \cdots + \dfrac{c_\mu^{(\mu)}}{(4\mu)!} \\ \text{bzw.} \\ \dfrac{c_0^{(\mu)}}{(3\mu+1)!} + \dfrac{c_1^{(\mu)}}{(3\mu+2)!} + \cdots + \dfrac{c_\mu^{(\mu)}}{(4\mu+1)!} \end{cases}$$

lauten. Danach sind die d_m durch Entwicklung des Produktes zu berechnen, z. B. ergibt sich für $m = 1$ bzw. $m = 2$:

$$d_1 = \left(-\frac{4}{4!} + \frac{6}{5!}\right) + \left(-\frac{4}{3!} + \frac{6}{4!}\right) = -\frac{14}{5!} - \frac{10}{4!} = -\frac{8}{15} = -0{,}5333\ldots$$

$$d_2 = \left(\frac{40}{7!} - \frac{192}{8!} + \frac{252}{9!}\right) + \frac{14}{5!}\,\frac{10}{4!} + \left(\frac{40}{6!} - \frac{192}{7!} + \frac{252}{8!}\right)$$
$$= \frac{8}{105} = 0{,}076\,190\,47.$$

Die beiden nächsten Koeffizienten rechnen sich in ähnlicher Weise aus vier bzw. fünf Summanden, und man bekommt nach Ausführung der Brüche für $D(\lambda)$ die Entwicklung

$$(14)\quad D(\lambda) = 1 - 0{,}533\ldots\lambda + 0{,}076\,190\,5\,\lambda^2 - 0{,}004\,957\,0\,\lambda^3 + 0{,}000\,183\,70\,\lambda^4 - \cdots.$$

Die Konvergenz der Reihe (14) kann man leicht auf Grund der in den Nennern auftretenden Fakultäten beweisen, sie ist aber auch schon durch den Zusammenhang mit der Reihe für $D(x, \xi; \lambda)$ sichergestellt.

4. Numerische Ergebnisse. Man kann zunächst die Frequenz des Grundtones unserer Saite berechnen, indem man die kleinste Wurzel von (14) aufsucht. Diese ergibt sich, wenn man nur die angeschriebenen Glieder berücksichtigt, zu $\lambda_1 = 2{,}83$ entsprechend einer Schwingungsfrequenz $\varkappa_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1{,}68$. Die zweite Dezimale in $\varkappa_1$ kann noch als fast genau gelten, wenn man annimmt, daß die Reihe vom fünften Gliede an wenigstens so stark wie eine geometrische abnimmt. Eine gewisse Kontrolle der Genauigkeit gewinnt man auch in folgender Weise. Wenn man $\mu/S = \text{konst} = 1$ setzt, so erhält man für $D(\lambda)$ die Reihe von $\sin 2\varkappa$, deren erste vier Glieder gleich Null gesetzt als kleinste Wurzel $\varkappa_1 = 1{,}56$ ergeben, während der genaue Wert $\pi/2 = 1{,}571$ beträgt, also in der zweiten Stelle nur wenig differiert. Der Vergleich mit dem Falle $\mu = \text{konst}$ lehrt uns auch, das Ergebnis anschaulich zu deuten. Man erhält ja für $S = 1$, $\mu = \mu_0$ als tiefste Eigenfrequenz $\pi : 2\sqrt{\mu_0}$. Setzt man dies gleich unserem $\varkappa_1 = 1{,}68$, so erhält man $\mu_0 = 0{,}87$, d. h.: Die parabolische Verteilung der Masse über die Länge der Saite gibt denselben Grundton wie die gleichförmige Verteilung, wenn bei letzterer die Dichte 87 v. H. des Maximalwertes der Dichte der ersteren beträgt. — Für die Berechnung der höheren Frequenzen bieten die in (14) angeschriebenen Glieder noch keine genügende Grundlage, weil der erste Oberton etwa bei dem doppelten $\varkappa$, also vierfachen λ zu erwarten ist und für $\lambda \sim 10$ die Glieder in (14) noch nicht hinreichend klein werden.

Nun wollen wir auch die erzwungenen Schwingungen ein wenig weiter verfolgen. Es werde angenommen, daß in der Mitte der Saite eine konzentrierte Kraft von der Größe $P \sin \varkappa t$ angreift. Es ist also $\varphi(x) \to 0$ für alle $x \neq 0$, während der Integralwert $\int \varphi(x)\, dx = P$, woraus nach (3) folgt:

$$(15)\quad f(x) = -\int_{-1}^{1} \frac{K(x,\xi)}{\mu(\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi = -\frac{P}{\mu(0)} K(x, 0) = -\frac{P}{2S}(1 \pm x).$$

Die Schwingungsamplitude $y(x)$ ergibt sich dann aus $f(x)$ und dem oben abgeleiteten lösenden Kern nach XII, § 2, (3). Wir können aber hier in einfacherer Weise verfahren, da wir aus XII, § 1, **1** und **2** auch wissen, daß der lösende Kern selbst die Lösung der Integral-

gleichung für $f(x) = K(x, \xi)$ liefert. Daher haben wir aus der zweiten Form von $f(x)$ in (15) wegen $\mu(0) = S$

$$y(x) = -\frac{P}{S}\Gamma(x, 0) = -\frac{P}{S}\frac{D(x, 0; \lambda)}{D(\lambda)}. \tag{16}$$

Setzt man hier den Zähler aus (10) ein, für den Nenner das aus (13) folgende Reihenprodukt, so sieht man, daß (bei dieser speziellen Wahl von φ) der eine Faktor sich im Zähler und Nenner weghebt, und es bleibt:

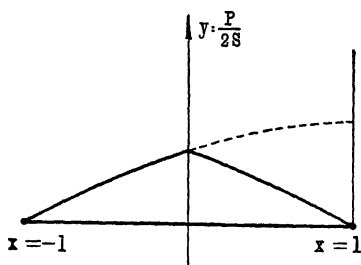
$$\left\{\begin{array}{l} y(x) = \\ -\frac{P}{2S}\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m(1 \pm x)^{3m+1}\left[\frac{c_0^{(m)}}{(3m+1)!} + \cdots + \frac{c_m^{(m)}(1 \pm x)^m}{(4m+1)!}\right]}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left[\frac{c_0^{(m)}}{(3m)!} + \frac{c_1^{(m)}}{(3m+1)!} + \cdots + \frac{c_m^{(m)}}{(4m)!}\right]}. \end{array}\right. \tag{17}$$

Hier sind die c aus der Tabelle (12) einzusetzen, für $\pm x$ kann auch $-|x|$ geschrieben werden. Für $\lambda = 0{,}7056$ entsprechend einem $\varkappa = \sqrt{\lambda} = 0{,}84$, also der halben Frequenz des Grundtones, ist der ungefähre Verlauf der y-Linie in Fig. 57 skizziert; sie weicht nicht merklich von der Linie ab, die einer gleichförmigen Massenverteilung mit $\mu_0 = 0{,}87$ entspricht. Für diesen Fall wäre der lösende Kern bzw. die Seilfigur nach XI, § 2, 3 durch

Fig. 57

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{\mu_0}{S}\frac{\sin\varrho(1 \pm x)\sin\varrho(1 \mp \xi)}{\varrho\sin 2\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{\lambda\mu_0}{S}},$$

gegeben. Die maximale Ausbiegung, die für $x = 0$ eintritt, bestimmt sich nach (17), wenn man die Werte der c einsetzt, zu

$$y(0) = -\frac{P}{2S}\frac{1 - \frac{14}{5!}\lambda + \frac{1404}{9!}\lambda^2 - \frac{372\,264}{13!}\lambda^3 + \frac{189\,414\,672}{17!}\lambda^4 \cdots}{1 - \frac{10}{4!}\lambda + \frac{956}{8!}\lambda^2 - \frac{248\,568}{12!}\lambda^3 + \frac{125\,130\,000}{16!}\lambda^4 \cdots}.$$

Der letzte angeschriebene Zahlenfaktor im Zähler hat die Größenordnung 10^{-17}; für Abszissenwerte, die den eingespannten Enden näher liegen, ist die Konvergenz eine noch bessere. Für den oben angenommenen Wert $\lambda = 0{,}7$ ergibt sich $y(0) = -1{,}28\,P/2\,S$, während bei der zum Vergleich herangezogenen gleichförmig mit Masse belegten Saite mit $\varrho = \pi/4$ der Zahlenfaktor $4/\pi = 1{,}273$ beträgt.

§ 2. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

1. Einführung der Greenschen Funktion. Wir gehen von der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = \varphi \tag{1}$$

aus, in der sowohl p wie q eine gegebene stetige Funktion von x sei, p überdies im ganzen Intervall a, b positiv und stetig differenzierbar, während wir über φ, das von x und von y abhängen kann, erst später verfügen werden. Die gesuchte Funktion y wird überdies zwei linear-homogenen Randbedingungen unterworfen, die wir in der Form schreiben:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Hier bezeichnen die Striche Ableitungen nach x, also $y'(a)$ den Wert des Differentialquotienten von y an der Stelle a usf., die α, β konstante Zahlen. In (2) sind natürlich die bekannten einfachsten Randbedingungen, wie $y(a) = y(b) = 0$ usf., eingeschlossen. Die linke Seite von (1) bezeichnen wir auch mit $L(y)$. (Vgl. die Problemstellung in Kap. VII.)

Wir nehmen nun an, es sei die allgemeine Lösung von (1) für $\varphi = 0$ bekannt. Da die Gleichung $L(y) = 0$ homogen ist, wird es im allgemeinen nicht möglich sein, ihre Lösung den Bedingungen (2) anzupassen. Denn die eine der beiden Integrationskonstanten tritt bei der homogenen Gleichung als Faktor auf, und ein solcher fällt, wenn man in (2) einsetzt, wieder heraus; es bleiben also zwei Gleichungen zu erfüllen, während nur noch eine Konstante verfügbar ist, was nur ausnahmsweise möglich ist. Es sei jetzt vorausgesetzt, daß dieser Ausnahmefall, der später (vgl. 4) behandelt werden soll, nicht vorliegt, daß also keine Lösung von (1) und (2) für $\varphi = 0$ vorhanden ist.

Unter dieser Annahme können wir in vielfacher Weise eine eindeutige, stetige Funktion $G(x, \xi)$ für alle zwischen a und b gelegenen Werte von x und ξ konstruieren, die folgenden Bedingungen genügt: Wählt man für ξ einen festen Wert, so soll G als Funktion von x sowohl im Intervall a, ξ wie im Intervall ξ, b die Gl. (1) mit $\varphi = 0$ befriedigen, überdies sollen die Randbedingungen (2) erfüllt sein, sobald man darin $G(a, \xi)$ und $G(b, \xi)$ für $y(a)$ und $y(b)$ und entsprechend die Ableitungen von G nach x für y' einführt. Sind nämlich $u(x)$ und $v(x)$ zwei linear unabhängige, d. h. nicht bloß

um einen konstanten Faktor verschiedene Lösungen von (1) (ein sogenanntes Fundamentalsystem, VI, § 2, 4), so braucht man nur $G(x, \xi)$ im Intervall a, ξ mit $c_1 u + k_1 v$, im Intervall ξ, b mit $c_2 u + k_2 v$ zusammenfallen zu lassen, wo die vier Konstanten c_1, k_1, c_2, k_2 der Bedingung $c_1 u(\xi) + k_1 v(\xi) = c_2 u(\xi) + k_2 v(\xi)$ und den beiden Gleichungen genügen, die aus (2) hervorgehen, wenn darin $c_1 u(a) + k_1 v(a)$ für $y(a)$ und $c_2 u(b) + k_2 v(b)$ für $y(b)$ usf. gesetzt wird. Man hat so drei linear-homogene Gleichungen für die vier Konstanten, also sicher (von trivialen Ausnahmefällen abgesehen) eine Lösung, die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt ist. Über diesen verfügen wir nun wie folgt. Wir betrachten die ersten Ableitungen der Funktionen $c_1 u + k_1 v$ und $c_2 u + k_2 v$ an der Stelle $x = \xi$. Sie können nicht beide gleich sein, denn es gibt nur eine Lösung von (1), die für $x = \xi$ einen bestimmten Wert und eine bestimmte Ableitung besitzt, also müßte $c_1 = c_2$, $k_1 = k_2$ sein, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht, daß es keine Lösung geben soll, die (1) mit $\varphi = 0$ und zugleich (2) befriedigt. Hat aber $c_2 u'(\xi) + k_2 v'(\xi) - c_1 u'(\xi) - k_1 v'(\xi)$ einen von Null verschiedenen Wert, so kann man durch Multiplikation der c und k mit einem gemeinsamen Faktor erreichen, daß er gleich dem reziproken Wert von $p(\xi)$ wird. Die so bestimmte Funktion $G(x, \xi)$ nennen wir die Greensche Funktion zum Randwertproblem (1), (2); sie ist durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt für $x \leqq \xi$ und $x \geqq \xi$, genügt in jedem der Teilintervalle a, ξ und ξ, b der Differentialgleichung $L(G) = 0$, erfüllt die Randbedingungen (2) und geht stetig, aber mit dem Sprung von der Größe $1 : p(\xi)$ in der ersten Ableitung, durch den Punkt $x = \xi$.

Eine anschaulichere, den Anwendungen besser angepaßte Erklärung der Greenschen Funktion ist folgende: Wir betrachten die Lösungen von (1), (2) für eine Funktion φ, die an allen Stellen des Intervalls a, b mit Ausnahme eines schmalen Stückes von $\xi - \varepsilon$ bis $\xi + \varepsilon$ verschwindet, in diesem Stück aber so große Werte hat, daß das Integral von φ den Wert 1 besitzt. Dann ist $G(x, \xi)$ der limes dieser Lösungen, wenn man mit ε zur Grenze Null übergeht. Daß die definierte Funktion G sicher der Bedingung $L(G) = 0$ außerhalb der Stelle $x = \xi$ und den beiden Gl. (2) genügt, ist klar. Integriert man aber die beiden Seiten von (1) von $\xi - \varepsilon$ bis $\xi + \varepsilon$, so erhält man

$$p(\xi + \varepsilon)\, y'(\xi + \varepsilon) - p(\xi - \varepsilon)\, y'(\xi - \varepsilon) + \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} q(x)\, y(x)\, dx = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \varphi\, dx.$$

Das Integral rechts behält bei unserem Grenzübergang konstant den Wert 1, das Integral links geht gegen Null, weil q und y endlich sind, und es bleibt, da auch p stetig ist, links schließlich nur das $p(\xi)$-fache des Sprunges von y' an der Stelle $x = \xi$ übrig.

Die Anwendung der Greenschen Funktion besteht nun darin, daß die Lösung des Randwertproblems (1), (2) für beliebiges φ gegeben wird durch

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Man erhält (3) durch die eben entwickelte anschauliche Deutung von G im Zusammenhang mit der grundlegenden Eigenschaft linearer Probleme II, § 1, (1), oder der physikalischen Bedeutung unmittelbarer angepaßt, im Anschluß an das in XI, § 1, **3** behandelte Beispiel (Zurückführung beliebiger stetiger Belastung auf Einzellasten der Größe 1). Natürlich kann man sich von der Richtigkeit des Ansatzes (3) auch durch Einsetzen überzeugen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $G_1(x,\xi)$ bzw. $G_2(x,\xi)$ die Werte von $G(x,\xi)$ für das Intervall $x \leqq \xi$ bzw. $x \geqq \xi$. Dann lautet (3):

$$y(x) = \int_a^x G_2(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_x^b G_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{3'}$$

und einmalige Differentiation liefert:

$$y'(x) = \int_a^x G_2'(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_x^b G_1'(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{3''}$$

da wegen $G_1(x,x) = G_2(x,x)$ die beiden durch Differentiation nach den Grenzen entstehenden Glieder einander aufheben. Multipliziert man mit $p(x)$, differenziert dann nach x und beachtet dabei, daß sowohl G_1 als G_2 der Gleichung $L = 0$ genügt, also die Ableitung von pG_1' bzw. pG_2' gleich $-qG_1$ bzw. $-qG_2$ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(py') = &-\int_a^x q(x)G_2(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_x^b q(x)G_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \\ &+ p(x)\varphi(x)[G_2'(x,x) - G_1'(x,x)] = -q(x)y(x) + \varphi(x),\end{aligned} \tag{3'''}$$

da definitionsgemäß die Differenz in der eckigen Klammer gleich $1:p(x)$ ist. Somit genügt der Ausdruck (3) der Differentialgleichung (1); daß er auch die Randbedingungen (2) erfüllt, folgt schon daraus, daß $G(x,\xi)$ dies für alle ξ tut.

Der Zusammenhang mit den Integralgleichungen wird hergestellt, wenn man für φ in (1) beispielsweise $\varphi_1(x) + \lambda r(x) y(x)$ setzt und dabei die als gegeben anzusehende Funktion

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi \tag{4}$$

einführt. Dann ist nach (3) die Lösung von (1), also jetzt von

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dy}{dx}\right) + qy = \lambda r y + \varphi_1, \tag{5}$$

in Verbindung mit den Randbedingungen (2) gleich der Lösung der Integralgleichung zweiter Art

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi = f(x), \tag{6}$$

deren Kern $K(x, \xi) = G(x, \xi) r(\xi)$ das Produkt der Greenschen Funktion in $r(\xi)$ ist.

2. Symmetrieeigenschaften. Es ist wichtig, sich davon zu überzeugen, unter welchen Bedingungen der Kern der Integralgleichung (6) ein symmetrischer wird. Wir untersuchen zunächst die Frage, wann die Greensche Funktion symmetrisch ist, also $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ gilt.

Sind $u(x)$ und $v(x)$ zweimal stetig differenzierbar und bezeichnen wir analog dem Bisherigen mit L den Differentialausdruck (1):

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu, \qquad L(v) \equiv \frac{d}{dx}\left(p \frac{dv}{dx}\right) + qv, \tag{7}$$

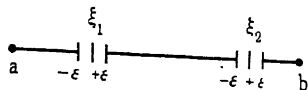
so erhält man durch Produktintegration sofort die sogenannte Greensche Formel (für einen eindimensionalen Bereich):

$$\int_{x_1}^{x_2} [v L(u) - u L(v)] dx = \left[p\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right)\right]_{x_1}^{x_2}. \tag{8}$$

Dabei ist rechts die Differenz der Werte, die der Ausdruck in der eckigen Klammer für $x = x_2$ bzw. $x = x_1$ annimmt, zu bilden.

Fig. 58

Setzt man $u = G(x, \xi_1)$ und $v = G(x, \xi_2)$, wobei $\xi_1 < \xi_2$ sei, und wählt für x_1, x_2 die drei Intervalle $a, \xi_1 - \varepsilon$; $\xi_1 + \varepsilon, \xi_2 - \varepsilon$; $\xi_2 + \varepsilon, b$, also das ganze Intervall a, b mit Ausschluß kleiner Stücke bei $x = \xi_1$ und $x = \xi_2$ (Fig. 58), so ist im gesamten Integrationsbereich $L(u) = L(v) = 0$, und die sechs rechts auftretenden Werte lassen sich so zu Paaren zusammenfassen, daß

$$\Big[\cdots\Big]_a^b - \Big[\cdots\Big]_{\xi_1 - \varepsilon}^{\xi_1 + \varepsilon} - \Big[\cdots\Big]_{\xi_2 - \varepsilon}^{\xi_2 + \varepsilon} = 0 \tag{8'}$$

wird. Geht man zur Grenze $\varepsilon = 0$ über und beachtet, daß an der Stelle $x = \xi_1$ das Produkt pu' den Sprung 1, pv' keinen Sprung erfährt, an der Stelle $x = \xi_2$ aber pv' den Sprung 1 und pu' keinen, so sieht man, daß das zweite angeschriebene Glied in (8′) gegen $-v(\xi_1) = -G(\xi_1, \xi_2)$, das dritte gegen $u(\xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)$ geht. Also ist

$$G(\xi_1, \xi_2) - G(\xi_2, \xi_1) = [p(vu' - uv')]_a^b \tag{9}$$
$$\text{mit } u = G(x, \xi_1), \quad v = G(x, \xi_2).$$

Die Greensche Funktion ist dann und nur dann symmetrisch, wenn für ihre Randwerte und die ihrer Ableitungen die durch Nullsetzen der rechten Seite von (9) folgende Beziehung für ein beliebiges Wertepaar ξ_1, ξ_2 besteht. Da aber die Randwerte durch die Bedingungen (2) bestimmt werden, erhalten wir folgende Formulierung: Die Symmetrie der Greenschen Funktion besteht dann und nur dann, wenn für je zwei Wertequadrupel $u(a)$, $u(b)$, $u'(a)$, $u'(b)$; $v(a)$, $v(b)$, $v'(a)$, $v'(b)$, für die (2) gilt (indem man y einmal $= u$ und einmal $= v$ setzt), zugleich die Beziehung

$$p(b)[v(b)u'(b) - u(b)v'(b)] = p(a)[v(a)u'(a) - u(a)v'(a)] \tag{10}$$

Geltung hat. Faßt man die beiden Wertequadrupel als homogene Cartesische Koordinaten zweier Punkte auf, so lehrt eine einfache geometrische Betrachtung, daß (10) aus (2) dann und nur dann folgt, wenn die Koeffizienten von (2) der Einschränkung unterliegen:

$$p(b)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = p(a)(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3). \tag{11}$$

Rein rechnerisch kann man sich davon überzeugen, indem man die Gl. (2) nach einem Paar von Variablen, z. B. $u(a)$, $u'(a)$, auflöst und dann in (10) einsetzt. Übrigens ist (11) genau die gleiche Einschränkung, die in VII, § 2, **4** als Voraussetzung für die Realität der Eigenwerte einer Differentialgleichung eingeführt wurde. Das wichtige Ergebnis lautet: Die Symmetrie der Greenschen Funktion ist an die Voraussetzung geknüpft, daß zwischen den Koeffizienten α, β der Randbedingungen und den Randwerten der in der Differentialgleichung auftretenden Funktion p die Beziehung (11) besteht.

Gl. (11) ist, wie man leicht erkennt, in folgenden einfachen Fällen immer erfüllt, die den in der Physik zumeist auftretenden Randbedingungen entsprechen. Es reduziere sich (2) auf

(12)
- a) $y(a) = 0, \quad y(b) = 0$ (sog. erste Randwertaufgabe),
- b) $y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$ („ zweite „),
- c) $hy'(a) + y(a) = 0, \quad ky'(b) + y(b) = 0$ (sog. dritte Randwertaufgabe),
- d) $y(a) = c\,y(b), \quad y'(a) = \dfrac{1}{c}\dfrac{p(b)}{p(a)}\,y'(b).$

Im letzten Fall hat man z. B. $\alpha_1 = 1$, $a_3 = -c$, $\beta_2 = cp(a)$, $\beta_4 = -p(b)$, alle anderen Koeffizienten gleich Null, also beide Seiten von (11) gleich $cp(a)p(b)$.

Die Symmetrie der Greenschen Funktion hat die des Kernes $K(x, \xi)$ der Integralgleichung (6) nur dann zur unmittelbaren Folge, wenn das in (5) auftretende r konstant ist. Darüber hinaus bleibt aber noch alles wesentlich erhalten, wenn nur $r(x)$ im ganzen Intervall sein Zeichen nicht ändert. In diesem Fall dürfen wir r positiv voraussetzen (da man sonst $-\lambda$ als Parameter einführen könnte) und die Gl. (6) mit $\sqrt{r(x)}$ multiplizieren. Es entsteht dann, wenn

$$y(x)\sqrt{r(x)} = z(x) \tag{13}$$

gesetzt wird, für z die symmetrische Integralgleichung

$$z(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\sqrt{r(x)r(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi = f(x)\sqrt{r(x)}. \tag{14}$$

Die physikalischen Probleme liegen in der Tat zumeist so, daß $r(x)$ unveränderliches Zeichen besitzt; r bedeutet im wesentlichen die Massendichte oder die Wärmeleitfähigkeit, die Selbstinduktion oder dergleichen. Wir merken das Ergebnis an: Die Randwertaufgaben von (5) führen auf Integralgleichungen mit symmetrischem Kern, wenn die Greensche Funktion symmetrisch ist und der Faktor $r(x)$ von λy in der Differentialgleichung (5) unveränderliches Zeichen besitzt.

3. Ergebnisse aus der Theorie der Integralgleichungen. Ohne jede weitere Untersuchung können wir jetzt auf Grund der Ergebnisse des vorangehenden Kapitels die entscheidenden Sätze über die Lösbarkeit der hier in Rede stehenden Randwertaufgaben aussprechen. Zunächst ergibt das Bestehen der „Alternative" und das Vorhandensein von Eigenwerten folgende Sätze.

Die Differentialgleichung (5) hat bei beliebigem φ_1 stets dann eine eindeutige Lösung, die den Randbedingungen (2) genügt, wenn nicht λ einer bestimmten Schar von Ausnahmswerten angehört, insbesondere für $\varphi_1 = 0$ nur die Lösung Null; wird aber λ einem der Ausnahmswerte gleich, so erhält man für $\varphi_1 = 0$ mindestens eine nicht identisch verschwindende Lösung, eventuell zwei solcher Lösungen (abgesehen von einem konstanten Faktor, der natürlich frei bleibt). Wenn die Koeffizienten der Randbedingungen der Einschränkung (11) unterliegen und $r(x)$ konstantes Vorzeichen hat, so gibt es bestimmt eine abzählbare Schar diskret liegender, reeller Ausnahmswerte von λ, der sogenannten „Eigenwerte" des Problems,

und keine weiteren Ausnahmezahlen; die zugehörigen, der Gl. (5) mit $\varphi_1 = 0$ und den Randbedingungen (2) genügenden Funktionen von x heißen die „Eigenlösungen" und stehen paarweise orthogonal aufeinander. Die physikalische Bedeutung dieser „orthogonalen" Randwertprobleme ist in der Regel die, daß die Eigenwerte den Frequenzen der Eigenschwingungen entsprechen und die zugehörigen Eigenlösungen die Schwingungsformen liefern.

Wenn wir nun auch den Entwicklungssatz aus XII, § 3, **3** hierher übertragen wollen, müssen wir uns darüber klar werden, welche Funktionen den von uns jetzt betrachteten Kernen „erreichbar" sind. Nun sieht man aus (6), wenn man den Wert von f aus (4) einsetzt und $K(x,\xi) = G(x,\xi)r(\xi)$ einführt, daß für jede Lösung $Y(x)$ der Differentialgleichung (5) mit $\varphi_1 = \Phi_1$ gilt:

$$(15)\quad Y(x) = \int_a^b K(x,\xi)\left[\lambda Y(\xi) + \frac{\Phi_1(\xi)}{r(\xi)}\right] d\xi = \int_a^b K(x,\xi) Z(\xi)\, d\xi.$$

Hat man also eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion $Y(x)$ gegeben, die den Randbedingungen genügt, so kann man sich durch Einsetzen in (5) den zugehörigen Wert von Φ_1 berechnet denken und besitzt dann in (15) die in XII, § 3, (12) geforderte Darstellung von Y als Integral von K mal Z. Demnach ist jede solche zweimal differenzierbare Funktion unserem Kern $K(x,\xi)$ erreichbar, und es folgt der Satz: Nach den Eigenfunktionen eines unserer orthogonalen Randwertprobleme läßt sich jede zweimal stetig differenzierbare, den Randbedingungen genügende Funktion entwickeln. In den physikalischen Problemen, die in der Regel zu einem ersten Ansatz in Form einer partiellen Differentialgleichung führen, kommt die Entwickelbarkeit vor allem für die Funktionen in Frage, die den Anfangszustand des Systems kennzeichnen. Die Koeffizientenbestimmung bei allen hier in Rede stehenden Entwicklungen erfolgt mit Rücksicht auf die Orthogonalität der Eigenfunktionen (XII, § 3, 1) in der Fourierschen Weise, d. h. nach XII, § 3, **3**.

Wichtig ist schließlich noch die mit der Entwicklung willkürlicher Funktionen im Zusammenhang stehende Darstellung der Lösung des nichthomogenen Problems durch die nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe XII, § 3, (17). Das nichthomogene Problem tritt im Bereiche der Schwingungslehre auf, sobald eine periodische Kraft Schwingungen erzwingt; $\varphi_1(x)$ stellt dann die Amplitude der erzwingenden Kraft dar, die eben von Punkt zu Punkt wechseln kann, und die Lösung des Randwertproblems gibt die ohne Rück-

sicht auf den Anfangszustand berechneten Amplituden der Schwingung, deren Frequenz gleich der der erzwingenden Kraft ist. Man erkennt an der eben angeführten Gleichung: Die Amplituden der erzwungenen Schwingung setzen sich additiv aus den Formen der Eigenschwingungen zusammen, mit Koeffizienten, die von den Differenzen zwischen der erzwingenden Frequenz und den Eigenfrequenzen abhängen; wird eine solche Differenz einmal Null, tritt also Resonanz ein, so ergibt sich eine unendlich große Amplitude der erzwungenen Schwingung.

Es soll hier nicht verschwiegen werden, daß der Entwicklungssatz, wie ihn die Theorie der Integralgleichungen liefert, eine große Unvollkommenheit besitzt gegenüber dem, was die physikalischen Anwendungen nahelegen. Denn daß die Funktion, die den Anfangszustand darstellt, zweimal differenzierbar, ja daß sie überhaupt nur stetig sei, ist eine durchaus nicht in der Natur der Sache begründete Einschränkung. In der Tat läßt sich mit anderen Mitteln zeigen, daß eine Entwicklung nach Eigenfunktionen in verschiedenen Einzelfällen auch in viel weiterem Umfang möglich ist, im wesentlichen für alle Funktionen von beschränkter Schwankung. So weit reichen die bisher in der Theorie der Integralgleichungen erzielten Resultate nicht, wenn sie auch in verschiedener Richtung über das hier Dargelegte hinauszugehen gestatten. So hat vor allem E. Trefftz[1]) am Beispiel der schwingenden Saite gezeigt, daß man für die zu entwickelnden Funktionen nur quadratische Integrabilität der ersten Ableitung vorauszusetzen braucht. Der Hauptgedanke des Beweises ist eine Darstellung des Kernes $K(s,t)$ in der Form

$$K(s,t) = \int_0^l G(s,r) \,.\, G(t,r)\,dr,$$

wo $G(s,t)$ unsymmetrisch ist.

4. Erledigung des Ausnahmefalles. In **1** mußte der praktisch vorkommende Fall unerledigt bleiben, daß die homogen gemachte Gl. (1) eine den Randbedingungen genügende Lösung besitzt. Man kann für diesen Fall mit geringen Abänderungen eine Funktion konstruieren, die dasselbe leistet wie die in **1** definierte Greensche Funktion im Normalfalle.

Möge $\psi(x)$ der Gl. (1) mit $\varphi = 0$ genügen, also $L(\psi) = 0$ liefern und überdies die beiden Randbedingungen (2) erfüllen. Dann kann man jedenfalls einen konstanten Faktor zu ψ hinzufügen und

---

[1]) Schwingungsprobleme und Integralgleichungen. Math. Ann. 87 (1922), S. 307.

erreichen, daß $\int\limits_a^b \psi^2 dx = 1$ wird. Es sei außerdem angenommen, daß ψ bis auf einen konstanten Faktor die einzige Eigenfunktion der homogenen Gleichung ist. Setzt man jetzt für φ rechts in (1) den Ausdruck $\psi(x)\psi(\xi)$, so erhält man eine nichthomogene Gleichung, bei der keine Lösung beide Randbedingungen (2) gleichzeitig erfüllen kann, wie man etwa so einsieht: Man kann den Ausdruck (1) in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + q_1 y = \psi(x)\psi(\xi) + r \cdot y$$

mit $q = q_1 - r$, so daß zu dem links stehenden Differentialausdruck eine Greensche Funktion $G^*(x, \zeta)$ gehört. Jetzt kann man zu einer Integralgleichung der Form (6) übergehen mit der rechten Seite $f = \int G^*(x, \zeta)\psi(\zeta)\psi(\xi)d\zeta$. Nach Voraussetzung besitzt die homogene Gleichung die Lösung $\psi(x)$. Würde eine Lösung der inhomogenen Gl. (1) mit $\varphi = \psi(x)\psi(\xi)$ beiden Randbedingungen (2) genügen, so müßte sie auch die zu (6) analoge Integralgleichung befriedigen; dann müßte aber die Funktion f zu der Eigenfunktion der adjungierten homogenen Integralgleichung orthogonal sein; insbesondere würde sich aus dem obigen Ausdruck für f leicht die Bedingung $\int \psi^2(\zeta)\psi(\xi)d\zeta = 0$ errechnen, welche bei uns offenbar nicht erfüllt ist. Es läßt sich daher in genau gleicher Weise, wie dies in 1 für die Gl. $L(u) = 0$ gezeigt wurde, eine „erweiterte Greensche Funktion" $G(x, \xi)$ definieren, die 1.) der Gleichung

$$L(G) = \psi(x)\psi(\xi) \tag{16}$$

in den beiden Intervallen a, ξ und ξ, b; 2.) den beiden Randbedingungen (2) genügt; 3.) stetig ist und 4.) mit dem Sprung $1 : p(\xi)$ in der ersten Ableitung durch den Punkt $x = \xi$ geht. Insbesondere gelangt man zu einer Formel der Form (3). Setzt man nun $\varphi(x) = -\psi(x)\psi(\xi)$, so bleibt nur der homogene Teil der Gl. (1) von dem ganzen Differentialausdruck stehen; die Funktion y in (3) wird daher eine Eigenfunktion dieser homogenen Gleichung, also von der Form $\varkappa\psi(x)\psi(\xi)$. Da aber jetzt alle Eigenschaften von G unverändert erhalten bleiben, wenn man von der vorhin bestimmten Funktion $\varkappa\psi(x)$ abzieht, so kann man $G(x, \xi)$ noch der weiteren Bedingung unterwerfen, daß 5.)

$$\int\limits_a^b G(x, \xi)\psi(\xi)d\xi = 0 \tag{17}$$

wird. Hat man z. B. $p = 1$, $q = 0$ in (1) und die Randbedingungen $u(0) = u(1)$ und $u'(0) = u'(1)$, so ist $\psi = \text{konst}$ die einzige Lösung der homogenen Gleichung einschließlich der Randbedingungen,

und wir setzen nach der oben gegebenen Normierungsvorschrift $\psi = 1$. Die Gl. (16) lautet dann $G'' = 1$, und G besteht aus zwei Parabelbögen:

$$(18) \qquad G(x, \xi) = \tfrac{1}{2}(x - \xi)^2 - \tfrac{1}{2}|x - \xi| + \tfrac{1}{12}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Nachrechnen, daß diese Funktion den Bedingungen 2) bis 5) der Definition genügt.

Die Verwendung der „erweiterten" Greenschen Funktion geht aus folgendem hervor. Eine Lösung von (1) kann man jetzt nur unter der Voraussetzung verlangen, daß φ orthogonal zu der Lösung ψ von $L = 0$ ist, d. h. daß

$$(19) \qquad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung wird sie aber in der Form (3) genau so wie früher in 1 dargestellt. Denn die Gl. (3′) und (3″), die dort zum Beweis verwendet wurden, lassen sich jetzt ebenso gewinnen, und nur in (3‴) tritt auf der rechten Seite, da die Ableitungen von pG_1' und pG_2' jetzt nicht mehr $-qG_1$ bzw. $-qG_2$, sondern nach (16) um $\psi(x)\psi(\xi)$ größer sind, der Ausdruck

$$\int_a^b \psi(x)\psi(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

hinzu, der aber nach (19) verschwindet. Wendet man (17) auf (3) an, so findet man

$$(20) \qquad \int_a^b y(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)\psi(x)\,dx\,d\xi = 0,$$

d. h. durch (3) werden jetzt nur die zu ψ orthogonalen Lösungen von (1), (2) geliefert, die aber auch allein von Interesse sind, da man ein beliebiges Vielfaches von ψ jeder Lösung hinzufügen kann, ohne (1) oder (2) zu verletzen [1]).

5. Beispiele. Die einfachste Differentialgleichung der Form (5) ergibt sich, wenn man $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ setzt und zur Abkürzung noch $\lambda = -\varkappa^2$ schreibt. Das allgemeine Integral von $y'' = -\varkappa^2 y$ ist, wie bekannt, $C_1 \sin \varkappa x + C_2 \cos \varkappa x$, und die beiden ersten Randwertaufgaben (12a) und (12b) führen auf die Entwicklungen nach sinus- bzw. cosinus-Reihen mit $\varkappa$-Werten, die wie

---

[1]) Besitzt die homogene Gl. (1) zwei zueinander orthogonale normierte Eigenfunktionen ψ_1 und ψ_2 (mehr kann es ja nicht geben), so kann man eine erweiterte Greensche Funktion bilden, wenn man die inhomogene Gleichung mit $\varphi = \psi_1(x)\psi_1(\xi) + \psi_2(x)\psi_2(\xi)$ heranzieht.

ganze Zahlen fortschreiten, $\varkappa_n = n\pi:(b-a)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, im zweiten Falle außerdem auch $n = 0$. Die in **4** erwähnten Randbedingungen $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$, die aussagen, daß die Lösung im unbegrenzten Gebiet der x-Achse periodisch sein soll, ergeben zu jedem einzelnen Eigenwert $\varkappa_n = 2n\pi:(b-a)$ zwei verschiedene Eigenlösungen, nämlich $\sin \varkappa x$ und $\cos \varkappa x$, und führen so auf die allgemeine Fouriersche Entwicklung (IV, § 4, **1**). Aber unsere Ergebnisse sind viel allgemeiner und umfassen auch noch andere Typen von trigonometrischen Entwicklungen. So gelangt man in der Theorie der Wärmeleitung in einem Stabe zu der sogenannten dritten Randwertaufgabe (12c), deren Eigenwerte man bei $a = 0$, $b = 1$ durch Einsetzen des allgemeinen Integrals in die Gl. (12c) als die Wurzeln von

$$\operatorname{ctg} \varkappa = \frac{1 + \varkappa^2 h k}{\varkappa (h - k)} \tag{21}$$

erkennt. Diese Wurzeln lassen sich finden als die Abszissen der Schnittpunkte der cotg-Linie mit einem Hyperbelast; ist man genügend weit vom Anfangspunkt entfernt, so kommt es wesentlich auf den Schnitt der Asymptoten hinaus, d. h. die Eigenwerte sind bei großer Nummer n, wenn $hk \neq 0$, annähernd die Vielfachen $2n\pi$. Ist dagegen $k = 0$, so vereinfacht sich (21) zu $\varkappa \operatorname{ctg} \varkappa = 1/h$, wofür die ersten Nullstellen genau berechnet worden sind[1]. Die Theorie lehrt uns, daß man willkürliche Funktionen auch nach solchen trigonometrischen Reihen entwickeln kann, deren allgemeines Glied $\sin \varkappa_n (x + \varepsilon_n)$ lautet, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n \ldots$ die Wurzeln von (21) und die ε_n durch die Randbedingungen bestimmt sind. Auch der allgemeinste Fall der Gl. (2) mit α, β-Werten, die der Einschränkung (11) unterliegen, führt auf eine Gleichung von der Form (21), also zu ebensolchen Entwicklungen wie den eben behandelten. Die tatsächliche Herstellung der Greenschen Funktion ist, wenn wir nur die Entwickelbarkeit begründen wollen, gar nicht nötig. Für die Randbedingungen a) lautet sie übrigens bei $p(x) = 1$, wie man leicht sieht,

$$G(x, \xi) = \frac{(x-a)(\xi-b)}{b-a} \text{ für } x \leqq \xi, \quad \frac{(x-b)(\xi-a)}{b-a} \text{ für } x \geqq \xi. \tag{22}$$

Setzt man in (5) $p = x$, $q = 0$, $r = x$ und schreibt wieder $\varkappa^2$ für $-\lambda$, so geht die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \varkappa^2 x y = 0 \tag{23}$$

[1] Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven (Leipzig und Berlin 1909), S. 2.

durch die Substitution $x' = \varkappa x$ in die gleichgebaute

$$\frac{d}{dx'}\left(x'\frac{dy}{dx'}\right) + x'y = 0$$

über, die mit der in VIII, § 3, **1** behandelten Besselschen Differentialgleichung für $\nu = 0$ übereinstimmt. Schreibt man vor, daß für $x = 0$ die Ableitung y' verschwinden soll, so ist die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung $J_0(\varkappa x)$ (Definition in VIII, § 3, **1**) für beliebiges $\varkappa$ eine Lösung. Als zweite Randbedingung dürfen wir zufolge (11) nur noch eine Beziehung zwischen Funktions- und Ableitungswert an einer Stelle $x = r$ vorschreiben:

$$c_1 y(r) + c_2 y'(r) = 0.$$

Die Eigenwerte von (23) sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$c_1 J_0(\varkappa r) + c_2 J_0'(\varkappa r) = 0, \tag{23'}$$

und aus der Theorie der symmetrischen Integralgleichung folgt erstens, daß (23') unendlich viel reelle Wurzeln $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ haben muß, zweitens, daß eine beliebige (zweimal differenzierbare) Funktion, die den Bedingungen $f'(0) = 0$, $c_1 f(r) + c_2 f'(r) = 0$ genügt, sich in eine Reihe entwickeln läßt, die nach den Funktionen $J_0(\varkappa_1 x)$, $J_0(\varkappa_2 x)$, $J_0(\varkappa_3 x)$, ... fortschreitet. Ist in (23') $c_1 = 0$, so ist auch $y =$ konst eine Eigenlösung, man muß dann also auch noch ein a_0 in dem Ansatz

$$f(x) = a_0 + a_1 J_0(\varkappa_1 x) + a_2 J_0(\varkappa_2 x) + \cdots \tag{24}$$

hinzunehmen. Die Koeffizienten bestimmen sich, wie in IX, § 3, **4** gezeigt.

Auch die Entwicklung nach Besselschen Funktionen höherer Ordnung läßt sich, wenigstens für positive Ordnungszahlen ν, an dieser Stelle erledigen. Fügen wir in (23) noch ein Glied mit $q = -\frac{\nu^2}{x}$ hinzu, also

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(-\frac{\nu^2}{x} + \varkappa^2 x\right)y = 0, \tag{25}$$

und verlangen, daß y für $x = 0$ verschwindet, so folgt aus der Übereinstimmung von (25) mit VIII, § 3, (1), daß die Lösungen durch die dort in (6) definierte Funktion J_ν für das Argument $\varkappa x$, also durch $J_\nu(\varkappa x)$ bei beliebigem $\varkappa$ dargestellt werden, wofern $\nu > 0$ gewählt wird. Eine zweite Randbedingung $c_1 y(r) + c_2 y'(r) = 0$ beschränkt die $\varkappa$ auf die Nullstellen von

$$c_1 J_\nu(\varkappa r) + c_2 J_\nu'(\varkappa r) = 0, \tag{25'}$$

und die Theorie liefert den Satz über die Existenz dieser Nullstellen und über die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in der Form (24), wo nur J_0 durch J_ν zu ersetzen ist.

Wir betrachten schließlich den Fall $p = e^{x^2}$, $q = 0$, $r = e^{x^2}$, also die Gleichung

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2} y') = \lambda e^{x^2} y \quad \text{oder} \quad y'' + 2xy' = \lambda y. \tag{26}$$

Man erkennt aus der ersten Form, daß sie für $\lambda = -2$ durch $y = e^{-x^2}$ befriedigt wird, und aus der zweiten durch Differentiation, daß die Ableitung einer Lösung dieselbe Gleichung mit um zwei verminderten λ-Werte erfüllt. Schreiben wir also als Randbedingungen vor, daß y für $\pm\infty$ verschwinden soll, so sind die Eigenwerte die Zahlen $-2, -4, -6, \ldots$ und die Eigenfunktionen die Gaußsche Funktion e^{-x^2} samt ihren aufeinanderfolgenden Ableitungen. Daß diese Eigenwerte und Eigenfunktionen die einzigen sind, erkennt man daran, daß jede der auftretenden Eigenfunktionen genau eine Nullstelle mehr im Intervall besitzt als die vorangehende[1]). In den Entwicklungssatz muß wegen des unendlichen Intervalls eine Einschränkung aufgenommen werden, so daß man im wesentlichen zu dem Ergebnis gelangt, das in IX, § 1, **3** formuliert wurde.

6. Singuläre Randbedingungen. Die Überlegungen dieses Paragraphen behalten auch ihre Bedeutung in gewissen Fällen, in denen die Randbedingungen ein etwas anderes Aussehen haben, als die Gl. (2) zeigen. Besteht nämlich ein Fundamentalsystem, das zu der linear-homogenen Gleichung $L(y) = 0$ gehört, aus zwei Funktionen y_1, y_2, von denen die eine, etwa y_1, an der Stelle $x = a$ unendlich wird, während die zweite endlich bleibt, so führt die Vorschrift, y solle endlich sein für $x = a$, zu einer bestimmten Verfügung über die Integrationskonstanten: in $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ muß c_1 verschwinden. Diese Verfügung kann offenbar die Stelle einer der beiden Gl. (2) einnehmen, da sie den Charakter einer linear-homogenen Beziehung besitzt. Ein etwas allgemeinerer Fall liegt vor, wenn beide linear unabhängigen Lösungen für $x = a$ ins Unendliche gehen, aber von verschiedenen Ordnungen $\alpha < \beta$. Schreibt man dann vor, daß für $x = a$ noch $(x - a)^\alpha y$ endlich bleiben soll, so ist damit wieder in der früheren Weise über eine der Konstanten verfügt. Zwei wichtige Beispiele gehören hierher.

---

[1]) Vgl. das Oszillationstheorem in VII, § 3, 2. Es läßt sich unmittelbar auf sich selbst adjungierte Differentialgleichungen übertragen. Zu diesem Typ gehört auch (26).

Zunächst kann man die schon in **5** behandelte Entwicklung nach Besselschen Funktionen höherer Ordnung aus der Randbedingung „y endlich für $x = 0$“ (neben der Bedingung für $x = r$) gewinnen. Denn das allgemeine Integral von (25) setzt sich nach VIII, § 3, **2** aus den Besselschen Funktionen erster und zweiter Art zusammen, und die letztere ist, wie dort gezeigt wurde, an der Stelle $x = 0$ unendlich.

Setzt man ferner $p = (1 - x^2)$, $q = 0$, $r = 1$, so erhält man in

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] = \lambda y \tag{27}$$

die in VIII, § 2, **3** behandelte Differentialgleichung der Kugelfunktionen oder Legendreschen Polynome. In den Punkten $x = \pm 1$ wird die Gleichung singulär, und die einzige hier endlich bleibende Lösung ist das in VIII, § 2, (19) definierte Polynom P_n mit $\lambda = -n(n+1)$. Läßt man n alle ganzzahligen Werte durchlaufen, so erhält man sämtliche Legendreschen Polynome $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$, und unsere Theorie lehrt jetzt ohne weiteres die Entwickelbarkeit willkürlicher (zweimal differenzierbarer) Funktionen nach dieser Reihe. Über die Koeffizientenbestimmung ist das Erforderliche schon in IX, § 2, **2** gesagt.

7. Gleichungen höherer Ordnung. Ohne weiteres kann man die in **3** zusammengestellten Ergebnisse aus der Theorie der Integralgleichungen auch auf Probleme anwenden, die in ihrer ursprünglichen Fassung auf gewisse Differentialgleichungen höherer Ordnung führen. Es wird hier genügen, an dem Beispiel der Differentialgleichung des schwingenden Stabes (vgl. auch X, § 1) zu zeigen, in welcher Weise der Übergang zur Integralgleichung erfolgt.

Es liege die Gleichung vierter Ordnung vor:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + q y = \varphi, \tag{28}$$

wobei p, q, φ ebenso erklärt seien wie in **1**. Eine neue „Greensche Funktion“ $G(x, \xi)$ sei ebenso definiert wie in **1**: Sie genüge in jedem der Intervalle a, ξ und ξ, b der Gl. (28) mit $\varphi = 0$, erfülle die vier linear-homogenen Randbedingungen, die zur Bestimmung von y neben (28) gegeben sein müssen, und erleide schließlich in der dritten Ableitung an der Stelle $x = \xi$ einen Sprung von der Größe $1 : p(\xi)$. Die Lösung von (28) unter Beachtung der Randbedingungen ist dann ebenso wie oben in dem Ausdruck (3) gegeben. Man überzeugt sich

davon z. B. durch Einsetzen von (3) in (28), indem man durch Differentiation von (3) bildet:

$$\frac{d}{dx}(p\,y'') = \int_a^x \frac{d}{dx}(p\,G_2'')\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_x^b \frac{d}{dx}(p\,G_1'')\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

wobei a, b wieder die Grenzen des Integrationsbereiches, G_1, G_2 die Ausdrücke für die Greensche Funktion G links und rechts von der Unstetigkeitsstelle $x = \xi$ bezeichnen. Denn durch nochmalige Differentiation entsteht, da G_1 und G_2 innerhalb der betreffenden Teilbereiche der Gl. (28) mit $\varphi = 0$ genügen:

$$\frac{d^2}{dx^2}(p\,y'') = -\int_a^x q(x)\,G_2\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_x^b q(x)\,G_1\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$+ \varphi(x)\left[\frac{d}{dx}(p\,G_2'') - \frac{d}{dx}(p\,G_1'')\right]_{x=\xi} = -q(x)\,y(x) + \varphi(x).$$

Natürlich ist der Leitgedanke, der zur Definition der verallgemeinerten Greenschen Funktion führt, in der anschaulichen Erklärung zu suchen, die in 1 gegeben wurde.

Es bleibt jetzt nur noch festzustellen, wie die Randbedingungen aussehen müssen, damit die Greensche Funktion, die ja im wesentlichen den Kern der Integralgleichung bildet [sobald φ etwa ein Glied $r(x)y$ enthält], symmetrisch wird. Schreibt man für die linke Seite von (28) zur Abkürzung $L(y)$ und betrachtet zwei Funktionen u, v, für die $L(u) = L(v) = 0$ ist, so kann man eine zu (8) analoge „Greensche Formel" gewinnen, indem man den Ausdruck

$$v\,L(u) - u\,L(v) = v\,\frac{d^2}{dx^2}\left(p\,\frac{d^2 u}{dx^2}\right) - u\,\frac{d^2}{dx^2}\left(p\,\frac{d^2 v}{dx^2}\right)$$

zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integriert und rechts zweimal Produktintegration anwendet. Es ergibt sich so, wenn wir jetzt mit Strichen die Ableitungen nach x bezeichnen:

$$(29)\quad \int_{x_1}^{x_2}[v\,L(u) - u\,L(v)]\,dx = [v(pu'')' - u(pv'')' - v'(pu'') + u'(pv'')]_{x_1}^{x_2}.$$

In genau der gleichen Weise wie in 2 setzt man jetzt $u = G(x, \xi_1)$, $v = G(x, \xi_2)$ und wendet (29) auf die drei Intervalle $a, \xi_1 - \varepsilon$; $\xi_1 + \varepsilon, \xi_2 - \varepsilon$; $\xi_2 + \varepsilon, b$ an. Die linke Seite wird dann (nach Addition) gleich dem Unterschied $G(\xi_1, \xi_2) - G(\xi_2, \xi_1)$ und rechts bleibt nur die Differenz des Klammerwertes an den Stellen a und b. Es folgt also: Die Greensche Funktion ist symmetrisch für alle jene zu (28) hinzu-

tretenden Randbedingungen, aus denen für ein Paar ihnen genügender Funktionen u, v die Gleichheit des Klammerausdruckes rechts in (29) an beiden Enden folgt. Beispiele solcher „orthogonaler“ Bedingungen sind etwa:

$$(30)\begin{cases} \text{a) } y(a) = y(b) = 0, \quad y'(a) = y'(b) = 0; \\ \text{b) } y(a) = y(b) = 0, \quad y''(a) = y''(b) = 0; \\ \text{c) } y(a) = \alpha_1 \frac{d}{dx}(py'')_a,\ y'(a) = \alpha_2 y''(a),\ y(b) = \beta_1 \frac{d}{dx}(py'')_b, \\ \quad y'(b) = \beta_2 y''(b); \\ \text{d) } y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b),\ y''(a) = y''(b),\ y'''(a) = y'''(b). \end{cases}$$

In allen diesen Fällen (und natürlich in vielen anderen) gelten alle in **3** angeführten Sätze über die Alternative, die Existenz von Eigenwerten, Eigenlösungen und die Entwicklung willkürlicher Funktionen. Zu dem letzten Punkt ist natürlich zu sagen, daß als „dem Kern erreichbar“ und daher entwickelbar jetzt alle Funktionen zu gelten haben, die viermal stetig differenzierbar sind[1]).

§ 3. Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen

1. Greensche Funktion für zwei Veränderliche. Wir gehen jetzt, völlig analog zu § 2, von der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = \varphi$$

aus, in der sowohl p wie q eine gegebene stetige Funktion von x und y, p überdies im ganzen Gebiet von Null verschieden und stetig differenzierbar sei, während über φ, das auch noch von u abhängen kann, erst später verfügt werden wird. Als Randbedingung, der u genügen soll, nehmen wir das Bestehen einer Gleichung

$$(2) \qquad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

auf der geschlossenen Begrenzung des Integrationsgebietes an; dabei bedeutet ∂n die Differentiation nach der auswärts gerichteten Normalen der Begrenzung, α und β je eine gegebene Funktion des Ortes. Um die Vorstellung festzulegen, wollen wir voraussetzen, das Gebiet sei einfach zusammenhängend und werde von einem einfachen Kurvenzug, der an jeder Stelle eine eindeutig definierte Normalenrichtung besitzt,

---

[1]) Nach E. Trefftz, Schwingungsprobleme und Integralgleichungen, Math. Ann. 87 (1922), S. 307 genügt es zu wissen, daß die zweite Ableitung quadratisch integrabel ist.

umschlossen; dieser Rand zerfalle in endlich viel Teile, innerhalb derer sowohl α wie β stetig sei; natürlich kann α oder β auf beliebigen Teilen oder auch überall verschwinden. Gewisse Milderungen dieser Voraussetzungen sollen später (5) eintreten.

Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen beruht das Lösungsverfahren, das wir jetzt verfolgen, nämlich die Zurückführung des Problems auf die Lösung einer Integralgleichung — andere Überlegungen werden im letzten Abschnitt dieses Buches zur Sprache kommen —, auf dem Begriff der sogenannten Greenschen Funktion. Wir wollen diese im engsten Anschluß an den in § 2 eingeschlagenen Gedankengang einführen.

Es sei $G(x, y; \xi, \eta)$ eine Funktion zweier „Punkte" x, y und ξ, η, die in bezug auf x, y der Differentialgleichung (1) mit $\varphi = 0$ in jedem den Punkt ξ, η nicht enthaltenden Teilbereich und überdies der vorgeschriebenen Randbedingung (2) genügt. An der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ soll G eine Singularität aufweisen, die dem Sprung in der ersten Ableitung für den Fall einer Variablen analog ist. Die Analogie wird nun in der Weise hergestellt, daß man auf dem Rande eines kleinen Kreises vom Mittelpunkt ξ, η und Radius ϱ die Normalableitung $\partial G : \partial n$ bildet und über den ganzen Kreisrand integriert; es soll dann

$$\lim_{\varrho=0} \int_0^{2\pi\varrho} \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{p(\xi, \eta)} \tag{3}$$

sein. Im dreidimensionalen Problem tritt, wie wir später (2) noch sehen werden, an Stelle des Integrals links das analoge über eine kleine Kugel erstreckte; im eindimensionalen wird daraus naturgemäß die Summe aus der Ableitung nach x an der Stelle $\xi + \varrho$ und der Ableitung nach $-x$ an der Stelle $\xi - \varrho$.

Wir definieren somit als Greensche Funktion des Randwertproblems (1), (2) eine Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, die den Randbedingungen und, abgesehen von der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$, der Differentialgleichung mit $\varphi = 0$ genügt, endlich an der singulären Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ sich, wie (3) vorschreibt, verhält.

Im einfachsten Falle $p = 1$, $q = 0$, in dem die linke Seite von (1) in die der Potentialgleichung übergeht,

$$\varDelta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi \tag{4}$$

erhält man die Greensche Funktion in der Gestalt

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log\operatorname{nat} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + v(x, y; \xi, \eta), \tag{4'}$$

wo v eine durchaus stetige, der Bedingung $\Delta v = 0$ überall genügende, und im übrigen durch die Randbedingung bestimmte Funktion bedeutet. Denn wenn man für die Wurzel in (4') kurz r schreibt, so ist die Ableitung des lognat einfach $1:r$, und auf dem früher betrachteten Kreisrand die Normalableitung des ersten Bestandteiles von G gleich $1:2\varrho\pi$, also das Integral gleich 1, während der zweite Bestandteil der Stetigkeit zufolge nur einen mit ϱ verschwindenden Beitrag liefert. Daß aber $\operatorname{lognat} r$ für $r > 0$ als reeller Teil einer analytischen Funktion der Beziehung $\Delta v = 0$ genügt, ist bekannt (III, § 1, 3).

Der Zusammenhang mit den Integralgleichungen wird am einfachsten und allgemeinsten hergestellt mittels einer Umformung der Bedingung (3) auf Grund des Gaußschen Satzes über die Beziehung zwischen Flächen- und Randintegralen. Setzt man in der ersten der Gl. (31) in II, § 3 für $\mathfrak{v}$ den Wert grad G_m ein, so daß v_n gleich der Normalableitung von G_m wird, und beachtet, daß div grad $G_m = \Delta G_m$ ist [II, § 3, (27)], so sieht man, daß das Integral links in (3) gleich dem über die Kreisfläche erstreckten Integral von ΔG_m gesetzt werden darf, vorausgesetzt, daß ΔG_m existiert. Nun ist definitionsgemäß

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} L(G_m) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial G_m}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial G_m}{\partial y}\right) + qG_m \\ &= p\Delta G_m + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial G_m}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial G_m}{\partial y} + qG_m. \end{aligned}\right.$$

Wenn (3) bestehen soll, müssen die ersten Ableitungen von G in der Umgebung des singulären Punktes wie $1:\varrho$ unendlich werden, G selbst muß logarithmisch unendlich werden. Sieht man G als den limes einer Funktionsfolge $G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots$ an, zu dem man mit abnehmendem Kreisradius ϱ fortschreitet, so wird daher bei Integration von $L(G_m)$ über die Kreisfläche und Übergang zu $\varrho = 0$ nur das erste Glied $p\Delta G_m$ in Betracht kommen. Es folgt somit aus (3) und (5), da $L(G)$ außerhalb der Kreisfläche K nach Definition verschwindet:

$$(6)\quad \lim_{\varrho=0}\int_{(F)} L(G_m)\,dF = \lim_{\varrho=0}\int_{(K)} p\Delta G_m\,dF = p(\xi,\eta)\lim_{\varrho=0}\int_0^{2\pi\varrho}\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma = 1.$$

Daraus erkennt man, daß sich die Greensche Funktion G auch so definieren läßt: Man bilde die Lösung von (1), (2) für ein φ, das überall außerhalb eines Kreises um ξ, η mit dem Radius ϱ verschwindet, innerhalb dieses Kreises aber irgendwelche Werte besitzt, die das Integral 1 ergeben (z. B. den konstanten Wert $1:\varrho^2\pi$); dann gehe man zur Grenze $\varrho = 0$ über, indem man zugleich die Werte von φ inner-

halb des Kreises so vergrößert, daß ihr Integral den Wert 1 behält. Die Grenze der Lösungen ist die Greensche Funktion.

Aus dem linearen Charakter des Problems (1), (2) und der Analogie zu dem Verhalten gewöhnlicher linearer Gleichungen (II, § 1, **1**) folgt nun, daß man die Lösung für beliebiges φ durch Übereinanderlagern der besonderen Lösungen G für verschiedene ξ, η erhält in der Form:

$$u(x, y) = \int_{(F)} G(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \quad (7)$$ [1].

Man kann natürlich (7) auch durch unmittelbare Rechnung auf Grund von (3) und (6) bestätigen. In (7) ist das zu (3) in § 2 völlig analoge Ergebnis gefunden. Zur Integralgleichung zweiter Art gelangt man hier wie dort, wenn φ etwa in der Form $\varphi_1(x, y) + \lambda s(x, y) u(x, y)$ vorliegt. Es ergibt sich dann, genau wie am Schluß von § 2, **1**, mit der Abkürzung

$$f(x, y) = \int_{(F)} G(x, y; \xi, \eta)\, \varphi_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \quad (8')$$

aus (7) die lineare Integralgleichung für $u(x, y)$:

$$u(x, y) - \lambda \int_{(F)} G(x, y; \xi, \eta)\, s(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y) \quad (8)$$

mit dem Kern $K(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta)\, s(\xi, \eta)$.

2. Fall von drei und mehr Veränderlichen. Wenn in drei unabhängig Veränderlichen x, y, z die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p \frac{\partial u}{\partial z}\right) + q u = \varphi \quad (9)$$

und für die Begrenzungsfläche F des Integrationsbereiches V die Randbedingung

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (10)$$

gegeben ist, wobei $p, q, \varphi, \alpha, \beta$ analoge Bedeutung haben wie oben, so führen wir eine Greensche Funktion $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ ein, die wieder völlig analog definiert wird. Es genügt G in bezug auf die ersten drei Veränderlichen der Gleichung $L(G) = 0$ außerhalb einer kleinen Kugel mit $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ als Mittelpunkt und ϱ als Radius, es erfüllt G die Bedingung (10) an der Begrenzung und weist schließlich in dem

[1] Wir haben also hier gezeigt, daß aus dem Bestehen der Gl. (1) die Gl. (7) folgt. Will man umgekehrt aus dem Erfülltsein von (7) auf das Bestehen von (1) schließen, so muß man über die Funktion $\varphi(x, y)$ etwa noch voraussetzen, daß sie stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Vgl. dazu auch XVI, § 2, **3**.

Punkte ξ, η, ζ eine solche Singularität auf, daß für das über die Kugeloberfläche σ erstreckte Integral

$$\lim_{\varrho=0} \int_{(\sigma)} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{p(\xi, \eta, \zeta)} \tag{11}$$

wird. Die Umformung von (11) auf Grund des Gaußschen Satzes ergibt wieder, daß G die Grenze einer Funktionsfolge $G_1, G_2, \ldots$ ist, von der jedes G_m den Gl. (9) und (10) für ein φ genügt, das außerhalb einer kleinen Kugel um ξ, η, ζ als Mittelpunkt verschwindet, im Innern dieser Kugel aber so groß wird, daß das Integral gleich 1 bleibt. Daraus ergibt sich wieder die Lösung von (9), (10) für ein beliebiges φ in der Form

$$u(x, y, z) = \int_{(V)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{12}$$

und demgemäß die lineare Integralgleichung zweiter Art für u, sobald φ in der Gestalt $\varphi_1(x, y, z) + \lambda s(x, y, z) u(x, y, z)$ vorliegt.

Im einfachsten Falle $p = 1$, $q = 0$ wird aus der linken Seite von (9) der Laplacesche Ausdruck

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi, \tag{13}$$

und hierzu läßt sich die Greensche Funktion wenigstens ihrer allgemeinen Form nach anschreiben. Sie lautet

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + v(x, y, z; \xi, \eta, \zeta), \tag{13'}$$

wobei v durchaus stetig ist, der Gleichung $\Delta v = 0$ genügt und im übrigen durch die Randbedingungen bestimmt wird. Schreiben wir r für den Wurzelausdruck in (13'), so ist die Normalableitung des ersten Teiles von (13') auf der Kugeloberfläche vom Radius ϱ gleich $-1/r^2$ mal $-1/4\pi$ für $r = \varrho$, also gleich $1 : 4\pi\varrho^2$, und das Integral über die Kugeloberfläche gleich 1, wie es (11) vorschreibt. Daß der Ausdruck $1/r$ der Bedingung $\Delta\, 1/r = 0$ genügt, kann man leicht nachrechnen und ist überdies von anderen Überlegungen her bekannt [XIV, § 1, **1** [1]].

Es lohnt natürlich nicht, die hier gegebene Betrachtung jetzt noch für größere Variablenzahl zu wiederholen, für die sie ganz analog verläuft. Die allgemeine Form der Gl. (9) bis (12) liegt auf der Hand. Die Ordnung des Unendlichwerdens von G wächst mit der Variablenzahl von $n = 3$ an jedesmal um eine Einheit. Für $n = 4$ lautet der charakteristische Teil der Greenschen Funktion von Δu, da das

[1]) Man vgl. hierzu XII, § 4, 3.

Integral analog (11) über das Kugelvolumen von der Größe $4\varrho^3\pi/3$ zu nehmen ist: $-3/8\pi r^2$, wo r den Abstand des Punktes x_1, x_2, x_3, x_4 vom singulären Punkt $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ bezeichnet.

3. Symmetrieeigenschaften. Für die Anwendung der Theorie der Integralgleichungen ist es von entscheidender Bedeutung, daß man in gewissen Fällen der Randwertprobleme zu symmetrischen Kernen gelangt. Voraussetzung hierfür ist zunächst die Symmetrie der Greenschen Funktion, die jetzt, wie im Falle einer unabhängig Veränderlichen § 2, 2, aus der sogenannten Greenschen Formel herzuleiten ist. Um diese, beispielsweise für $n = 3$, zu gewinnen, führen wir in den Gaußschen Satz über die Beziehung zwischen Raum- und Oberflächenintegralen [II, § 3, (28)] einmal $p\frac{\partial u}{\partial x}v$ für f ein, dann $p\frac{\partial v}{\partial x}u$ und subtrahieren die so entstandenen Gleichungen. Sodann erhält man, wenn man $+p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$ hinzufügt:

$$\int\limits_{(V)}\left[v\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dV = \int\limits_{(F)} p\left[v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right]\cos(\nu, x)\,d\boldsymbol{F}.$$

Vertauscht man jetzt x mit y und z und bildet die Summe der voranstehenden Gleichung mit den durch Vertauschung hervorgegangenen, so unterscheidet sich der Integrand links von $vL(u) - uL(v)$ nur um die einander aufhebenden Glieder $\pm quv$, und rechts setzen sich die Ableitungen nach x, y und z zur Normalableitung zusammen. So erhält man die Greensche Formel:

$$\text{(14)} \qquad \int\limits_{(V)}[vL(u) - uL(v)]\,dV = \int\limits_{(F)} p\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right]dF,$$

die für einen beliebigen Raumteil V, dessen Oberfläche F ist, gilt. Für zwei unabhängig Veränderliche hat die Formel die gleiche Gestalt, nur daß links ein Flächenintegral, rechts das zugehörige Randintegral steht. Für den Fall einer Variablen ist die Formel in § 2, (8) angegeben worden.

Fig. 59

Der weitere Gedankengang ist dem von § 2 völlig analog. Wir betrachten zwei Punkte 1 und 2 mit den Koordinaten $\xi_1\eta_1\zeta_1$ bzw. $\xi_2\eta_2\zeta_2$ und die zugehörigen Greenschen Funktionen, die wir der Kürze halber G_1 und G_2 nennen wollen, also $G_1 = G(x, y, z;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ und $G_2 = G(x, y, z;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$. Nun setzen wir $u = G_1$, $v = G_2$ und

wenden (14) auf den Raumteil V_1 an, der aus dem ganzen Integrationsbereich V durch Ausschluß zweier kleiner Kugeln um 1 und 2 als Mittelpunkt hervorgeht (Fig. 59). Die linke Seite von (14) ist dann Null, die rechte besteht aus drei Teilen: dem Integral über die Berandung F von V (positiv) und den Integralen über die beiden Kugeloberflächen (negativ). Für die letzteren erhält man mit Rücksicht auf (11) nach dem Grenzübergang zu unendlich kleinen Kugelradien die Werte

$$\lim_{\varrho=0} \int_{(\sigma_1)} p\, G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} dF = G_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$

und

$$\lim_{\varrho=0} \int_{(\varrho_2)} -p G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} dF = -G_1(\xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$

da die anderen, hier schon unterdrückten Teile der Integranden nichts beitragen. Es wird nämlich im Punkte 1 die Größe von G_1 wie $1/r$ unendlich, das Integrationsgebiet aber klein wie r^2 usf. Man erhält somit, wenn für G_1 und G_2 wieder G eingeführt wird:

$$(15)\quad G(\xi_1,\eta_1,\zeta_1;\xi_2,\eta_2,\zeta_2) - G(\xi_2,\eta_2,\zeta_2;\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = \int_{(F)} p\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dF,$$

mit $u = G_1$ und $v = G_2$. Von den Funktionen u, v wissen wir noch, daß sie der Randbedingung genügen müssen, der die Lösung der Differentialgleichung unterworfen ist. Hat diese Bedingung die von uns bisher vorausgesetzte Gestalt (2) oder (10), so ist der Klammerausdruck und damit die ganze rechte Seite gleich Null: Die Greensche Funktion des Randwertproblems (1), (2) oder (9), (10) ist symmetrisch. In der Tat ist der jetzt von uns betrachtete Ansatz der Randbedingung viel enger als der im eindimensionalen Falle zugrunde gelegte; er entspricht dem Sonderfall (12c) von § 2, mit Einschluß der Grenzfälle (12a) und (12b).

Der Kern der Integralgleichung ist, wie wir in (8) gesehen haben, das Produkt aus der Greenschen Funktion in die Funktion s, die auf der rechten Seite der Differentialgleichung als Faktor der Unbekannten u auftritt. Wenn s im ganzen Integrationsbereich sein Zeichen nicht ändert, so kann man, wie in § 2, 2 gezeigt, durch Übergang zur Variablen $u\sqrt{s}$ zu einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern gelangen, sobald nur G symmetrisch ist[1]).

[1]) Bei der ersten Randwertaufgabe kann man übrigens die Symmetrie der Greenschen Funktion auch beweisen, wenn die Normalableitungen an der Umgrenzungsfläche nicht existieren. Man ersetzt dann die äußere Umgrenzung durch die im Bereichinnern verlaufenden Niveauflächen $G = \varepsilon$ und läßt ε gegen Null streben.

4. Existenz der Greenschen Funktion. Im Falle einer unabhängig Veränderlichen konnten wir die Greensche Funktion aus einem Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $L = 0$ aufbauen (§ 2, **1**). Ein ähnlicher Vorgang ist bei partiellen Differentialgleichungen nicht möglich, da man hier eine allgemeine Lösungsformel nicht angeben kann. Aus diesem Grunde bedarf die Frage, ob es zu einem beliebigen Differentialausdruck L und einer Randbedingung (2) eine Greensche Funktion überhaupt gibt, noch besonderer Überlegung.

Für den einfachsten — und weitaus wichtigsten — Fall $p = 1$, $q = 0$, in dem $L(u)$ in den Laplaceschen Ausdruck Δu übergeht, haben wir die allgemeine Form von G oben angegeben, Gl. (4') bzw. (13'). Beide Formeln zeigen G bestehend aus einem regulären Teil v und dem im „Aufpunkt" unendlich werdenden Bestandteil $\log \operatorname{nat} r$ bzw. $-1/r$. Damit G wirklich gegeben sei, muß man noch v kennen, das erstens der Gleichung $\Delta v = 0$ genügt und zweitens mit dem singulären Bestandteil zusammen die Randbedingung (2) erfüllt. Man sieht, daß es lediglich auf die Frage ankommt: Läßt sich eine stetige Lösung v von $\Delta v = 0$ so bestimmen, daß für sie auf einer gegebenen Begrenzung $\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n}$ vorgeschriebene Werte (nämlich die negativ genommenen Werte, die hier der andere Teil von G besitzt) annimmt? Wir werden im folgenden Kapitel diese Frage, das Hauptproblem der Potentialtheorie, ausführlich besprechen und finden, in welch weitem Umfang sie zu bejahen ist. Damit ist dann die Existenz der Greenschen Funktion für die Differentialgleichung $\Delta u = \varphi$ bewiesen und es lassen sich alle grundsätzlichen Fragen betreffend die einfache Gleichung der elektrischen oder elastischen Schwingungen $\Delta u = \lambda s u$ erledigen (vgl. **5**).

Nicht so einfach liegt der Fall eines beliebigen Differentialausdruckes $L(u)$. Wir werden im XVIII. Kapitel gewisse Überlegungen anführen, die es gestatten anzunehmen, daß alle grundsätzlichen Ergebnisse der Potentialtheorie sich sinngemäß auf jede „elliptische" Differentialgleichung übertragen lassen, und zu diesem Typus gehört unser Ausdruck $L(u)$, vgl. XVIII, § 1, **1**, jedenfalls. Es gibt also auch in dem allgemeinen Falle eine Greensche Funktion. Auf diese Weise werden — durch Vermittlung der Theorie der Integralgleichungen — die Sätze über elektrische, thermische und elastische Schwingungsvorgänge auch für räumlich veränderliche Werte der Materialgrößen (Dielektrizitätszahl, Leitfähigkeit usf.) sichergestellt.

Einen unmittelbareren Weg zum Nachweis einer Greenschen Funktion für beliebiges L bietet die Theorie der Integralgleichungen selbst.

Wir wollen ihn hier, ohne auf Einzelheiten einzugehen, unter der Einschränkung $\beta = 0$, also für die Randbedingung $u = 0$, skizzieren. Dividiert man die Gl. (1) durch p, was wegen $p \neq 0$ erlaubt ist, so kann sie so geschrieben werden:

$$(16) \qquad \Delta u = \frac{\varphi}{p} - \frac{\partial p}{p \partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{p \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{q}{p} u.$$

Nennen wir $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ die Greensche Funktion, die zur Randbedingung $u = 0$ und zum Differentialausdruck Δu gehört, so kann man nach (7) die Lösung von (16) in der Form

$$(17) \quad u(x, y) = \int\limits_{(F)} \Gamma(x, y; \xi, \eta)\left[\frac{\varphi}{p} - \frac{\partial p}{p \partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{p \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{q}{p} u\right] dF$$

anschreiben. Wendet man die Gaußsche Umformung [II, § 3, (28)] auf die Funktionen $f = \Gamma u \frac{\partial p}{p \partial x}$ und $f = \Gamma u \frac{\partial p}{p \partial y}$ an und bedenkt, daß u am Rande verschwindet, so erkennt man, daß der zweite und dritte Bestandteil des Integrals in (17) sich ersetzen läßt durch

$$\int\limits_{(F)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial p}{p \partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial p}{p \partial y}\right)\right] u \, dF.$$

Danach nimmt (17) die Form an:

$$(17') \qquad u(x, y) - \int\limits_{(F)} K(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y)$$

mit

$$(17'') \quad K = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial p}{p \partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial p}{p \partial y}\right) - \Gamma \frac{q}{p}, \quad f = \int\limits_{(F)} \Gamma \frac{\varphi}{p}\, dF.$$

Die Integralgleichung (17′) ist der Alternative unterworfen: Entweder gibt es eine nichttriviale Lösung für $f = 0$, also für $\varphi = 0$, oder eine eindeutige Lösung für beliebig vorgeschriebenes f. Den ersten Fall wollen wir ausschließen — er entspricht dem auch in § 2, **1** ausgeschlossenen Fall, in dem das homogene Problem $L = 0$ lösbar ist und eine Greensche Funktion im engeren Sinne nicht existiert —, der zweite Teil der Alternative liefert das gewünschte Resultat. Denn wir haben oben gezeigt, daß die Greensche Funktion in gewissem Sinne als Lösung von (1) für ein ganz bestimmtes, besonderes φ aufgefaßt werden kann; im übrigen ist die Umwandlung von (1) in eine Integralgleichung ja schon durch (17′) und (17″) bewerkstelligt. Wir unterdrücken hier eine genauere Untersuchung des Grenzüberganges, sowie die Diskussion des Unendlichwerdens des Kernes von (17′)[1].

[1] Vgl. hierzu XII, § 4.

5. Anwendung. Beispiele. Die Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Randwertprobleme mit mehreren Veränderlichen geschieht in der gleichen Weise, wie es oben in § 2, **3** ausführlich für den eindimensionalen Fall gezeigt wurde. Das wesentliche ist, daß für alle Arten mechanischer, elektrischer und thermischer Schwingungsvorgänge die Existenz von unendlich vielen, diskret liegenden Eigenschwingungszahlen und zugehörigen Schwingungsformen, sowie die Zerlegbarkeit (Entwickelbarkeit) beliebig vorgegebener Zustandsformen (Anfangsbedingungen) in Bestandteile von der Gestalt der Eigenschwingungen nachgewiesen erscheint. Die Einschränkungen, zu denen man vom mathematischen Standpunkt heute noch gezwungen ist (insbesondere hinsichtlich der zweimaligen Differenzierbarkeit der zu entwickelnden Funktionen), werden sich gewiß als überflüssig herausstellen, soweit sie nicht in der physikalischen Fragestellung mit gegeben sind. — Die in **1** ausgesprochene Bedingung, daß die Berandung an jeder Stelle eine eindeutige Normalenrichtung aufweisen muß, kann man jedenfalls für einzelne Punkte im Zweidimensionalen, für einzelne Linienstücke im Dreidimensionalen fallen lassen, wenn diese nicht als singuläre Linien in das Innere des Volumens hineinragen, oder ein Punkt etwa die Spitze eines nach innen gerichteten Kegels mit zu kleinem Öffnungswinkel ist u. dgl.; auf Vielecke in der Ebene, Vielflache im Raume lassen sich alle Sätze ohne weiteres anwenden.

Die besondere Form des Randwertproblems (1), (2) bzw. (9), (10), mit der man es in fast allen Anwendungsfällen zu tun hat, ist die der „Wellengleichung"

$$\Delta u = \lambda u \tag{18}$$

mit $u = 0$ am Rande, λ als willkürlichem Parameter (der das negative Quadrat der Frequenz $\varkappa$ bedeutet). Mit dieser Gleichung werden wir uns in Kapitel XIX, § 1 ausführlich beschäftigen. Hier sei nur zur Erläuterung des Zusammenhanges mit dem Vorhergehenden je ein Beispiel für das Zwei- und Dreidimensionale kurz dargestellt.

Sind zunächst für eine kreisförmige, am Rande eingespannte Membran die Eigenschwingungen aufzusuchen, so wird man in (18) an Stelle von x, y Polarkoordinaten r, φ einführen und für u das Produkt einer Funktion von r mit einer Funktion von φ ansetzen. Auf diese Weise entstehen (wie näher im 2. Band gezeigt wird) zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von denen die eine durch trigonometrische, die andere durch Besselsche Funktionen erster Art integriert werden kann. Man überzeugt sich leicht

durch Einsetzen [wobei man die Gl. II, § 3 (43) zur Umformung von Δu benutzt], daß die Ausdrücke

$$(19) \qquad J_n(\varkappa r)\cos n\varphi, \quad J_n(\varkappa r)\sin n\varphi,$$

wo J_n die Besselsche Funktion erster Art und n-ter Ordnung (VIII, § 3, 1), $\varkappa$ eine Konstante bedeutet, die Gl. (18) mit $\lambda = -\varkappa^2$ erfüllen. Soll für $r = R$ der Randbedingung $u = 0$ genügt werden, so muß man $\varkappa$ so wählen, daß $\varkappa_{mn} R$ eine Wurzel der Gleichung

$$(19') \qquad J_n(\varkappa R) = 0$$

wird. Die Sätze über Existenz von unendlich vielen Wurzeln von (19′), das Bestehen gewisser Integralbeziehungen (VIII, § 3, 7) zwischen Besselschen Funktionen verschiedener Ordnungen oder verschiedenen Arguments erscheinen jetzt nur als Sonderfälle der allgemeinen Sätze über die Existenz der Eigenwerte und die Orthogonalität der Eigenfunktionen. Über das in Kap. IX Bewiesene geht folgender Entwicklungssatz hinaus: Jede zweimal differenzierbare, in einem Kreisgebiet vom Radius R definierte Funktion läßt sich in eine Reihe der Form

$$(19'') \qquad \sum_{m,n} [A_{mn} J_n(\varkappa_{mn} r)\cos n\varphi + B_{mn} J_n(\varkappa_{mn} r)\sin n\varphi]$$

entwickeln, wobei die $\varkappa_{mn}$ die Wurzeln von (19′) sind und die Koeffizienten A und B in der Fourierschen Weise sich aus den Orthogonalitätsbeziehungen berechnen.

Das räumliche Analogon zu der kreisförmigen Membran bildet etwa eine kugelförmige, elastische Luftmasse, die, an der Oberfläche durch Umschließung festgehalten, periodische Schwingungen ausführt. Geht man wieder zu Polarkoordinaten r, ϑ, φ über und macht für u den Ansatz eines Produktes je einer Funktion von r, von ϑ und von φ, so erhält man Partikularlösungen von (18) in der Form

$$(20) \qquad \frac{J_{m+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{\varkappa r}} P_m^n(\cos\vartheta)\cos n\varphi, \quad \frac{J_{m+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{\varkappa r}} P_m^n(\cos\vartheta)\sin n\varphi,$$

wo m, n irgendwelche ganze Zahlen, $J_{m+1/2}$ die Besselsche Funktion $(m + 1/2)$-ter Ordnung und P_m^n die n-te zugeordnete Kugelfunktion m-ter Ordnung bezeichnet (vgl. VIII, § 2, 5). Die Konstante $\varkappa$, deren Quadrat $-\lambda$ ist, muß der Gleichung

$$(20') \qquad J_{m+1/2}(\varkappa R) = 0$$

genügen, wobei R der Kugelradius ist. Die Integralformeln VIII, § 2 (22) und (22′) für die Kugelfunktionen erscheinen wieder als Sonderfall der Orthogonalität der Eigenlösungen einer Integral-

gleichung mit symmetrischem Kern. Als Entwicklungssatz erhalten wir: Jede zweimal stetig differenzierbare, in einem Kugelgebiet vom Halbmesser R definierte Funktion läßt sich in eine (dreifach unendliche) Reihe der Form

$$(20'') \quad \sum_{m,n,p} \frac{J_{m+1/2}(\varkappa_{mp} r)}{\sqrt{\varkappa r}} P_m^n(\cos\vartheta)[A_{mnp}\cos n\varphi + B_{mnp}\sin n\varphi]$$

entwickeln, wobei die $\varkappa_{mp}$ die Wurzeln von (20′) sind und die A und B sich auf Grund der Orthogonalitätsbeziehungen in der Fourierschen Weise berechnen.

Literatur siehe S. 506.

Vierzehntes Kapitel

Potential

§ 1. Definitionen und Grundeigenschaften

1. Das Newtonsche Potential. Zu dem Begriff „Potential" gelangt man in der theoretischen Physik in mehrfacher Weise. In der Vektoranalysis (II, § 3, 2) nennt man jede skalare Funktion des Ortes das Potential der Vektorverteilung, die durch ihre Ableitung oder ihren Gradienten erzeugt wird; es sind also die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \operatorname{grad} f, \quad f = \operatorname{pot} \mathfrak{v}$$ [1]

wesentlich gleichbedeutend, abgesehen von einer additiven Konstante, die in der zweiten natürlich hinzugefügt werden kann.

Als Newtonsches Potential bezeichnet man solche Skalarfunktionen, deren abgeleiteter Vektor, als Kraft aufgefaßt, eine Übereinanderlagerung von Newtonschen Anziehungs- oder Abstoßungskräften, wirkend auf den Punkt, für den die Ableitung gebildet ist, darstellt. Es mag zunächst unentschieden bleiben, ob sich jede differenzierbare Skalarfunktion in diesem Sinne als Potential deuten läßt (vgl. § 2, 2). Die Newtonschen Kräfte sind dadurch definiert, daß ihre Wirkungslinie durch einen festen Punkt, das Wirkungszentrum (die anziehende oder abstoßende Masse), geht und ihre Größe

[1] Das in II, § 3, 2 bei der Definition des Potentials auftretende Minuszeichen ist hier fortgelassen worden.

umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt. Eine einzelne solche Kraft hat das Potential $m:r$, wenn m eine Konstante, r den Abstand des betrachteten Punktes vom Wirkungszentrum bezeichnet; denn die Größe des Gradienten dieser Funktion ist $|m:r^2|$ und die Richtung steht senkrecht auf den Kugelflächen $r =$ konst. Faßt man m als Masse eines anziehenden Punktes auf, so ist $-m:r^2$ die Newtonsche Anziehungskraft, ausgeübt auf die Masse 1 in der Entfernung r. Man denkt sich stets bei Untersuchung des Potentials einen solchen Punkt von der Masse 1 der Betrachtung zugrunde gelegt und nennt ihn den „Aufpunkt" des Potentials.

Ein sehr einfacher Fall liegt vor, wenn es sich um das Potential einzelner diskreter Massenpunkte handelt. Hier ist das Potential

$$P = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n}, \tag{2}$$

wenn $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Abstände des Aufpunktes von den einzelnen, festliegend gedachten Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sind. Der Ausdruck (2)

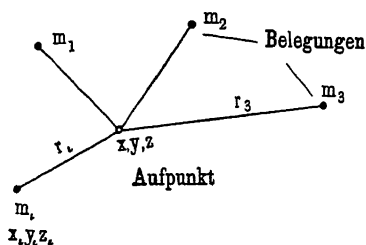
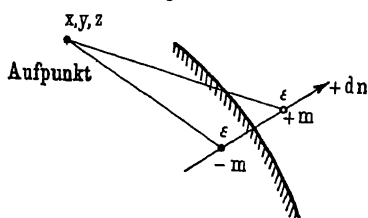



Fig. 60 Fig. 61

ist eine Funktion der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes, die man explizite erhält, wenn man für die r_i ihre Werte einsetzt, z. B. $r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$, wobei x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von m_1 sind usf. (Fig. 60).

Sind die Massen über einzelne Raumteile stetig verteilt, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke des Newtonschen Potentials in einer der folgenden drei Formen:

$$U = \int\limits_{(L)} \frac{\mu\, dL}{r}, \quad \int\limits_{(F)} \frac{\mu\, dF}{r}, \quad \int\limits_{(V)} \frac{\mu\, dV}{r}, \tag{3}$$

die man als Potential von Linien, Flächen und Körpern unterscheidet. In dem ersten Ausdruck ist vorausgesetzt, daß nur eine mit Masse stetig belegte Linie vorhanden ist und μ die lineare Massendichte, d. h. die auf die Längeneinheit an jeder Stelle der Linie entfallende

Masse, bezeichnet; die Integration ist über die ganze Linie zu erstrecken, formal so auszuführen, daß in $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$ ξ, η, ζ bei konstantem x, y, z alle Werte durchläuft, die Punkten von L entsprechen. So wird das Integral eine Funktion der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes. Analog ist im zweiten und dritten Falle μ die Flächendichte bzw. Raumdichte der Masse, und die Integrale sind über die gesamte Flächen- bzw. Körperbelegung zu erstrecken.

Neben den Sonderfällen (2) und (3) des Newtonschen Potentials — der allgemeinste Ausdruck hätte etwa die Form eines Stieltjesschen Raumintegrals (I, § 5, 1) — spielt in den physikalischen Anwendungen und vor allem in der mathematischen Theorie des Potentials noch der folgende eine wichtige Rolle. Denken wir uns auf einem Flächenstück F in einem Punkte die Normale errichtet und auf ihr in einem kleinen Abstand ε auf beiden Seiten der Fläche eine Masse $+m$ bzw. $-m$ angebracht (Fig. 61). Das Potential dieser Massen für einen beliebigen Aufpunkt ist $m/r_1 - m/r_2$ oder in leicht verständlicher Bezeichnung $mD(1/r)$. Läßt man ε kleiner und kleiner werden, so geht $D(1/r)$ über in das Produkt 2ε mal dem Differentialquotienten der Funktion $1/r$ nach der Normalrichtung, also das Potential in

$$2m\varepsilon \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Dabei ist positive Normalenrichtung jene, auf der $+m$ angebracht ist. Läßt man zugleich, während ε gegen Null geht, m so unendlich werden, daß $m\varepsilon$ einen endlichen Wert behält, so bekommt man auch einen endlichen Wert für das Potential. Man kann natürlich auch mehrere Flächennormalen, oder eigentlich Flächenpunkte, in dieser Weise belegen und schließlich auch zu einer stetigen Belegung dieser Art übergehen, wobei wir voraussetzen wollen, daß F stetige Normalenrichtung besitzt oder wenigstens aus Stücken mit stetiger Normalenrichtung besteht. Bezeichnet dann ν eine gegebene Funktion des Ortes auf F, die wir also als Grenzwert des Produktes 2ε mal einer Massendichte μ deuten wollen, so haben wir in

$$(4) \qquad W = \int\limits_{(F)} \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dF = -\int\limits_{(F)} \frac{\nu}{r^2} \cos(r, n)\, dF$$

das, was man Potential einer Doppelschicht oder einer doppelten Flächenbelegung nennt. Die Funktion ν heißt Belegungsdichte oder Belegung der Doppelschicht. Bei der Integration ist der Aufpunkt x, y, z unveränderlich, der andere Endpunkt des Fahrstrahls r durchläuft F, und an jeder Stelle ist der Integrand gleich $-\nu : r^2$ mal

$\partial r/\partial n$, oder mal dem cos des Winkels zwischen der positiven Normalenrichtung und dem Fahrstrahl (vom Aufpunkt zum Belegungspunkt).

Die Funktion $1/r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-1/2}$ genügt, wie man leicht erkennt, bei festen ξ, η, ζ der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Man braucht dazu nur zu überlegen, daß ξ, η, ζ Null gesetzt werden darf und dann für $\partial r/\partial x$, gleich dem cos des Winkels zwischen Fahrstrahl und x-Richtung, auch $x:r$ geschrieben werden kann. Demnach hat man

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{r^3} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}.$$

Addiert man die drei zweiten Ableitungen nach x, y und z, so erhält man im Zähler $3(x^2+y^2+z^2) - 3r^2 = 0$, w. z. b. w. Da die Laplacesche Gleichung linear und homogen ist, so ist auch jede lineare Zusammenfassung von Lösungen wieder eine Lösung. Es folgt daraus, daß nicht nur das Potential P einzelner Punkte, sondern auch jeder der Ausdrücke (3) und (4) der gleichen Bedingung genügt, was wesentlich auf der Zulässigkeit der Differentiation nach x, y, z unter dem Integralzeichen beruht. Man muß aber beachten, daß nach unseren bisherigen Erklärungen das Potential selbst sowie seine Ableitungen nur definiert sind für Aufpunkte, die von den mit Masse belegten Punkten verschieden sind, da sonst die Nenner in den definierenden Ausdrücken verschwinden. Dies ist ganz besonders zu beachten im Falle des dritten Ausdrucks (3), da hier ein dreidimensionaler Raumteil, ja unter Umständen überhaupt der ganze unendliche Raum als mit Masse belegt vorausgesetzt ist. Wir werden erst später sehen, in welcher Weise sich die Definitionen auch für Belegungspunkte aufrechterhalten lassen — diese Untersuchung bildet den Hauptgegenstand des vorliegenden Paragraphen — und stellen vorläufig nur fest: In allen Punkten, die von Belegung frei sind, genügt das Newtonsche Potential der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta P = 0$, $\Delta U = 0$, $\Delta W = 0$.

2. Logarithmisches Potential. Da, wie wir eben gesehen haben, die Potentiale P, U, W, zumindest außerhalb der Belegung, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, so kann man die Potentialtheorie auch auffassen als ein Studium der Integrale der Laplaceschen Differentialgleichung (5). Von diesem Gesichtspunkt aus werden

wir im XVII. Kapitel auf den Gegenstand zurückkommen. Es liegt aber nahe zu überlegen, ob nicht die analoge Differentialgleichung in zwei Veränderlichen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5}$$

eine ähnliche Begriffsbildung wie die Gl. (5) gestattet. Diese Gl. (5′) wird nicht mehr durch die Funktion $1/r$ befriedigt, wohl aber in ganz entsprechender Weise durch $\log \text{nat}\, r$, wofür wir wie üblich kurz $\log r$ schreiben wollen. Man überzeugt sich leicht auf Grund der auch oben benutzten Beziehung $\partial r/\partial x = x : r$, daß

$$\frac{\partial}{\partial x} \log r = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r = -\frac{2x}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r^2} = \frac{-2x^2 + r^2}{r^4}$$

ist, daher die Summe der zweiten Ableitungen den Zähler $-2(x^2 + y^2) + 2r^2 = 0$ aufweist.

Man führt nun analog den Ausdrücken (2), (3), (4) folgende Summen bzw. Integrale als „logarithmische Potentiale" ein. Zunächst das logarithmische Potential einer endlichen Anzahl von Punkten:

$$P = m_1 \log r_1 + m_2 \log r_2 + \cdots + m_n \log r_n, \tag{6}$$

dann die Linien- und Flächenpotentiale:

$$U = \int_{(L)} \mu \log r\, dL, \quad U = \int_{(F)} \mu \log r\, dF, \tag{7}$$

endlich das logarithmische Potential einer Doppelbelegung

$$W = \int_{(L)} \nu \frac{\partial}{\partial n} \log r\, dL = \int_{(L)} \frac{\nu}{r} \cos(r, n)\, dL, \tag{8}$$

wobei alle Bezeichnungen μ, ν usf. genau so zu verstehen sind wie in **1**. Alle in diesem Paragraphen zur Ableitung kommenden Sätze lassen sich auf die logarithmischen Potentiale sinngemäß übertragen. Wir werden an wichtigen Punkten die Übertragung jedesmal angeben.

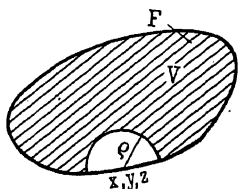
3. Greenscher Satz. In XIII, § 3, **3** haben wir eine Formel (14) für einen Differentialausdruck zweiter Ordnung $L(u)$ abgeleitet, die jedenfalls auch für den Sonderfall, daß $L(u)$ in Δu übergeht, zu Recht besteht. Es gilt, wenn F die Begrenzung des Volumens V ist, für zwei beliebige u, v:

$$\int_{(V)} (v \Delta u - u \Delta v)\, dV = \int_{(F)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dF. \tag{9}$$

Übrigens ist dies genau die in II, § 3 vektoranalytisch gewonnene Gl. (34). Setzt man hier $v = 1/r$, wobei r den Abstand des Punktes ξ, η, ζ von einem außerhalb V liegenden Aufpunkt x, y, z bezeichnet (die Integrationsvariablen sind ξ, η, ζ), so hat man, da $\Delta(1/r) = 0$ ist,

$$\text{(10a)} \qquad \int\limits_{(V)} \frac{1}{r} \Delta u \,.\, dV - \int\limits_{(F)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dF + \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) u\, dF = 0.$$

Bezeichnet aber r die Entfernung von einem innerhalb V gelegenen Festpunkt x, y, z, so kann man (10a) nicht aufrechterhalten.

Fig. 62

Daß $\Delta(1/r) = 0$ ist, kann jetzt nur behauptet werden für ein Gebiet, das aus dem ursprünglichen V durch Herausschneiden einer kleinen Kugel vom Radius ϱ mit dem Festpunkt als Zentrum entsteht. Bezeichnet man mit F weiter wie bisher nur die ursprüngliche Oberfläche von V, so muß man jetzt von der rechten Seite in (9) noch das entsprechende Integral über die Kugeloberfläche abziehen. Hier hat man, wenn u_m ein mittlerer Wert von u auf der Kugeloberfläche ist und $\partial/\partial n$ Differentiation radial auswärts bedeutet,

$$\int u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dF = -\frac{1}{\varrho^2}\int u\, dF = -\frac{1}{\varrho^2} u_m \, 4\pi \varrho^2,$$

und dieser Ausdruck geht im limes für $\varrho = 0$ in $-4\pi u(x, y, z)$ über, während der andere Bestandteil des Flächenintegrals, da der Integrand nur wie $1/\varrho$ unendlich wird, im limes Null ergibt. Das über unser V genommene Integral ist aber konvergent, da der Integrand nur wie $1/r$ unendlich wird. Man hat somit für ein x, y, z innerhalb V:

$$\text{(10b)} \quad \int\limits_{(V)} \frac{1}{r} \Delta u \,.\, dV - \int\limits_{(F)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dF + \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) u\, dF = -4\pi u(x, y, z).$$

Liegt endlich der Festpunkt x, y, z, auf den sich die Abstände r beziehen, auf der Begrenzung F von V, so hat man bei der gleichen Überlegung nur einen Teil der kleinen Kugeloberfläche, der im limes zur Halbkugel wird, in Rechnung zu stellen (Fig. 62). Demnach ergibt sich

$$\text{(10c)} \quad \int\limits_{(V)} \frac{1}{r} \Delta u \,.\, dV - \int\limits_{(F)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dF + \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) u\, dF = -2\pi u(x, y, z).$$

Die Gl. (10a bis c) bilden zusammen den Greenschen Satz für den dreidimensionalen Raum. Die Durchführung der gleichen Betrachtung

für die Ebene und das logarithmische Potential ergibt, da jetzt statt der ganzen und halben Kugeloberfläche der ganze bzw. halbe Kreisumfang zu setzen ist, überdies die Normalableitung des $\log r$ das positive Zeichen besitzt gegenüber dem negativen der von $1/r$, daß rechts in der zweiten und dritten Gleichung $2\pi u$ bzw. πu auftritt. Wir stellen die beiden Greenschen Sätze hier kurz zusammen: Im Raume:

$$(10)\quad \int\limits_{(V)} \frac{1}{r}\Delta u . dV - \int\limits_{(F)} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dF + \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) u\, dF = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb } V, \\ -2\pi u(x,y,z) & \text{am Rande,} \\ -4\pi u(x,y,z) & \text{innerhalb } V, \end{cases}$$

und in der Ebene:

$$(11)\quad \int\limits_{(F)} \log r . \Delta u\, dF - \int\limits_{(L)} \log r \frac{\partial u}{\partial n} dL + \int\limits_{(L)} \frac{\partial}{\partial n}(\log r) u\, dL = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb } F, \\ \pi u(x,y) & \text{am Rande,} \\ 2\pi u(x,y) & \text{innerhalb } F. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen werden wir jetzt Gebrauch machen, um das noch ungeklärte Verhalten der Potentialfunktionen und ihrer Ableitungen im Bereich der Belegung zu untersuchen. Dabei soll stets der dreidimensionale Fall an die Spitze gestellt, der zweidimensionale durch Analogie erschlossen werden.

4. Das Körperpotential. Das Potential einer Kugel, die mit der Massendichte 1 belegt ist, für den Mittelpunkt als Aufpunkt läßt sich sofort angeben. Ist ϱ der Kugelradius, V der Kugelinhalt, so hat man im Sinne der dritten der Definitionsgleichungen (3):

$$(12)\qquad U = \int\limits_{(V)} \frac{1}{r}\, dV = 4\pi \int\limits_0^{\varrho} \frac{1}{r} r^2\, dr = 2\pi\varrho^2 = 2\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3}.$$

Nun wird das Potential für einen festen Aufpunkt sicher nicht größer, sobald man einen Teil der Masse vom Aufpunkt fortrückt. Nur durch ein solches Fortrücken vom Mittelpunkt kann aus unserer Kugel ein anders geformter homogener Körper von gleicher Masse entstehen. Daher ist das Potential irgendeines Körpers vom Inhalt V für keinen Aufpunkt größer als die größte Dichte mal dem letzten Ausdruck rechts in (12). Bei beschränkter Dichte — die wir immer voraussetzen wollen — ist also das Körperpotential U beschränkt, trotz der Null im Nenner. Darüber hinaus folgt noch, daß es eine stetige Funktion des Ortes ist, auch wenn der Aufpunkt innerhalb der Belegung oder an ihrem Rande liegt; denn schließt man eine kleine Kugel um den Aufpunkt zunächst aus, so ist das Potential der außenliegenden Massen sicher eine stetige Funktion im Innern der Kugel und unterscheidet sich andererseits nach dem oben Gesagten bei genügend kleinen ϱ beliebig wenig von U.

Auch die ersten Ableitungen des Körperpotentials nach den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes sind beschränkt und stetig. Denn da $\partial(1/r)/\partial x$ jedenfalls einen nicht größeren absoluten Betrag hat als $1/r^2$, so folgt, zunächst für die Kugel vom Radius ϱ, dann aber allgemein auf Grund der oben dargelegten Schlußweise:

$$(12') \quad \int\limits_{(V)} \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right| dV \leqq \int\limits_{(V)} \frac{1}{r^2} dV \leqq 4\pi \int\limits_0^\varrho dr = 4\pi\varrho = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung überlegt man sich leicht, daß die ersten Ableitungen von U in der Form

$$(13) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \int\limits_{(V)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mu\, dV = -\int\limits_{(V)} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\mu\, dV = \int\limits_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3}\mu\, dV, \ldots$$

dargestellt werden dürfen und die angegebenen Eigenschaften besitzen [1]).

Für die zweiten Ableitungen von U läßt sich Beschränktheit und (teilweise) Stetigkeit ebenso zeigen, wir erhalten aber hier aus dem Greenschen Satz (10) ein viel weitergehendes Ergebnis. Sei u eine Funktion, die der Differentialgleichung $\Delta u = \mu$ in einer genügend kleinen Kugel V_1 genügt; daß es eine solche Funktion gibt, wofern wir nichts an Randbedingungen fordern, dürfen wir voraussetzen [2]). Wir betrachten nun einen beliebigen Aufpunkt im Innern, am Rande oder außerhalb der Belegung, denken uns um ihn eine kleine Kugel V_1 gelegt und wenden auf dieses V_1 die Gl. (10) an, so daß auf der rechten Seite jedenfalls der unterste der drei Ausdrücke zu nehmen ist. Das erste Integral links ist dann wegen $\Delta u = \mu$ das Potential der in V_1 liegenden Masse und sei mit U_1 bezeichnet; das zweite Integral ist das Potential U' einer Belegung $\partial u/\partial n$ auf der Kugeloberfläche, das dritte das Potential W' einer Doppelschicht von der Dichte u, so daß wir für (10) schreiben können: $U_1 - U' + W' = -4\pi u$. Nennen wir U_2 das Potential der Massen, die außerhalb V_1 liegen, so hat man

$$(14) \qquad U = U_1 + U_2 = U_2 + U' - W' - 4\pi u(x, y, z).$$

Für die drei Potentiale U_2, U', W' liegt der Punkt x, y, z außerhalb der Belegung. Wendet man daher auf (14) die Operation Δ an, so

---

[1]) Für die Einzelheiten vgl. Erh. Schmidt (Math. Abh. H. A. Schwarz gewidmet, Berlin 1914, S. 365 bis 383), dem unsere Ausführungen in vielen Punkten folgen.

[2]) Ist μ analytisch, so kann man u in Form einer Potenzreihe erhalten, für nichtanalytisches μ durch Approximation.

fallen die drei ersten Glieder rechts weg, und es bleibt wegen $\Delta u = \mu$:

$$(15) \qquad \Delta U = -4\pi\mu \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\mu.$$

Diese „Poissonsche Gleichung“ besagt in Worten: Die Summe der drei zweiten Ableitungen des Körperpotentials U ist das -4πfache der Massendichte an jeder Stelle; außerhalb der Belegung also Null, wie wir schon von **1** her wissen.

Auf die Ebene und das logarithmische Potential übertragen, liefern unsere Ableitungen die Beschränktheit und Stetigkeit (bei stetigem μ) des Flächenpotentials und seiner ersten Differentialquotienten sowie die Poissonsche Gleichung in der Form

$$(15') \qquad \Delta U = 2\pi\mu \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\pi\mu.$$

Der Faktor 2 an Stelle von -4 rührt her von dem analogen Unterschied zwischen (10) und (11)[1].

5. Potential der Doppelschicht. Wir gehen jetzt von einer kleinen Modifikation des Greenschen Satzes (10) aus, die man dadurch erhält, daß man die drei Summanden von $\Delta u/r$ in der Form zerlegt:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

und an den ersten Bestandteilen die Gaußsche Umformung von Raumintegral in Oberflächenintegral vornimmt. (Vgl. II, § 3, **3.**) Das so entstehende Flächenintegral hebt sich gerade gegen das zweite Glied links in (10) auf und so bleibt:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right] dV \\ &\qquad - \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) u \, dF = \begin{cases} 0, \\ 2\pi u(x,y,z), \\ 4\pi u(x,y,z). \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Sei nun auf einem Flächenstück F eine Doppelbelegung ν gegeben; wir nehmen an, F habe stetige Normalenrichtung und ν sei beschränkt und stetig — oder es zerfalle F in endlich viele Teile, für die das zutrifft. Ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, F sei eine offene Fläche mit einem Rand L und es lasse sich durch L eine geschlossene Fläche derart legen, daß der

---

[1]) Man erhält in (15′) das Minuszeichen und damit vollständige Übereinstimmung mit (15), wenn man $\log 1/r = -\log r$ an Stelle von $\log r$ als logarithmisches Potential einführt. Diese Zeichenfestsetzung ist in XVI angewendet.

von ihr eingeschlossene Raumteil durch F in zwei Teile V_1 und V_2 zerlegt wird. Dabei sei V_1 auf der Seite der positiven Normalenrichtung von F gelegen. Führt man in (16) für u eine stetig differenzierbare Raumfunktion ein, die längs F mit v übereinstimmt, auf der übrigen Begrenzung von V_1 aber verschwindet, so daß das zweite Integral in (16) gleich $-W$ wird, und beachtet, daß nach der Bedeutung von r im ersten Glied von (16) $\partial r/\partial \xi = -\partial r/\partial x$ gesetzt werden darf, so liefert (16) auf V_1 angewendet:

$$(17)\quad \begin{cases} W(x,y,z) = \int\limits_{(V_1)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right] dV \\ \qquad\qquad + \begin{cases} 0, \\ 2\pi u(x,y,z), \\ 4\pi u(x,y,z). \end{cases} \end{cases}$$

Das Volumintegral rechts ist als erste Ableitung eines Körperpotentials nach 4 eine stetige Funktion des Ortes. Für das zweite Glied rechts ist der erste, zweite oder dritte Ausdruck zu nehmen, je nachdem der Aufpunkt in V_1, auf F, oder außerhalb von V_1 liegt. Geht man durch die Belegungsschicht F hindurch, so ändert sich der Wert von W um $4\pi v$, während beim Durchgang durch die übrige Begrenzung von V_1 der Sprung Null wird, da hier für u Null zu setzen ist. Wir erhalten so den wichtigen Satz: D a s P o t e n t i a l W e i n e r D o p p e l s c h i c h t e r f ä h r t b e i m D u r c h g a n g d u r c h d i e B e l e g u n g s f l ä c h e i n d e r p o s i t i v e n N o r m a l e n r i c h t u n g e i n e n s p r u n g h a f t e n Z u w a c h s u m d a s 4π f a c h e d e r B e l e g u n g s d i c h t e, d. h. die Grenzwerte von W zu beiden Seiten der Fläche sind um $4\pi v$ voneinander verschieden; a u f d e r B e l e g u n g s f l ä c h e s e l b s t h a t W d e n W e r t d e s a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l s, in Zeichen:

$$(18)\quad W_{+s} = W + 2\pi v, \quad W_{-s} = W - 2\pi v, \quad W_{+s} - W_{-s} = 4\pi v.$$

Um zu erkennen, wie es sich mit den Ableitungen von W verhält, unterwerfen wir u noch der Bedingung, daß seine Normalableitung auf der Begrenzung von V_1 verschwindet. Gl. (10), in der das zweite Glied Null, das dritte gleich $-W$ wird, liefert W als Körperpotential von der Belegung Δu mit den Zusatzgliedern 0, $2\pi u$, $4\pi u$. Da die ersten Ableitungen des Körperpotentials stetig sind, können daher in den ersten Ableitungen von W keine Unstetigkeiten zutage treten, als die durch die Zusatzglieder bedingten, also: D i e e r s t e A b l e i t u n g v o n W i n d e r R i c h t u n g d e r F l ä c h e n n o r m a l e n b l e i b t s t e t i g, d i e t a n g e n t i a l e n A b l e i t u n g e n s p r i n g e n u m d a s 4π f a c h e (bzw. zweimal um das 2π fache) d e r e n t s p r e c h e n d e n A b l e i t u n g v o n v.

Auf die Ebene und das logarithmische Potential übertragen, liefern diese Sätze die Ergebnisse, die in dem Beispiel XI, § 1, **4** schon zum Teil in anderer Weise abgeleitet und benutzt wurden. Das logarithmische Potential der Doppelbelegung erfährt beim Durchgang durch die Belegungslinie einen Abfall von der Größe $2\pi\nu$ und hat auf der Linie selbst das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte zum Wert; die Normalableitung bleibt stetig, die Tangentialableitung springt um das -2πfache der Ableitung von ν.

6. Potential der einfachen Flächenbelegung. Das Potential der einfachen Flächenbelegung zeigt ein in gewissem Sinne umgekehrtes Verhalten wie das der Doppelschicht: Es bleibt beim Durchgang durch die Belegungsfläche stetig, während seine Normalableitung einen Sprung aufweist. Um die Stetigkeit zu erkennen, gehen wir so vor, wie in **4** beim Körperpotential. Man muß sich nur davon überzeugen, daß das Potential, das von der Belegung eines kleinen Flächenstückes F herrührt, für einen beliebigen Aufpunkt gleichmäßig mit F gegen Null geht. Nun kann man ein genügend kleines Flächenstück stets als ebene Scheibe auffassen, und für eine solche wird das Potential am größten, wenn der Aufpunkt in der Ebene liegt und die ganze Masse möglichst nahe um ihn angeordnet ist. Rechnen wir also das Potential einer homogenen Belegung von der Dichte 1 auf einer Kreisscheibe, für den Mittelpunkt als Aufpunkt:

$$U = \int\limits_{(F)} \frac{1}{r}\, dF = 2\pi \int\limits_0^{\varrho} \frac{1}{r}\, r\, dr = 2\pi\varrho = 2\pi\sqrt{\frac{F}{\pi}}, \tag{19}$$

so haben wir damit den Wert, der, mit dem Maximum der Dichte multipliziert, den Größtwert des (Newtonschen) Potentials einer ebenen Belegung auf der Belegungsfläche F liefert. In gleicher Weise wie in **4** schließt man jetzt auf die Stetigkeit und Beschränktheit von U für eine ebene Belegung. Für eine beliebige Flächenbelegung folgt daraus die Stetigkeit nach dem oben Gesagten, und auch die Beschränktheit ist leicht einzusehen, vorausgesetzt natürlich, daß die gegebene Massendichte stetig und beschränkt ist.

Der Sprung in der ersten Ableitung ergibt sich sofort für die Belegung auf einer Ebene, die etwa senkrecht zur x-Achse stehen mag. Dann hat man

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \mu\, dF = -\int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \mu\, dF = -\int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \mu\, dF.$$

Rechts steht das Potential einer (ebenen) Doppelschicht, das den Sprung $-4\pi\mu$, genauer zweimal den Sprung $-2\pi\mu$, beim Durchgang durch die Fläche aufweist. Handelt es sich um die Belegung auf einer beliebigen krummen Fläche, so kommen natürlich Unstetigkeiten auch nur in Punkten der Belegung in Frage. Hat man einen solchen Punkt und legt um ihn eine kleine Kugel, so können Massenverschiebungen außerhalb der Kugel an den Stetigkeitsverhältnissen des Potentials im Innern der Kugel nichts ändern. Das Flächenstück, das im Innern der Kugel liegt, verhält sich aber im limes wie eine ebene Scheibe. So erhalten wir den Satz: Beim Durchgang durch die Belegungsfläche in der positiven Normalenrichtung erfährt das Potential der einfachen Flächenbelegung in seiner Ableitung nach der Normalenrichtung einen sprunghaften Abfall von der Größe 4π mal der Massendichte im Durchgangspunkt, während die Ableitungen in den tangentialen Richtungen (wie der Potentialwert selbst) stetig bleiben. Für die Ableitungen der x, y, z-Richtung ergeben sich daraus die Sprunggrößen $-4\pi\mu\cos(n, x)$, $-4\pi\mu\cos(n, y)$ und $-4\pi\mu\cos(n, z)$. Der Wert auf der Fläche selbst ist das arithmetische Mittel aus dem äußeren und inneren Grenzwert.

Die Übertragung auf das logarithmische Potential besagt: Beim Durchgang durch die mit Masse belegte Randlinie in der Richtung der positiven Normalen erfährt das logarithmische Potential, während sein Wert stetig bleibt, in der Normalableitung einen Sprung von der Größe $+2\pi\mu$, bzw. zweimal den Sprung $+\pi\mu$; die tangentiale Ableitung bleibt stetig, die Ableitungen in der x- und y-Richtung ändern sich um $+2\pi\cos(n, x)$, $+2\pi\cos(n, y)$.

§ 2. Potentiale von Linien, Flächen und Körpern

1. Kreis, Kugelfläche und Kugel. Das Newtonsche Potential einer gleichförmig mit der Masse $m = 2R\mu\pi$ belegten Kreislinie für einen Aufpunkt, der auf der Kreisachse im Abstand z vom Mittelpunkt liegt, ist offenbar $m:\sqrt{R^2+z^2}$, für den Mittelpunkt $z = 0$ als Aufpunkt insbesondere $m:R = 2\mu\pi$. Ist die Masse m auf der Oberfläche einer Vollkugel vom Halbmesser R gleichförmig ausgebreitet und μ die zugehörige Massendichte, also $m = 4R^2\mu\pi$, so denkt man sich die Fläche in schmale ringförmige Zonen zerlegt durch Schnitte, die senkrecht stehen auf der Verbindungslinie des Aufpunktes A mit dem Kugelmittelpunkt O (Fig. 63). Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen OA und dem nach einem Punkt der kreis-

ringförmigen Zone gehenden Halbstrahl von O, so ist $R \sin \vartheta$ der Halbmesser des Kreisringes und $|R \cos \vartheta - a|$ (mit $a = \overline{OA}$) der Abstand des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Ringes. Demnach hat man, da auf den Ring die Masse $\mu R d\vartheta . 2 R \pi \sin \vartheta$ entfällt,

$$(1) \qquad U = 2\pi\mu R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \vartheta + (R \cos \vartheta - a)^2}}.$$

Setzt man r für den Nenner des Integranden (der die Entfernung zwischen A und einem Punkt der Ringzone mißt), so folgt aus $r^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta$ durch Differentiation $r\,dr = aR \sin \vartheta \, d\vartheta$, so daß (1) übergeht in

Fig. 63

$$(1') \qquad U = 2\pi\mu \frac{R}{a} \int dr,$$

wobei die Grenzen sich verschieden bestimmen, je nachdem A innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt. Im ersten Falle durchläuft r, während ϑ von 0 bis π zunimmt, monoton wachsend die Werte von $R - a$ bis $R + a$, das Integral in (1') hat also den Wert $2a$; im zweiten Falle, $a > R$, beginnt r mit dem Wert $a - R$ und wächst monoton bis $a + R$, das Integral wird also gleich $2R$. Beachten wir den Faktor vor dem Integralzeichen in (1'), so finden wir: Das Potential einer gleichförmig mit der Masse $m = 4R^2\mu\pi$ belegten Kugeloberfläche ist für einen Punkt im Innern der Kugel konstant gleich $4\pi\mu R = m : R$, für einen Punkt außerhalb der Kugel veränderlich mit seinem Abstand a vom Mittelpunkt gleich $4\pi\mu R^2 : a = m : a$. Da die Anziehungskraft durch den Gradienten des Potentials gemessen wird, kann man dies Ergebnis auch so ausdrücken: Die Kraftwirkung einer homogenen Kugeloberfläche ist auf einen Punkt im Innern Null, auf einen Außenpunkt so groß, wie wenn die Gesamtmasse der Kugelfläche im Mittelpunkt vereinigt wäre. Man überzeugt sich leicht von dem Bestehen der allgemeinen, in § 1, **6** dargelegten Eigenschaften des Flächenpotentials in unserem Falle: U selbst bleibt beim Durchgang durch die Fläche stetig, die Ableitung nach der äußeren Normalen springt von Null auf den Wert $-m : a^2 = -m : R^2 = -4\mu\pi$.

Hat man das Potential einer räumlichen Belegung zu berechnen, bei der die Dichte μ allein Funktion des Abstandes r

von einem Festpunkt O ist, so denkt man sich den Raum in dünne Kugelschalen mit den Massenelementen $4r^2\mu\pi\,dr$ zerlegt. Auf einen Punkt im Abstand a von O wirken die Kugelschalen, für die $r < a$ ist, so, als ob ihre Masse insgesamt in O läge, die übrigen liefern Beiträge zum Potential gleich der jeweils durch den Radius dividierten Masse:

$$U = \frac{4\pi}{a}\int_0^a \mu r^2\,dr + 4\pi\int_a^\infty \mu r\,dr. \tag{2}$$

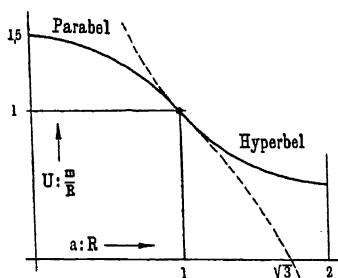
Ist die Masse m gleichförmig über das Innere der Kugel vom Radius R verteilt, also $\mu =$ konst für $0 \leqq r \leqq R$, $\mu = 0$ für $r > R$, so erhält man aus (2) das Potential einer homogenen Kugel:

$$\tag{3} \begin{cases} \text{für } a \geqq R\colon\; U = \dfrac{4\pi\mu}{a}\displaystyle\int_0^R r^2\,dr = \dfrac{4\pi\mu R^3}{3a} = \dfrac{m}{a}, \\ \text{für } a \leqq R\colon\; U = \dfrac{4\pi\mu}{a}\displaystyle\int_0^a r^2\,dr + 4\pi\mu\int_a^R r\,dr \\ \qquad = 2\pi\mu\left(R^2 - \dfrac{a^2}{3}\right) = \dfrac{3m}{2R}\left(1 - \dfrac{a^2}{3R^2}\right). \end{cases}$$

Fig. 64 zeigt U als Funktion von a/R in Vielfachen von m/R. Man sieht, daß die Linie, die sich aus einem Hyperbelast für $a/R > 1$ und einer Parabel für $a/R < 1$ zusammensetzt, stetig und mit stetiger Tangente verläuft. Auch bestätigt man leicht an (3) die Poissonsche Gleichung [(15) in § 1], bzw. die Laplacesche; denn $1/a$ ist die reziproke Entfernung von einem Festpunkt, daher $\Delta(m/a) = m\Delta(1/a) = 0$, andererseits liefert zweimalige Differentiation des zweiten Ausdrucks (3):

Fig. 64

$$-\frac{m}{2R^3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{3m}{R^3} = -4\pi\mu.$$

Wenn eine von zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien R_1 und R_2, $R_1 < R_2$, begrenzte Kugelschale gleichförmig mit Masse von der Dichte μ erfüllt ist, hat man drei Raumteile zu unterscheiden: den Hohlraum im Innern der Schale $a < R_1$, den schalenförmigen Raum $R_1 < a < R_2$, endlich den Außenraum $a > R_2$. Man erhält die

drei Ausdrücke für das Potential, indem man die nach (3) gebildeten entsprechend voneinander subtrahiert und dabei beachtet, daß der Hohlraum für beide Kugeln ein innerer, die Schale für die kleinere Kugel ein äußerer, für die größere ein innerer Raum, endlich der Raum außerhalb der Schale für beide Kugeln Außenraum ist. So findet man:

$$(4)\quad \begin{cases} U = 2\pi\mu(R_2^2 - R_1^2) & \text{für } a \leqq R_1, \\ U = \dfrac{4\pi\mu}{3a}(R_2^3 - R_1^3) & \text{für } a \geqq R_2, \\ U = 2\pi\mu R_2^2 - \dfrac{2\pi\mu}{3}a^2 - \dfrac{4\pi\mu}{3}\dfrac{R_1^3}{a} & \text{für } R_1 \leqq a \leqq R_2. \end{cases}$$

Lassen wir hier $R_2 - R_1$ unendlich klein werden, indem R_1 und R_2 gegen R gehen, und μ so anwachsen, daß das Produkt $\mu(R_2 - R_1)$ konstant bleibt oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß $4\pi\mu(R_2^3 - R_1^3)/3 = m$ unverändert erhalten wird, so geht der erste Ausdruck (4) in $U = m/R$, der zweite in $U = m/a$ über, wie es dem oben ausgesprochenen Satz über das Potential einer Kugeloberfläche entspricht. Aus diesem kann man nun auch das Potential einer Doppelbelegung auf der Kugeloberfläche gewinnen, indem man zwei konzentrische Kugeln mit den Radien R_1 und R_2 betrachtet, auf denen die Masse m bzw. $-m$ gleichförmig ausgebreitet ist. Im Außenraum der Schale ist das Potential $m/a - m/a = 0$ in jedem Punkt. Im inneren Hohlraum hat man $U = m/R_1 - m/R_2 = m(R_2 - R_1)/R_1 R_2$. Läßt man die Schale unendlich dünn werden und m dabei so wachsen, daß das Produkt $m(R_2 - R_1)$ konstant bleibt, so erhält man für U im Innern einen konstanten, von Null verschiedenen Wert, im Außenraum den Wert Null. Der in § 1, 1 gegebenen Definition der Belegungsdichte ν einer Doppelbelegung entspricht es, wenn wir

$$(5')\qquad -\frac{m}{4R^2\pi}(R_2 - R_1) = \nu$$

setzen. Damit geht der Ausdruck für das Potential der Doppelbelegung auf einer Kugeloberfläche über in

$$(5)\qquad U = -4\pi\nu \text{ im Innern, } U = 0 \text{ im Äußern.}$$

2. Bestimmung des Potentials durch seine charakteristischen Eigenschaften. Die Berechnung des Potentials einer gegebenen Massenverteilung auf Grund der ursprünglichen Definition durch ein bestimmtes Integral ist oft nur in sehr mühsamer Weise gelungen. Bei manchen Aufgaben mußte man fernerliegende Hilfsmittel, die

Entwicklung nach Kugelfunktionen, die Definition des Potentials durch ein Randwertproblem usf., heranziehen. In beiden Fällen entsteht das Bedürfnis nach einem Verfahren, das wenigstens hinterher ein schon gefundenes Resultat auf einfache Weise zu verifizieren gestattet, d. h. festzustellen lehrt, ob eine bestimmte Funktion U wirklich das Potential einer bestimmten Massenverteilung ist oder nicht. Diesem Zwecke dient, zunächst für das Newtonsche Körperpotential, der folgende von Dirichlet herrührende Satz:

Das Potential einer durch ihre Raumdichte μ gegebenen Verteilung ist eindeutig bestimmt als jene im ganzen Raum samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktion U, für die $\Delta U = -4\pi\mu$ gilt und die sich im Unendlichen derart verhält, daß dort $U = 0$ wird und die ersten Ableitungen von U nicht schwächer als mit der zweiten Potenz der reziproken Entfernung verschwinden. Dabei ist an Stellen ohne Belegung $\mu = 0$.

Um den Satz zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe zwei Funktionen U und U', die diesen Bedingungen genügen. Dann ist auch die Differenz $u = U - U'$ stetig differenzierbar, überdies ist $\Delta u \equiv 0$ und im Unendlichen $u = 0$ und $\lim R^2 \frac{\partial u}{\partial n}$ endlich, wobei ∂n irgendeine Differentiationsrichtung andeutet. Wir wenden nun auf u den Greenschen Satz in der Form der Gl. (10b) von § 1 an, wobei als Integrationsraum V eine um den Punkt x, y, z beschriebene Kugel vom Radius R dienen mag. Wegen $\Delta u = 0$ erhalten wir:

$$(6) \qquad -4\pi u(x,y,z) = -\frac{1}{R}\int\limits_{(\omega)} \frac{\partial u}{\partial n} R^2 d\omega - \frac{1}{R^2}\int\limits_{(\omega)} u R^2 d\omega,$$

wenn $d\omega$ das einem Flächenelement dF entsprechende (durch die gleichen Strahlen ausgeschnittene) Element der Einheitskugel bezeichnet. Läßt man R größer und größer werden, so geht nach den Voraussetzungen über das Verhalten von u im Unendlichen jeder der beiden Ausdrücke rechts gegen Null und man erhält $u(x, y, z) = 0$ für einen ganz beliebig gewählten Punkt x, y, z. Also müssen U und U' zusammenfallen.

Ganz analoge Sätze lassen sich für das Potential einfacher oder doppelter Flächenbelegungen aussprechen. Das Potential einer einfachen Belegung mit der Dichte μ (einer Doppelbelegung mit der Dichte ν) auf der Fläche S ist eindeutig bestimmt als jene außerhalb S der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügende Funktion U, die überall außerhalb S samt ihren ersten Ableitungen stetig ist, hier aber nur in ihrer Normal-

ableitung einen Sprung von der Größe $4\pi\mu$ (nur in ihrem Wert einen Sprung von der Größe $4\pi\nu$) aufweist und im Unendlichen den oben genannten Bedingungen genügt. Zum Beweis geht man ebenso vor wie früher, nur muß man bei Anwendung des Greenschen Satzes auf die Differenz u zweier supponierter Lösungen U, U' beachten, daß die Unstetigkeitsfläche S, für deren Punkte ja $\Delta u = 0$ nicht behauptet werden kann, durch eine entsprechende Hüllfläche S' aus dem Integrationsgebiet auszuschließen ist. Dafür sind dann die beiden Oberflächenintegrale über S' zu erstrecken. Läßt man S' näher und näher an die beiden Seiten der Belegungsfläche heranrücken, so geht das über S' genommene Integral von $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}$ allmählich über in das längs S zu erstreckende Integral von $1/r$ mal der Differenz der $\partial u/\partial n$-Werte zu beiden Seiten von S. Da aber — bei der einfachen Belegung — der Ableitungssprung sowohl für U wie für U' gleich $4\pi\mu$ ist, ist er für $u = U - U'$ Null, und das gleiche gilt hinsichtlich des zweiten Integrals im Falle der Doppelbelegung. Die anderen Bestandteile der Integrale rechts in (6) verschwinden infolge der Bedingungen im Unendlichen, so daß wieder u identisch Null wird.

Bei der Übertragung dieser Überlegungen auf das logarithmische Potential muß man beachten, daß $\log r$ sich im Unendlichen ganz anders verhält als $1/r$. Das Resultat, das wir ohne Beweis angeben, lautet[1]: Eine Funktion $U(x, y)$ ist sicher dann das logarithmische Potential einer gegebenen ebenen Belegung, wenn der Wert von ΔU und die Größe der Sprünge im Wert oder in der Normalableitung von U überall den betreffenden Belegungsdichten entspricht und wenn im Unendlichen

$$\lim_{R=\infty}\left(U - R\log R\frac{\partial U}{\partial R}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left|R\frac{\partial U}{\partial n}\right| < K$$

wird, wobei K eine beliebige Konstante und ∂n die Differentiation nach beliebiger Richtung bezeichnet.

Die vorstehenden Überlegungen liefern auch die Antwort auf die zu Beginn von § 1 aufgeworfene Frage, ob eine beliebige Funktion U als Potential einer passend gewählten Belegung angesehen werden kann. Man sieht, daß die Frage jedenfalls zu bejahen ist für solche Funktionen, die im Unendlichen den oben näher aus-

[1] W. Sternberg, Mathem. Zeitschr. **19** (1923), S. 145.

geführten Bedingungen genügen, überall höchstens mit Ausnahme einzelner Flächenstücke zweimal differenzierbar sind und auf diesen Flächenstücken nur Sprünge im Funktionswert oder in der Normalableitung aufweisen.

3. Potential der Influenzladung auf einer Kugel. Wir wenden die eben abgeleiteten Sätze auf folgenden in der Elektrostatik wichtigen Fall an. Es handle sich zunächst um die Flächenbelegung auf einer Kugeloberfläche, bei der die Belegungsdichte umgekehrt proportional ist der dritten Potenz der Entfernung des betreffenden Kugelpunktes von einem außerhalb der Kugel gelegenen Festpunkt A (Fig. 65). Zu beweisen ist, daß das Potential im Innern der Kugel gleich dem einer in A konzentrierten Masse m ist, im Außenraum gleich dem Potential einer anderen Masse m' in einem Punkte A', wobei A' auf der Zentrallinie OA so liegt, daß $\overline{OA}.\overline{OA'}$ das Quadrat des Kugelradius R^2 und $m' = mR/\overline{OA}$. Bezeichnet r den Abstand eines veränderlichen Punktes von A, r' den Abstand von A', a die Entfernung $\overline{OA}$, so soll aus $\mu = k/r^3$ folgen:

Fig. 65

$$(7)\quad U = \frac{m}{r} = \frac{4kR\pi}{r(a^2-R^2)} \text{ im Innern, } U = \frac{m'}{r'} = \frac{4kR^2\pi}{r'a(a^2-R^2)} \text{ im Außenraum.}$$

Vor allem erkennt man, daß die durch (7) gegebene Funktion U stetig ist, da die Punkte der Kugelfläche in bekannter Weise durch die Bedingung $r:r' = a:R = m:m'$ definiert werden. Ferner ist U überall außer in den Punkten der Kugeloberfläche zweimal differenzierbar und genügt überall der Bedingung $\Delta U = 0$, da m/r wie m'/r' einfache Potentiale sind. Im Unendlichen ist $m'/r' = 0$ und der Gradient hat die Größe m'/r'^2, verschwindet also wie die zweite Potenz der reziproken Entfernung. Jetzt bleibt nur noch der Nachweis, daß der Ableitungssprung auf der Kugeloberfläche den richtigen Wert hat. Ist P ein Punkt der Kugelfläche, so folgt aus dem Dreieck OPA, daß der Winkel zwischen OP und AP den Cosinus $(r^2 + R^2 - a^2):2rR$ hat; die Normalableitung im Innenraum ist aber gleich dem Gradienten von m/r mal diesem Cosinus, da OP die Flächennormale ist, also

$$(8')\qquad \frac{\partial U}{\partial n_i} = -\frac{r^2 + R^2 - a^2}{2rR}\,\frac{m}{r^2}.$$

Ersetzt man hier r durch $r' = rR/a$, a durch $a' = R^2/a$, endlich m durch $m' = mR/a$, so erhält man den Wert der Normalableitung im Außenraum, und zwar findet sich nach einfacher Umformung

$$(8'') \qquad \frac{\partial U}{\partial n_a} = -\frac{r'^2 + R^2 - a'^2}{2r'R}\frac{m'}{r'^2} = -\frac{r^2 + a^2 - R^2}{2rR}\frac{m}{r^2}.$$

Demnach ist der Sprung der Ableitung in der Tat

$$(8) \qquad \frac{\partial U}{\partial n_a} - \frac{\partial U}{\partial n_i} = \frac{R^2 - a^2}{r^3 R} m = -\frac{4k\pi}{r^3} = -4\pi\mu,$$

wie es der angenommenen Verteilung entspricht.

Fügt man der auf der Kugelfläche verteilten Masse, deren Gesamtgröße übrigens (wegen $r\,dr = aR\sin\vartheta\,d\vartheta$, wenn ϑ den Winkel *POA* bedeutet)

$$(9) \qquad 2\pi k R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{r^3} = 2\pi k \frac{R}{a}\int_{a-R}^{a+R} \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi k R^2}{a(a^2 - R^2)} = m'$$

ist, eine in A konzentrierte Masse (oder elektrische Ladung) von der Größe $-m$ hinzu, so wird das Potential im Innenraum der Kugel identisch Null. In der Elektrostatik tritt uns diese Aufgabe in folgender Gestalt entgegen: Man hat eine Punktladung $-m$ im Abstand a vom Kugelmittelpunkt und fragt nach der Elektrizitätsverteilung, die sich auf der nach der Erde abgeleiteten Kugel im Gleichgewicht erhält. Bedingung für das Gleichgewicht ist hierbei, daß das Potential im ganzen Innern der Kugel Null ist. Um die Frage zu beantworten, muß man nur wissen, daß die Ladung $-m$ in A zusammen mit einer geeignet gewählten Ladung m' in A' die Kugelfläche zur Äquipotentialfläche hat. Daraus folgt schon, daß im Gleichgewichtszustand das Potentialfeld im Außenraum der Kugel das durch die beiden Punktladungen $-m$ in A und m' in A' erzeugte ist, daß also dort U gleich der Differenz der beiden Ausdrücke (7) wird. Da zugleich im Innenraum $U = 0$ ist, so erhält man wieder den Ableitungssprung (8) und hat daraus auf das Verteilungsgesetz $\mu = k/r^3$ zu schließen, d. h. die gesuchte Ladungsdichte im Gleichgewicht ist der dritten Potenz des Abstandes von der Punktladung umgekehrt proportional. Durch direkte Rechnung, d. h. ohne Benutzung der in 2 abgeleiteten Sätze, kann man zu diesem Ergebnis, etwa unter Verwendung der Kugelfunktionen, nur auf mühsame Weise gelangen [1]).

---

[1]) Vgl. z. B. F. Neumann, Vorlesung über die Theorie des Potentials. Herausgeg. von C. Neumann (Leipzig 1887), S. 177 ff.

4. Potential des homogenen Ellipsoids. Das dreifache Integral, das das Potential eines gleichförmig mit Masse erfüllten Ellipsoids ausdrückt, läßt sich als einfaches elliptisches Integral darstellen. Wir folgen dem Gedankengang von Dirichlet, indem wir das Ergebnis auf Grund der Sätze von 2 verifizieren. Sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{10}$$

die Gleichung des mit Masse belegten Ellipsoids. Dann stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1, \tag{11}$$

wenn wir den Parameter s von Null bis ∞ laufen lassen, eine Schar von Ellipsoiden dar, von denen jedes folgende die früheren umschließt. Durch jeden Raumpunkt außerhalb (10) geht ein und nur ein Ellipsoid der Schar, es wird also durch (11) jedem solchen Punkt eindeutig eine positive Zahl s, sein „elliptischer" Parameter zugeordnet. Die gesuchte Potentialfunktion gestattet nun, wie wir beweisen wollen, folgende Darstellung: Es ist im Innern des Ellipsoids:

$$U_i=\mu abc\pi\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2}{b^2+t}-\frac{z^2}{c^2+t}\right)\frac{dt}{T(t)} \tag{12a}$$

und im Außenraum, wo also jedem x, y, z ein positives s nach (11) zugehört,

$$U_a=\mu abc\pi\int_s^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2}{b^2+t}-\frac{z^2}{c^2+t}\right)\frac{dt}{T(t)}, \tag{12b}$$

wobei in beiden Fällen

$$T(t)=\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)} \tag{12'}$$

zu setzen ist. Die durch (12) definierte Funktion U ist gewiß stetig, da die Oberflächenpunkte des Ellipsoids durch $s=0$ gekennzeichnet sind. Dasselbe gilt für alle ersten Ableitungen, von denen wir die nach x hierhersetzen:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x}=-2\mu abc\pi\int_0^\infty\frac{x\,dt}{(a^2+t)T},\quad \frac{\partial U_a}{\partial x}=-2\mu abc\pi\int_s^\infty\frac{x\,dt}{(a^2+t)T}. \tag{13}$$

Wenn in (12b) die Integrationsvariable t von s bis ∞ läuft, wächst der Klammerausdruck des Integranden von 0 bis 1, so daß

$$U_a<\mu abc\pi\int_s^\infty\frac{dt}{T}<\mu abc\pi\int_s^\infty\frac{dt}{(a^2+t)^{3/2}}=\frac{2\mu abc\pi}{\sqrt{a^2+s}}, \tag{14}$$

wobei a die kleinste der drei Halbachsenlängen bezeichnet. Die Entfernung des Aufpunktes x, y, z vom Ellipsoidmittelpunkt liegt nach (11) zwischen $\sqrt{a^2+s}$ und $\sqrt{c^2+s}$, wenn a die kleinste, c die größte Halbachsenlänge ist (da x, y, z ein Punkt des Ellipsoids mit den Halbachsen $\sqrt{a^2+s}$ usw. ist). Daraus folgt, daß die Ausdrücke a^2+s, b^2+s, c^2+s mit dem Quadrat der Entfernung $x^2+y^2+z^2$ von gleicher Ordnung unendlich werden. Die Abschätzung (14) zeigt daher, daß U im Unendlichen verschwindet, und das gleiche Verfahren, angewandt auf die zweite Gl. (13), liefert

$$(14') \qquad \left|\frac{\partial U_a}{\partial x}\right| < 2\mu abc\pi x \int_s^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^{5/2}} = \frac{4\mu abc\pi x}{3(a^2+s)^{3/2}},$$

woraus hervorgeht, daß die erste Ableitung von U nach x (und ebenso nach den beiden anderen Koordinaten) wie die dritte Potenz der Entfernung Null wird. Den Bedingungen im Unendlichen wird also durch (12b) Genüge getan.

Differenziert man den ersten Ausdruck (13) noch einmal nach x und fügt die analog gebildeten zweiten Ableitungen nach y und z hinzu, so erhält man, da $T(0) = abc$ ist:

$$(15) \qquad \Delta U_i = -2\mu abc\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2+t} + \frac{1}{b^2+t} + \frac{1}{c^2+t}\right)\frac{dt}{T(t)}$$

$$= -4\mu abc\pi \int_{T(0)}^\infty \frac{dT}{T^2} = -4\mu\pi \frac{abc}{T(0)} = -4\mu\pi.$$

Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, daß $\Delta U_a = 0$ ist. Wenn man zu diesem Zweck die zweite Gl. (13) differenziert, so muß man beachten, daß hier auch die untere Integrationsgrenze variabel ist[1]). Die drei Ausdrücke, die von der Differentiation unter dem Integralzeichen herrühren, liefern analog (15) zu ΔU_a den Beitrag

$$(16') \qquad -4\mu abc\pi \int_{T(s)}^\infty \frac{dT}{T^2} = -\frac{4\mu abc\pi}{T(s)}.$$

Dazu kommt von der Differentiation nach der unteren Grenze der Beitrag

$$(16'') \qquad \frac{2\mu abc\pi}{T(s)}\left(\frac{x}{a^2+s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{b^2+s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{z}{c^2+s}\frac{\partial s}{\partial z}\right).$$

[1]) In der Formel (13) verschwindet das so entstehende Glied.

Daß der Klammerausdruck hier den konstanten Wert 2 besitzt, sieht man ein, wenn man in (11), das ja s als Funktion von x, y, z definiert, die partiellen Ableitungen bildet, z. B.

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2x}{a^2+s} : \left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2} + \frac{y^2}{(b^2+s)^2} + \frac{z^2}{(c^2+s)^2}\right].$$

Multipliziert man dies mit $x:(a^2+s)$ und addiert die beiden analog gebildeten Ausdrücke für die x- und y-Richtung, so erhält man in der Tat den Wert 2, somit aus (16′) und (16″) das Ergebnis $\Delta U_a = 0$. Damit sind alle charakteristischen Eigenschaften für (12) nachgewiesen. Über die praktische Berechnung derartiger elliptischer Integrale vgl. III, § 5.

5. Ellipsoidische Schale. Es sei jetzt nur der Raum zwischen dem Ellipsoid (10) und einem ihm ähnlichen und ähnlich gelegenen mit den Halbachsenquadraten $a'^2 = a^2(1+\delta)$, $b'^2 = b^2(1+\delta)$, $c'^2 = c^2(1+\delta)$ gleichförmig mit Masse belegt. Das Potential im Innern der Schale nennen wir jetzt U_1, das im Außenraum U_2, ferner bezeichnen wir mit U'_i und U'_a die für das äußere Ellipsoid gebildeten Ausdrücke (12a) und (12b). Dann gilt, positives δ vorausgesetzt,

$$(17) \qquad U_1 = U'_i - U_i, \quad U_2 = U'_a - U_a.$$

Nennt man T' die Funktion, die aus T hervorgeht, wenn man in (12′) $a^2(1+\delta)$ usw. an Stelle von a^2 usw. einsetzt, und führt man einen neuen Parameter t' durch $t = (1+\delta)t'$ ein, so wird $T'(t) = (1+\delta)^{3/2}\,T(t')$, und demgemäß wird aus (12a):

$$(18\text{a}) \qquad U'_i = \mu abc\pi \int_0^\infty \left(1+\delta - \frac{x^2}{a^2+t'} - \frac{y^2}{b^2+t'} - \frac{z^2}{c^2+t'}\right)\frac{dt'}{T(t')}.$$

Die erste der Gl. (17) liefert daher

$$(19\text{a}) \qquad U_1 = \mu abc\pi\delta \int_0^\infty \frac{dt}{T(t)}.$$

Das Potential im Innenraum der Schale ist mithin für alle Punkte gleich und proportional dem Maß δ der Schalendicke.

Durch die gleiche Umformung erhält man entsprechend (12b) den Wert des Außenpotentials des größeren Ellipsoids zu

$$(18\text{b}) \qquad U'_a = \mu abc\pi \int_{s'}^\infty \left(1+\delta - \frac{x^2}{a^2+t'} - \frac{y^2}{b^2+t'} - \frac{z^2}{c^2+t'}\right)\frac{dt'}{T(t')},$$

wobei s' die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+s'}+\frac{y^2}{b^2+s'}+\frac{z^2}{c^2+s'}=1+\delta \tag{20}$$

bezeichnet. Demnach liefert die zweite der Beziehungen (17):

$$U_2=\mu abc\pi\delta\int_{s'}^{\infty}\frac{dt}{T(t)}+\mu abc\pi\int_{s'}^{s}\left(1-\frac{x^2}{a^2+t}-\cdots\right)\frac{dt}{T(t)}. \tag{19b}$$

Von Interesse ist der Grenzübergang zu einer **sehr dünnen Schale** unter Anwachsen der Raumdichte bei Konstantbleiben der Gesamtmasse. Die zwischen den Ellipsoidflächen eingeschlossene Masse ist

$$m=\frac{4}{3}\mu abc\pi[(1+\delta)^{3/2}-1]\sim 2\mu abc\pi\delta, \tag{21}$$

man muß also beim Grenzübergang das Produkt $\mu\delta$ konstant halten. Nun wird das zweite Integral in (19b) von zweiter Ordnung in δ klein, weil sowohl das Integrationsintervall wie der Integrand [dies wegen (11)] mit δ gegen Null geht. Daher reduziert sich der Ausdruck für U_2 auf den ersten, dem U_1 analogen Bestandteil, und man hat für die sehr dünne Schale, unter Einführung von m aus (21):

$$U_1=\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{T(t)},\qquad U_2=\frac{m}{2}\int_s^{\infty}\frac{dt}{T(t)}. \tag{22}$$

Diese Ausdrücke können auch als Potential einer auf dem Ellipsoid (10) flächenhaft verteilten Masse von der Gesamtgröße m aufgefaßt werden, gelten aber keineswegs für eine Belegung mit konstanter Flächendichte. Sie entsprechen vielmehr einer Belegungsdichte, die der veränderlichen Stärke der Schale, das ist dem jeweiligen Abstand der beiden ähnlichen Ellipsoide direkt oder dem Gradienten der linken Seite von (10) verkehrt proportional ist. Der Flächenabstand an der Stelle x, y, z rechnet sich für kleines δ als der reziproke Wert des Gradienten zu

$$\delta : 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}, \tag{23}$$

und die Flächendichte ist das μ-fache dieses Wertes.

§ 3. Die Randwertprobleme der Potentialtheorie

1. Problemstellung. In den beiden vorangehenden Paragraphen ist es wiederholt zutage getreten, in welch engem Zusammenhang die Definitionen des Newtonschen und des logarithmischen Potentials mit den Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ oder

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

stehen. Kurz gesprochen besteht dieser Zusammenhang darin, daß jedes Potential, als Funktion des Aufpunktes betrachtet, außerhalb der Belegung die Bedingung $\Delta u = 0$ erfüllt. Es zeigt sich nun, daß die in § 1 dargelegten Unstetigkeitseigenschaften der Flächen- und Linienpotentiale dazu verwendet werden können, gewisse Randwertaufgaben der Gl. (1) zu lösen oder mindestens auf eine einfachere Form zu bringen. Wie schon XI, § 1, 4 kurz angedeutet wurde, kann man mit Hilfe von Integralgleichungen die Aufsuchung einer Lösung von (1), die noch einer passenden Randbedingung unterworfen wird, auf die Ermittlung einer Funktion von nur zwei, bzw. im Falle des logarithmischen Potentials von nur einer Variablen zurückführen. Mit diesen Überlegungen, die den Potentialbegriff, die Randwertprobleme von (1) und die Theorie der Integralgleichungen in Zusammenhang bringen, wollen wir uns im vorliegenden Paragraphen beschäftigen. Im übrigen ist die Untersuchung der Gleichung $\Delta u = 0$, namentlich ihrer speziellen Lösungen und der besonderen Lösungsverfahren nach XVI und XVII verwiesen.

Die Randbedingungen, denen die „harmonischen Funktionen" — so nennt man eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1) — unterworfen werden, sind durch die physikalische Fragestellung gegeben. Bedeutet beispielsweise u das Geschwindigkeitspotential in der Hydromechanik (d. h. eine Funktion, deren Gradient der Geschwindigkeitsvektor ist), so stimmen an der Begrenzung, wo die Flüssigkeit mit festen Wänden in Berührung steht, die Werte der Normalkomponente der Geschwindigkeit mit den Geschwindigkeitskomponenten der Wände überein, es ist also hier $\partial u/\partial n$ als gegeben anzusehen. In der Elektrostatik sucht man die Verteilung der Kraftlinien, also des Potentials, im Außen- oder Innenraum eines Leiters und hat dabei eine Konstante als den Potentialwert an der Leiteroberfläche gegeben usf. Ein allgemeinerer Fall liegt in der Theorie der Wärmeleitung vor, wo man einen linearen Ausdruck in u und $\partial u/\partial n$, entsprechend der äußeren und inneren Wärmeleitung als vorgegeben anzusehen hat. Um die Vorstellung zu fixieren,

nehmen wir an, es liege ein im Endlichen begrenzter, einfach zusammenhängender Raumteil vor, dessen Rand von einer stetig gekrümmten Fläche F gebildet wird, die in jedem Punkte eine Tangentialebene besitzt. Diesen Raumteil nennen wir den „Innenraum" von F, der ganze übrige Raum bildet den „Außenraum" von F. Entsprechende Festsetzungen sollen für ebene Bereiche gelten. Die am Rande gegebenen Funktionen setzen wir als stetig voraus. Unter den Flächennormalen an F wird stets die vom Innenraum nach dem Außenraum weisende verstanden. Wir haben im ganzen drei verschiedene Randbedingungen, die getrennt für Innen- und Außenraum der Fläche F und eventuell getrennt für Raum und Ebene betrachtet werden müssen, das sind insgesamt zwölf Aufgaben. Folgende Bezeichnungen werden wir gebrauchen:

a) Dirichletsches Problem (erste Randwertaufgabe), gegeben u am ganzen Umfang eines geschlossenen Bereiches, gesucht u im Innern oder im Außenraum des Bereiches; dabei sind die gegebenen Randwerte zu verstehen als die Grenzwerte, denen sich die zu findende Funktion u bei Annäherung an den Rand, von innen bzw. von außen, nähert;

b) Neumannsches Problem (zweite Randwertaufgabe), gegeben $\partial u/\partial n$ am Umfang des Bereiches, gesucht u wie unter a); endlich

c) Problem der Wärmeleitung, gegeben $hu + k\partial u/\partial n$ am Umfang, wo h und k entsprechend spezialisierte Funktionen des Ortes sind, gesucht u wie oben. Man kann natürlich die Fälle a) und b) als Sonderfälle von c) betrachten, es empfiehlt sich aber, mit den einfacheren zu beginnen.

Weitere Fragestellungen ergeben sich, wenn man die mehrfach zusammenhängenden Bereiche untersucht oder in anderer Richtung die angeführten Einschränkungen mildert oder aufgibt. Davon soll in 5 die Rede sein.

2. Aufstellung der Integralgleichungen. Wir beginnen mit dem dreidimensionalen Dirichletschen Problem und ersetzen es nur durch ein etwas allgemeineres, indem wir den Fall des Innen- und des Außenraumes zusammenfassen. Es seien α und β zwei Konstanten, und es werde mit u_i bzw. u_a der Wert bezeichnet, den die harmonische Funktion u annimmt, wenn man von innen bzw. von außen an einen bestimmten Punkt des Randes herankommt. Gegeben sei eine Funktion f des Ortes längs des Randes, und die vorgeschriebene Randbedingung laute:

$$\alpha u_a + \beta u_i = f. \tag{2}$$

Für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ hat man das innere, für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ das äußere Problem. Der entscheidende Gedanke ist nun der, daß man u als Potential einer Doppelbelegung auf dem Rande mit der unbekannten Belegungsdichte ν ansieht [W in § 1, (4)]:

$$u = \int_{(F)} \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dF. \tag{3}$$

Diese Definitionsgleichung für das Potential gilt für jeden beliebigen Aufpunkt, natürlich auch für einen auf dem Rande des Bereiches gelegenen. Der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt (3), wie wir aus § 1 wissen, sowohl im Innern wie im Äußeren. Beachtet man nun die beiden Gl. (18) in § 1, 5, die sich jetzt in der Form $u_a = u + 2\pi\nu$, $u_i = u - 2\pi\nu$ schreiben lassen, so folgt aus (2) und (3)

$$(\alpha + \beta) \int_{(F)} \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dF + (\alpha - \beta)\, 2\pi\nu = f, \tag{4}$$

und dies ist schon eine lineare, nicht homogene Integralgleichung zweiter Art für die Belegungsdichte ν, mit dem Kern $\partial/\partial n (1/r)$, dem Parameter $(\alpha + \beta) : 2\pi(\alpha - \beta)$ und der „rechten Seite" $f : 2\pi(\alpha - \beta)$.

Für das zweidimensionale Dirichletsche Problem ist in (4) nur 2π durch $-\pi$ und unter dem Integralzeichen $1/r$ durch $\log r$ zu ersetzen, wie sich aus dem entsprechenden Satz in § 1, 5 ergibt.

Liegt das Neumannsche Problem für Innen- oder Außenraum im Dreidimensionalen vor, so ersetzen wir es durch das umfassendere, das durch die Randbedingung

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n_a} + \beta \frac{\partial u}{\partial n_i} = f \tag{5}$$

definiert wird, bei analoger Bedeutung der Bezeichnungen wie oben. Sehen wir jetzt u als Potential einer einfachen Flächenbelegung auf dem Rande an, also nach § 1, (3)

$$u = \int_{(F)} \frac{\mu}{r} dF, \tag{6}$$

so folgt aus dem Ergebnis von § 1, 6, das sich in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial n_a} = \frac{\partial u}{\partial n} - 2\pi\mu, \quad \frac{\partial u}{\delta n_i} = \frac{\partial u}{\partial n} + 2\pi\mu \tag{6'}$$

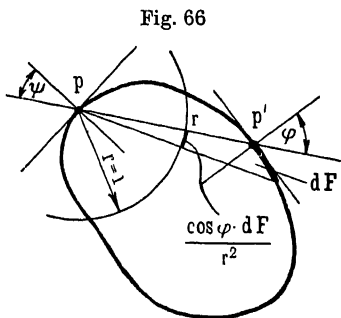
schreiben läßt, die Integralgleichung für μ:

$$(\alpha + \beta) \int_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mu}{r}\right) dF - (\alpha - \beta)\, 2\pi\mu = f. \tag{7}$$

Das Differentiationszeichen ist hier hinter das Integralzeichen gesetzt, es ist aber wohl zu beachten, daß es sich im Gegensatz zu (4) jetzt auf den Aufpunkt bezieht. Um dies und überhaupt das Verhältnis der beiden Gleichungen (4) und (7) in helleres Licht zu setzen, gebrauchen wir noch folgende Umformung.

In Fig. 66 bedeute p den Aufpunkt, p' den Belegungspunkt, so also, daß $\overline{pp'} = r$ und die Koordinaten von p' die Integrationsvariablen bilden, während die von p bei der Integration fest bleiben und die Argumentwerte für f und das außerhalb der Integrale stehende ν bzw. μ in (4) und (7) bilden. Dann kann man für den in (4) auftretenden Ausdruck $\partial/\partial n(1/r)$ auch $-1/r^2$ mal $\cos\varphi$ schreiben, wenn φ den Winkel zwischen pp' und der Normalrichtung in p' bezeichnet. Analog hat man bei der Differentiation unter dem Integralzeichen in (7), bei der natürlich μ fest bleibt, den Winkel ψ zwischen $p'p$ und der positiven Normalenrichtung in p einzuführen. Die beiden Integralgleichungen lauten dann,

Fig. 66

wenn man noch durch $\alpha - \beta$ kürzt und der Deutlichkeit wegen zur Kennzeichnung der Argumentwerte die Buchstaben p und p' benutzt, schließlich λ für $\mp(\alpha + \beta):(\alpha - \beta)$ schreibt, je nachdem das Dirichletsche oder das Neumannsche Problem vorliegt,

$$(4') \qquad 2\pi\nu(p) + \lambda \int \nu(p') \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dF = -f_1(p),$$

$$(7') \qquad 2\pi\mu(p) + \lambda \int \mu(p') \frac{\cos\psi}{r^2}\, dF = f_1(p).$$

Dabei gilt:

(8)
$\lambda = 1,$	$f_1 = f$	für das Dirichletsche Problem,	Innenraum,
$\lambda = -1,$	$f_1 = -f$	„ „ „ „	Außenraum,
$\lambda = 1,$	$f_1 = -f$	„ „ Neumannsche „	Außenraum,
$\lambda = -1,$	$f_1 = f$	„ „ „ „	Innenraum.

Wenn wir den Kern der Integralgleichung (4'), das ist die Größe $\cos\varphi : 2\pi r^2$, mit $K(p, p')$ bezeichnen, so ist der Kern von (7') durch $K(p', p)$ dargestellt; die beiden Gleichungen (4') und (7') sind also „adjungiert“ (XII, § 1, 5). Eine unmittelbare anschauliche Deutung kann man dem Kern von (4'), aber nicht dem von (7'), in folgender Weise geben. Es ist (Fig. 66) $\cos\varphi\, dF$ die Projektion des Flächen-

elements dF auf die zu pp' senkrechte Richtung; denkt man sich um p als Mittelpunkt eine Kugel vom Halbmesser 1 gelegt, so schneiden die von p aus nach den Punkten von dF gehenden Strahlen auf dieser Kugel das Flächenstück $\cos\varphi\, dF : r^2$ aus, und diese Größe heißt der „körperliche Winkel“, unter dem dF von p aus gesehen wird. Es wird also in (4') die Belegung ν über den „körperlichen Winkel“ der Belegungsfläche integriert (vgl. dazu die Ableitung für den zweidimensionalen Fall in XI, § 1, **4**).

Ist das Dirichletsche bzw. das Neumannsche Problem im Zweidimensionalen vorgelegt, so gelangt man zu Integralgleichungen, die sich von (4') und (7') nur dadurch unterscheiden, daß $-\pi$ an Stelle von 2π und in den Nennern $-r$ statt r^2 auftritt (und daß natürlich über eine Randlinie statt einer Randfläche integriert wird). In XI, § 1, **4** ist für das ebene Dirichletsche Problem des Innenraumes der Integralgleichungssatz in (24) und (25) direkt abgeleitet. Der dort in (24) mit $d\vartheta$ bezeichnete Winkel entspricht dem Sehwinkel des einzelnen Linienelements. Danach ist die Übereinstimmung der dort gegebenen Darstellung des Kernes (23) mit $\cos\varphi : r$ leicht einzusehen.

Hat man es endlich mit dem gemischten Problem zu tun, bei dem der Wert von $hu + k\partial u/\partial n$ vorgegeben ist, so wollen wir voraussetzen, daß k durchweg von Null verschieden sei. In diesem Falle kann man der verallgemeinerten Bedingung

$$(9) \qquad \alpha \frac{\partial u}{\partial n_a} + \beta \frac{\partial u}{\partial n_i} + \frac{h}{k} u = \frac{f}{k}$$

durch den Ansatz (6), also des Potentials einer einfachen Belegung gerecht werden. Die in (6') angeschriebene Eigenschaft des Potentials in Verbindung mit der in § 1, **6** ebenfalls nachgewiesenen, daß u selbst stetig bleibt, führt auf die Gleichung

$$(10) \qquad (\alpha + \beta) \int\limits_{(F)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mu}{r}\right) dF + \frac{h}{k} \int\limits_{(F)} \frac{\mu}{r}\, dF - (\alpha - \beta)\, 2\pi\mu = \frac{f}{k},$$

woraus analog wie oben entsteht:

$$(10') \qquad 2\pi\mu(p) + \lambda \int\limits_{(F)} \mu(p') \left[\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{h}{k(\alpha+\beta)}(p)\, \frac{1}{r}\right] dF = f_1$$

mit $\lambda = 1$, $f_1 = -f/k$ für den Außenraum, $\lambda = -1$, $f_1 = f/k$ für den Innenraum. Mit $h = 0$, $k = 1$ geht der Ansatz, wie es sein muß, in den für das Neumannsche Problem über.

3. Eigenwerte und Eigenlösungen. Durch die Integralgleichungen (4'), (7'), (10') wird die Aufsuchung der harmonischen Funktionen, die einer der drei angegebenen Randbedingungen genügen, zurückgeführt auf die Aufsuchung einer Belegungsfunktion μ bzw. ν, deren unabhängig Veränderliche nur den Rand des Integrationsgebietes durchlaufen. Aus den Belegungen gewinnt man die harmonischen Funktionen selbst durch Quadraturen nach (3) bzw. (6). Zweifellos liegt in diesem Verfahren ein gangbarer Weg zu praktischen Lösungen; insbesondere gibt es auch Fälle, in denen sich das Interesse auf die Randwerte allein (Kenntnis von u beim Neumannschen, von $\partial u/\partial n$ beim Dirichletschen Problem) beschränkt, wobei dann der Weg über die Integralgleichungen der allein naturgemäße ist. Doch wir wollen hier die Ansätze nicht in der Richtung der rechnerischen Auswertung verfolgen, sondern nur Schlüsse allgemeinerer Art aus ihnen ziehen.

Die Frage, ob es zu beliebig vorgegebenen Randwerten stets eine Lösung gibt, gestattet eine einfache Beantwortung auf Grund der in XII gewonnenen Sätze über die sogenannte Alternative. Wir haben dort gelernt, XII, § 1, 5: Entweder hat eine Gleichung zweiter Art für jeden Wert der rechten Seite eine, und nur eine Lösung, oder es besitzt für dasselbe λ, das dann ein Ausnahmewert, eine Wurzel des Fredholmschen Nenners ist, die homogene Gleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung. Dabei ist ein λ für beide Gl. (4') und (7'), da sie adjungiert sind, zugleich ein Ausnahmewert oder nicht. Wir beweisen nun zunächst, daß $\lambda = -1$ ein Eigenwert der Gl. (4') und (7') ist.

Zu diesem Zwecke gehen wir von (4') aus und erinnern uns an die Deutung des Integrals mit Hilfe des „körperlichen Winkels". Ist ν unter dem Integralzeichen konstant, so ist das Integral gleich dieser Konstanten mal dem Winkel, unter dem die ganze geschlossene Fläche F von einem ihrer Punkte p aus gesehen wird. Dieser Winkel hat aber den Wert 2π. Denn wenn wir zunächst von p die Strahlen nach einem Flächenstück auf F ziehen und dieses dann größer und größer werden lassen, so schneiden die Sehstrahlen nach seinen Punkten immer mehr und mehr von der Halbkugel aus, die auf der inneren Seite der Tangentialebene in p liegt, schließlich in der Grenze die ganze Halbkugel. Es ist also in der Tat für $\nu =$ konst die Gleichung erfüllt, die aus (4') hervorgeht, wenn man darin $\lambda = -1$ und $f_1 = 0$ setzt. Die gleiche Überlegung zeigt, daß das Potential u der Doppelschicht von konstanter Dichte ν für einen Punkt im Innern des von F eingeschlossenen Raumes $4\pi\nu$, im Außenraum 0 ist, weil 4π bzw. 0 die betreffenden Sehwinkelwerte sind. Physikalisch entspricht dieser Eigenlösung von (4') eine magnetische

Belegung an der Oberfläche eines Körpers, mit konstantem, aber von Null verschiedenem Potentialwert im Innern, bei verschwindendem Potential im Außenraum.

Nach dem oben Gesagten muß jetzt $\lambda = -1$ auch ein Eigenwert von (7′) sein, die zugehörige Eigenlösung ist aber keineswegs etwa $\mu =$ konst. Beachten wir, daß das Integral in (7′), bis auf das Vorzeichen gleich dem in (7), die Normalableitung $-\partial u/\partial n$ des Potentials in einem Punkt p von F darstellt, so erkennen wir, daß die linke Seite von (7′) mit $\lambda = -1$ nichts anderes ist als $-\partial u/\partial n_i$ nach der zweiten der Gl. (6′). (Dies ist übrigens nach der Bedeutung von f_1 selbstverständlich.) Es löst somit die gesuchte Eigenfunktion μ das Neumannsche Problem für den Innenraum mit verschwindenden Randwerten. Wie das zugehörige Potential beschaffen ist, erfahren wir mit Hilfe der oft als Greensche Formel bezeichneten Identität, die aus der in II, § 3 (33) aus dem Gaußschen Satz abgeleiteten mit $v = u$, $\Delta u = 0$ hervorgeht, nämlich

$$\int\limits_{(V)} (\operatorname{grad} u)^2 \, dV = \int\limits_{(F)} u \frac{\partial u}{\partial n} \, dF. \tag{11}$$

Hier ist natürlich Stetigkeit vorausgesetzt, d. h. auf der rechten Seite sind die Werte von u und $\partial u/\partial n$ zu nehmen, die beim Herangehen an den Rand von innen her sich ergeben. Man sieht daraus, daß verschwindende Randwerte beim Neumannschen Problem für den Innenraum $\operatorname{grad} u = 0$, also $u =$ konst zur Folge haben, weil das links in (11) stehende Integral über ein Quadrat nur verschwinden kann, wenn der Integrand identisch Null ist. Die hier betrachtete Eigenlösung entspricht daher physikalisch der Elektrizitätsverteilung auf einer geschlossenen Oberfläche, deren Potential im Innern konstant ist (Leiterpotential, vgl. das Beispiel in § 2, **3**). Die Lösung ist natürlich nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, der in dem eben genannten Anwendungsfall durch die Größe der Gesamtladung, das ist $\int \mu \, dF = m$, festgelegt wird.

Es ist wichtig, sich davon zu überzeugen, daß die hier betrachteten Eigenfunktionen für $\lambda = -1$ die einzigen sind, d. h. daß keine von $\nu =$ konst bzw. dem betrachteten μ (abgesehen von einem konstanten Faktor) verschiedene Funktion die Gl. (4′) bzw. (7′) bei $\lambda = -1$ und $f_1 = 0$ befriedigt. Für den ersten Fall sieht man das so ein. Die Eigenfunktion von (4′) für $\lambda = -1$ liefert jedenfalls die Lösung des Dirichletschen Problems für den Außenraum bei verschwindenden Randwerten $u_a = 0$. Wendet man (11) auf den Außenraum an, so muß man rechts das Integral über

eine unendlich weite Kugelfläche hinzunehmen. Da aber diese Oberfläche nur mit dem Quadrat des Radius wächst, das Potential einer endlichen Doppelbelegung aber wie $1/R^2$ abnimmt und die Normalableitung gegen Null geht, so verschwindet das Integral in der Grenze, und man erhält aus (11) grad $u = 0$, $u =$ konst für den ganzen Außenraum. Es ist mithin auch $\partial u / \partial n_a = 0$, und da die erste Ableitung des Potentials einer Doppelschicht nach § 1, 5 stetig bleibt, auch $\partial u / \partial n_i = 0$. Damit folgt wieder aus (11), daß auch im Innern $u =$ konst, und da die Belegungsdichte ν der Doppelschicht durch den Sprung im u-Wert gemessen wird, muß auch ν als Differenz zweier Konstanten konstant sein. Ähnlich, wenn auch etwas umständlicher, schließt man, daß eine Dichte μ der einfachen Belegung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt wird durch die Bedingung, der Gl. (7') mit $\lambda = -1$ und $f_1 = 0$ zu genügen — was für den Fall der Elektrizitätsverteilung physikalisch evident ist.

Nun wollen wir noch zeigen, daß $\lambda = 1$ nicht Eigenwert von (4') oder (7') ist. Wäre das der Fall, so müßte es nach (4') eine Belegung ν geben, die nicht identisch verschwindet und zu einem Potential führt, für das auf dem ganzen Rande $u_i = 0$ ist. Es folgt aber wieder aus (11), daß bei diesen Randwerten im ganzen Innern $u =$ konst, also sogar $u = 0$ und daher weiter $\partial u / \partial n_i = 0$ gilt. Da bei der Doppelschicht die Normalableitung stetig bleibt, hat man auch $\partial u / \partial n_a = 0$ und wieder durch Anwendung von (11) auf den Außenraum: $u =$ konst, daher $u = 0$, da u im Unendlichen verschwindet. Der Wert von ν ist bis auf den Faktor 2π gleich dem Sprunge der u-Werte an der Belegungsfläche; da dieser $0 - 0 = 0$ ist, hat man $\nu = 0$, w. z. b. w.

Im Falle der Wärmeleitungsgleichung (10') würde ein Eigenwert $\lambda = -1$ bedeuten, daß es ein im Innern nicht identisch verschwindendes Potential gibt, für das auf dem ganzen Rande $h u_i + k \partial u / \partial n_i = 0$ ist. Nun liefert aber hier (11):

$$(11') \qquad \int\limits_{(V)} (\operatorname{grad} u)^2 \, dV = - \int\limits_{(F)} \frac{h}{k} u^2 \, dF.$$

Sind h und k von gleichem Vorzeichen, also der Quotient positiv, so ist diese Gleichung nur für $u = 0$ erfüllt. Der Wert $\lambda = -1$ ist dann kein Ausnahmewert für (10'). Ebenso sieht man ein, daß $\lambda = 1$ kein Eigenwert sein kann, wenn $h : k$ durchweg negativ ist, wobei immer in der ursprünglichen Randbedingung unter $\partial u / \partial n$ die Ableitung in der von innen nach außen weisenden Normalenrichtung (aus dem endlich begrenzten in den unendlichen Raum) zu verstehen

ist. Physikalisch trifft tatsächlich die Bedingung $h:k > 0$ zu, wenn es sich um die Wärmeleitung im begrenzten Körper handelt, die Bedingung $h:k < 0$ im Falle der Wärmeleitung im Außenraum.

4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Auf Grund der voranstehenden Untersuchung der ausgezeichneten Parameterwerte und der zugehörigen Eigenlösungen sind wir jetzt ohne weiteres in der Lage, bestimmte Sätze über die Lösbarkeit der drei Randwertprobleme auszusprechen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den dreidimensionalen Fall, also das Newtonsche Potential. Vor allem folgt daraus, daß $\lambda = 1$ nicht Eigenwert von (4′) und (7′) ist, im Hinblick auf die Zusammenstellung (8) und das Bestehen der Alternative: Das Dirichletsche Problem für den Innenraum und das Neumannsche Problem für den Außenraum hat bei beliebig vorgegebenen Randwerten stets eine, und nur eine als Potential einer doppelten bzw. einfachen Belegung des Randes darstellbare Lösung. Mit anderen Worten: Wenn man die Potentialwerte am Umfang eines geschlossenen Bereiches willkürlich vorschreibt, ist das Potential im Innern, wenn man die Werte der Normalableitung vorschreibt, das Potential im Außenraum, soweit es als Belegungspotential definiert wird, eindeutig bestimmt. Der Satz gilt für die Ebene (logarithmisches) und für den Raum (Newtonsches Potential) zunächst unter den in 1 angeführten Einschränkungen für die Begrenzung und die Randwerte. Der erste Teil, betreffend das Dirichletsche Problem, läßt sich noch dahin erweitern, daß die Einschränkung der Darstellbarkeit als Belegungspotential fortfällt. (Daß dies für den zweiten Teil nicht gilt, sieht man daraus, daß beim Neumannschen Problem immer die Hinzufügung einer additiven Konstanten möglich ist.) Wären nämlich u_1 und u_2 zwei Lösungen des Dirichletschen Problems zu den gleichen Randwerten, so wäre $u = u_1 - u_2$ eine Lösung zu den Randwerten Null, eine solche verschwindet aber nach (11) identisch. Das Dirichletsche Problem für den Innenraum ist eindeutig, auch unabhängig von der Forderung der Darstellbarkeit der Lösung in der Form (3).

Zu anderen Ergebnissen gelangt man in den beiden Fragestellungen, bei denen $\lambda = -1$ ist, da dies, wie wir gesehen haben, ein Eigenwert von (4′) und (7′) ist. Hier dürfen die Randwerte nicht willkürlich vorgeschrieben werden, sondern müssen den am Schlusse von XII, § 1, 5 angegebenen Bedingungen genügen. Ferner ist die Lösung immer nur bis auf beliebige Multipla der Eigenfunktionen bestimmt. Betrachten wir zunächst das Neumannsche Problem für

den Innenraum, so müssen wir die rechte Seite von (7'), also im wesentlichen die vorzugebenden Randwerte $\partial u/\partial n$, der Bedingung unterwerfen, daß ihr Produkt mit der Eigenlösung der adjungierten Gl. (4') über den Rand integriert Null gibt. Die Eigenlösung von (4') ist aber, wie in **3** gezeigt wurde, $\nu =$ konst, also muß

$$\int\limits_{(F)} \frac{\partial u}{\partial n} dF = 0 \tag{12}$$

sein.

Die Eigenlösung von (7') selbst liefert, wie wir gesehen haben, ein im ganzen Innern konstantes Potential, so daß wir das Ergebnis gewinnen: Das Neumannsche Problem für den Innenraum hat dann, und nur dann eine Lösung, wenn die vorgegebenen Randwerte der Bedingung (12) genügen, und ist dann bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die physikalische Bedeutung dieses Satzes ist klar, wenn wir an die hydromechanische Anwendung denken: Gl. (12) besagt, daß die gesamte in den geschlossenen Raum eintretende Menge der Flüssigkeit Null sein muß, und die additive Konstante in der Lösung für u ändert nichts an dem Geschwindigkeitsbild, das sich daraus ergibt.

Nicht so befriedigend ist die Erledigung des Dirichletschen Problems für den Außenraum, zu der uns unsere Untersuchungen unmittelbar führen. Wir haben hier zu einem gegebenen Rande F zunächst die Eigenfunktion μ von (7'), das ist die stationäre Elektrizitätsverteilung auf F etwa für eine Gesamtmasse 1, aufzusuchen Dann müssen die vorzuschreibenden Potentialwerte u auf F der Bedingung

$$\int\limits_{(F)} \mu u dF = 0 \tag{13}$$

genügen. Da andererseits die Eigenlösung von (4'), nämlich $\nu =$ konst, ein im ganzen Außenraum verschwindendes Potential liefert, fällt die Unbestimmtheit bei der Ermittlung von u für den Außenraum fort. Wir haben somit: Das Dirichletsche Problem für den Außenraum von F ist dann, und nur dann lösbar, wenn die vorgegebenen Randwerte der Bedingung (13) genügen, wo μ die stationäre elektrostatische Dichteverteilung auf F bezeichnet; die Lösung ist dann eindeutig. Die in diesem Satze enthaltene Einschränkung der Randwerte läßt sich aber leicht umgehen, wenn man die Forderung aufgibt, daß u sich als Potential einer Doppelschicht darstellen läßt. Sei etwa für die tatsächlich gegebenen u-Werte auf F der Wert des Integrals (13) gleich C.

Dann erfüllen die Werte $u - C$ die Bedingung (13), weil μ so normiert war, daß $\int \mu dF = 1$ ist, also $\int (u - C) \mu dF = C - C = 0$. Für die Randwerte $u - C$ gibt es demnach eine Lösung, und wenn man zu dieser die Konstante C hinzufügt, hat man eine Lösung des ursprünglichen Problems. Daß unsere Betrachtungsweise nicht unmittelbar diese Lösung lieferte, sondern die Notwendigkeit einer Einschränkung vortäuscht, liegt daran, daß der Ansatz (3) für u als Potential einer Doppelschicht den Fall $u =$ konst im ganzen Raume ausschließt (weil das Potential endlicher Belegungen im Unendlichen wie $1 : R$ verschwindet), während er offenbar eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ darstellt. Die oben gefundene Lösung ist aber nicht die einzige. Bezeichnen wir etwa mit u_1 das Potential, das die eben betrachtete statische Belegung μ hervorruft, so wissen wir nach **3**, daß u_1 im Innern von F konstant ist, daher der Stetigkeit wegen auch auf F. Also kann man auch der den Randwerten $u - C$ zugehörigen Lösung statt der Konstanten C eine beliebige andere Konstante C' und dazu ein entsprechendes Vielfaches von u_1 hinzufügen. Wir kommen auf diesen Sachverhalt noch in **5** zurück; hier sei nur festgestellt: Das Dirichletsche Problem für den Außenraum ist ohne Einschränkung für die Randwerte vieldeutig lösbar, wenn man auch im Unendlichen nicht verschwindende oder nur wie $1/R$ verschwindende Lösungen zuläßt.

Für das gemischte oder Wärmeleitungsproblem ist die Erledigung auf Grund der Tatsache, daß $\lambda = \pm 1$ keine Eigenwerte unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten h, k sind, ohne weiteres möglich: Die Randwertaufgabe der Wärmeleitung hat bei beliebig vorgegebenen Randwerten von $hu + k\partial u/\partial n$ stets eine, und nur eine Lösung, vorausgesetzt, daß h und k durchweg gleiches Zeichen haben, wenn es sich um das Innenproblem, durchweg verschiedenes Zeichen, wenn es sich um das Außenproblem handelt. Man kann auch sagen, h und k müßten immer gleiches Zeichen aufweisen, wenn unter dn immer die äußere Normale des in Betracht gezogenen Körpers verstanden wird (die beim Außenraumproblem nach innen weist).

5. Mehrfach zusammenhängende Bereiche. Leiterpotentiale. Wenn wir jetzt von den in **1** eingeführten Einschränkungen die eine aufheben wollen, daß der von der Fläche F eingeschlossene Bereich einfachen Zusammenhang habe, so besitzt für uns vor allem der Fall Interesse, in dem F in mehrere, getrennt liegende, geschlossene Flächenstücke $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zerfällt, von denen jedes einen ein-

fachen Bereich umschließt. Die Gl. (4′) und (7′) zeigen dann keine Besonderheit für den Parameterwert $\lambda = 1$, d. h. für das Dirichletsche Problem des Innenraumes und das Neumannsche des Außenraumes. Man beweist in genau gleicher Weise wie oben in **3**, daß $\lambda = 1$ kein Eigenwert sein kann, da ja die Greensche Formel (11) für jedes einzelne der n Flächenstücke F_k und das zugehörige Volumen V_k angeschrieben werden kann. Die beiden in Rede stehenden Probleme sind also wieder wie oben in **4** bei beliebig angegebenen Randwerten eindeutig lösbar.

Etwas Neues tritt aber im Falle $\lambda = -1$ auf. Wir haben in **3** gesehen, daß die Gl. (4′) für $f_1 = 0$ die Lösung $\nu =$ konst, und nur diese besitzt. Wiederholen wir die gleiche Überlegung, so erkennen wir, daß jetzt auf jeder der Einzelflächen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eine konstante Belegungsdichte von beliebiger Größe möglich ist; denn diese Belegungen haben ja nach außen hin keine Wirkung, beeinflussen also einander gegenseitig nicht. Gegenüber dem Falle der einfach zusammenhängenden Fläche haben wir also jetzt beim Eigenwert $\lambda = -1$ nicht eine einzelne Eigenlösung, sondern n linear voneinander unabhängige. Man kann ein „Fundamentalsystem" etwa in der Form angeben:

$$(14)\qquad \begin{cases} \nu = 1 \text{ auf } F_1, & \nu = 0 \text{ auf } F_2, F_3, \ldots, F_n, \\ \nu = 1 \text{ auf } F_2, & \nu = 0 \text{ auf } F_1, F_3, \ldots, F_n, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \nu = 1 \text{ auf } F_n, & \nu = 0 \text{ auf } F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}. \end{cases}$$

Als Bestimmungsstücke einer Lösung können die einzelnen Belegungsdichten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ oder die konstanten Potentialwerte im Innern $4\pi\nu_1$ usf. angesehen werden.

In gleicher Weise besitzt auch die Integralgleichung (7′) zum Eigenwert $\lambda = -1$ jetzt n linear unabhängige Eigenlösungen, die sich aber nicht leicht explizite angeben lassen. Eine Lösung ist bestimmt, sobald man die n „Gesamtmassen" $m_1, m_2, \ldots, m_n$, nämlich die Größen

$$(15)\qquad m_1 = \int\limits_{(F_1)} \mu\, dF, \quad m_2 = \int\limits_{(F_2)} \mu\, dF, \quad \ldots, \quad m_n = \int\limits_{(F_n)} \mu\, dF,$$

kennt. Als Fundamentalsystem kann man etwa die Lösungen für die folgenden Konstantenwerte ansehen:

$$(16)\qquad \begin{cases} m_1 = 1, & m_2 = m_3 = \cdots = m_n \phantom{{}_{-1}} = 0, \\ m_2 = 1, & m_1 = m_3 = \cdots = m_n \phantom{{}_{-1}} = 0, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ m_n = 1, & m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Die physikalische Bedeutung der Eigenlösungen ist klar: Sie stellen die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf den Oberflächen von n Leitern dar, wobei die n Ladungen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ willkürlich gegeben werden dürfen. Man nennt ein durch derartige Verteilungen hervorgerufenes Potential Leiterpotential. Seine charakteristische Eigenschaft ist (vgl. **3**), daß es im Innern jeder der geschlossenen Flächen $F_\varkappa$, und daher der Stetigkeit wegen auch auf den $F_\varkappa$ selbst, je einen konstanten Wert hat. Mathematisch folgt die Existenz von n linear unabhängigen Eigenlösungen aus der Tatsache, daß die adjungierte Gleichung (4′) sie besitzt, während man die eindeutige Bestimmbarkeit einer Lösung durch die Ladungen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ daraus folgert, daß sonst auch ein nicht identisch verschwindendes Potential bei $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$ bestehen müßte; dies führt aber unter Heranziehung der Greenschen Formel (11) zu einem Widerspruch.

Aus den eben erörterten Verhältnissen der Eigenlösungen ergeben sich entsprechende Folgerungen für die nichthomogenen Probleme. Das Neumannsche Problem für das Innere der n Flächen ist nur lösbar, wenn die vorgegebenen Randwerte von $\partial u / \partial n$ den n Bedingungen

$$\int\limits_{(F_1)} \frac{\partial u}{\partial n} dF = \int\limits_{(F_2)} \frac{\partial u}{\partial n} dF = \cdots = \int\limits_{(F_n)} \frac{\partial u}{\partial n} dF = 0 \tag{17}$$

genügen — was von vornherein selbstverständlich erscheint; die Lösung ist aber jetzt nur bis auf n Konstanten bestimmt, und dies ist ohne Bedeutung für die Anwendungen, da die Konstanten additiv auftreten. Für das Dirichletsche Problem des Außenraumes ergeben sich zunächst n Bedingungen, denen die vorgegebenen Randwerte u genügen müssen:

$$\int\limits_{(F)} u \mu_1 \, dF = 0, \quad \int\limits_{(F)} u \mu_2 \, dF = 0, \quad \ldots, \quad \int\limits_{(F)} u \mu_n \, dF = 0, \tag{18}$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die Verteilungen sind, die den n Lösungen (16) des Eigenwertproblems entsprechen. Die Integrale sind über das ganze F, d. h. über sämtliche Einzelflächen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zu erstrecken, da keineswegs etwa μ_1 auf den Flächen F_2 bis F_n identisch verschwindet, wenn auch nach (16) das Integral von μ_1 über die Flächenstücke F_2 bis F_n Null ist. Allein die Bedingungen (18) fallen, ebenso wie im Falle von **4**, fort, wenn man zuläßt, daß das Potential auch anders als durch eine Doppelbelegung erzeugt werden kann. Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die Leiterpotentiale, die den in (16) angegebenen n elektrischen Ladungszuständen entsprechen. Dann hat

jedes $u_\varkappa$ auf jedem F_ι je einen konstanten Wert, der mit $u_{\varkappa\iota}$ bezeichnet sei. Andererseits seien $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die Werte, die die linken Seiten von (18) annehmen, wenn man für u die willkürlich vorgeschriebenen Randwerte einsetzt. Es gibt dann nach dem allgemeinen Ergebnis der Integralgleichungstheorie ein Potential, nennen wir es $\bar{u}$, das von einer Doppelschicht erzeugt wird und auf F_1 die Randwerte $u - C_1$, auf F_2 die Randwerte $u - C_2$ usf. annimmt, wenn u die ursprünglich vorgeschriebenen Randwerte sind. Denn man hat

$$\int_{(F)} (u - C_1)\,\mu_1\,dF = \int_{(F)} u\,\mu_1\,dF - C_1 \int_{(F)} \mu_1\,dF = C_1 - C_1 \int_{(F_1)} \mu_1\,dF = 0 \text{ usf.},$$

so daß für $\bar{u}$ die Bedingungen (18) erfüllt sind. Setzt man jetzt u in der Form an

$$u = \bar{u} + c + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n, \tag{19}$$

so muß man nur die n Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bei willkürlichem c so bestimmen, daß

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 u_{11} + c_2 u_{21} + \cdots + c_n u_{n1} = C_1 - c, \\ c_1 u_{12} + c_2 u_{22} + \cdots + c_n u_{n2} = C_2 - c, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 u_{1n} + c_2 u_{2n} + \cdots + c_n u_{nn} = C_n - c \end{array}\right. \tag{20}$$

wird. Das Gleichungssystem (20) ist für beliebige rechte Seiten lösbar. Anderenfalls müßte es eine nicht verschwindende Lösung der Gleichungen mit $C_1 - c = C_2 - c = \cdots = C_n - c = 0$ geben; diese würde aber in $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ ein Leiterpotential mit den Gesamtmassen $m_1 = 0, \ldots, m_n = 0$ liefern, was, wie schon oben bemerkt, zu einem Widerspruch mit (11) führt. Da ferner das Gleichungssystem (20), wenn sämtliche rechten Seiten durch c ersetzt werden, Lösungen $c_1 \ldots c_n$ liefern, die sich proportional mit c ändern, kann man statt c die „Gesamtmasse“

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = m \tag{20'}$$

des Potentials willkürlich vorschreiben. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen, durch den der in 4 für den einfach zusammenhängenden Raum gegebene auch eine Ergänzung erhält: **Das Dirichletsche Problem für den Außenraum von n geschlossenen Flächen läßt bei beliebig vorgegebenen Randwerten eine Lösung zu; hierbei ist noch die „Gesamtmasse“ des Potentials willkürlich wählbar, dann aber ist die Lösung eindeutig.**

In vielen Fällen der Anwendung werden solche harmonische Funktionen, die an gegebenen Oberflächen konstante Werte an-

nehmen, gesucht, wobei diese Konstanten nicht unmittelbar gegeben, sondern durch andere Bedingungen bestimmt sind (Torsionsproblem mehrfach zusammenhängender Querschnitte). In all diesen Fällen ist vom Ansatz (19) auszugehen und aus den zusätzlichen Bedingungen das Gleichungssystem aufzustellen, das an Stelle von (20) tritt.

Literatur zur Potentialtheorie

1. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Leipzig (Teubner), 1887.
2. H. Po caré, Théorie du potentiel Newtonien, réd. par E. le Roy et G. Vincent. Paris, 1899.
3. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialtheorie im Raume. 2 Bde. Berlin (Dümmler), 1899.
4. J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen. Heft 40 der Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig (Hirzel), 1911.
5. E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie. Ebenda Heft 41, 1912.

IV. Abschnitt

Partielle Differentialgleichungen

Fünfzehntes Kapitel

Anfangswertprobleme

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, die partielle Differentialquotienten einer unbekannten Funktion enthält; letztere muß also ihrerseits Funktion mehrerer Variablen sein. Nach der höchsten Ordnung der auftretenden partiellen Ableitungen benennt man die Ordnung der partiellen Differentialgleichung. Soll eine unbekannte Funktion zugleich mehreren partiellen Differentialgleichungen genügen, so sprechen wir von einem System partieller Differentialgleichungen.

§ 1. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir wollen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung linear nennen, wenn die auftretenden partiellen Ableitungen nur linear in die Gleichung eingehen und die unbekannte Funktion überhaupt nicht explizite auftritt. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die unabhängigen Veränderlichen, z die gesuchte Funktion dieser Veränderlichen, so ist eine lineare Differentialgleichung also von der Form:

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = B, \tag{1}$$

wo die A_ν und B stetige Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

1. Geometrische Interpretation. Nehmen wir zunächst bei zwei unabhängigen Veränderlichen den etwas allgemeineren Fall, daß die partiellen Ableitungen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ der unbekannten Funk-

tion z nur linear auftreten, z aber beliebig in die Gleichung eingehen kann, also

$$A(x,y,z)\cdot p + B(x,y,z)\cdot q = C(x,y,z)^{1}). \tag{2}$$

Eine solche Gleichung wollen wir als planar bezeichnen.

Die gesuchte Funktion $z = z(x,y)$ ist geometrisch zu interpretieren als eine über der xy-Ebene sich hinziehende Fläche, die „Integralfläche“. Man wird vermuten, daß eine partielle Differentialgleichung nicht nur eine Lösung besitzt, und wird darum unter den verschiedenen Lösungen eine etwa durch vorgeschriebene „Anfangswerte“ auszeichnen wollen. Die geometrische Vorstellung legt es nahe, zu verlangen, daß die gesuchte Integralfläche durch eine vorgeschriebene Kurve, etwa $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ gehe. Wir wollen uns überlegen, ob durch eine solche Kurve die Integralfläche stets eindeutig bestimmt sein kann.

Wenn eine Integralfläche (innerhalb eines gewissen Raumstückes, in dem die Differentialgleichung sich regulär verhält) stets durch eine Raumkurve eindeutig bestimmt sein soll, so dürfen durch keine Raumkurve zwei Integralflächen gehen, also dürften sich zwei Integralflächen niemals schneiden. Die Integralflächen müßten also das ganze Raumstück einfach und lückenlos erfüllen, mithin eine „einparametrige Schar“ bilden: $z = F(x,y;\alpha)$, und jede einzelne müßte durch Spezialisation des Parameters α zu erhalten sein. Nebenbei würden nur ganz gewisse Raumkurven auf Integralflächen liegen, also zur Bestimmung solcher dienen können. Die meisten willkürlich gezogenen Raumkurven würden irgendwie die Schar der Integralflächen durchsetzen.

2. Ein Beispiel. Nun zeigt aber das einfachste Beispiel, daß die Integralflächen eine viel höhere Mannigfaltigkeit als eine einparametrige Schar bilden. Betrachten wir etwa die lineare Differentialgleichung

$$p - q = 0, \tag{3}$$

wo wieder $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ gesetzt ist. Die Koordinatentransformation

$$\left\{\begin{array}{l} x = \xi + \eta \\ y = \xi - \eta \end{array}\right., \quad \text{also} \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \dfrac{x+y}{2} \\ \eta = \dfrac{x-y}{2} \end{array}\right.,$$

[1]) Diese Gleichung wird in 6 näher behandelt. Die in 1 angestellten Überlegungen gelten allgemeiner für eine Differentialgleichung der Gestalt $F(x,y,z,p,q) = 0$.

liefert

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Dadurch geht Gl. (3) über in:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Hiervon ist $z = w(\xi)$, wo $w(\xi)$ irgendeine beliebige Funktion von ξ ist, gewiß ein Integral. Nach Zurückgehen auf die Variablen x und y erhält man also als Lösung von (3)

$$z = w\left(\frac{x+y}{2}\right) = W(x+y), \tag{4}$$

wo W gleichfalls eine willkürliche Funktion ihres Argumentes darstellt. Die Richtigkeit der Lösung bestätigt man auch sofort durch Einsetzen in (3). In der Mannigfaltigkeit der Lösungen von (3) bleibt also nicht nur ein Parameter frei (wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung), sondern sogar eine Funktion (die, selbst wenn man sie als analytisch voraussetzt, von unendlich vielen stetig variablen Parametern, nämlich den Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung, abhängt).

3. Homogene lineare Differentialgleichungen. Allgemeine Sätze. Nach (1) ist die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung von der Gestalt

$$A(z) \equiv A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0. \tag{5}$$

Ersetzt man in dem „linearen partiellen Differentialausdruck" $A(z)$ z durch eine Funktion $z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, wo die u_μ wieder gewisse Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$ sein sollen, so folgt leicht:

$$\begin{cases} A(z) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} \sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu \dfrac{\partial u_1}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} \sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu \dfrac{\partial u_2}{\partial x_\nu} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_m} \sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu \dfrac{\partial u_m}{\partial x_\nu} \\ \quad = A(u_1) \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} + A(u_2) \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \cdots + A(u_m) \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_m}. \end{cases} \tag{6}$$

Wir stellen jetzt folgenden Satz auf: Unter der Voraussetzung, daß es im Raume der unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ kein n-dimensionales Teilgebiet gibt, in dem sämtliche A_ν gleichzeitig verschwinden (bei analytischen A_ν ist das stets erfüllt), gibt es in jedem Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ höchstens $n-1$ voneinander unabhängige Lösungen. Dabei heißen

n Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig, wenn ihre Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \frac{\partial z_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

(vgl. I, § 3, 2) nicht verschwindet[1]).

Beweis: Gäbe es nämlich in einem Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und wäre die Funktionaldeterminante von Null verschieden, so gäbe es um diesen Punkt wegen der Stetigkeit der A_ν eine n-dimensionale kleine Kugel, in der sie ungleich Null wäre. Dort wäre aber

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, n;$$

es müßten daher in der Kugel alle A_ν verschwinden, was der Voraussetzung widerspricht.

Gibt man umgekehrt $n-1$ unabhängige Funktionen $z_1, \ldots, z_{n-1}$ vor, so kann man (bis auf einen belanglosen Faktor) eine, und nur eine Differentialgleichung (5) angeben, der sie genügen. Denn aus

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, n-1$$

folgt, daß sich die A_ν wie die entsprechenden $(n-1)$-spaltigen Unterdeterminanten der Funktionalmatrix mit den analog wie oben angeordneten Elementen $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n}$ verhalten, von denen nach Voraussetzung mindestens eine nicht verschwindet.

Hat man $n-1$ unabhängige Integrale $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ von (5) gefunden, so ist jede beliebige Funktion $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ eine Lösung von (5), wie man sofort durch Anwendung der Regel (6) einsieht, und alle Lösungen sind in dieser Form darstellbar.

---

[1]) Dieser Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen sagt aus, daß die n Vektoren mit den Komponenten

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_1}; \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \frac{\partial z_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_2}{\partial x_n}; \ldots; \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, \frac{\partial z_2}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}$$

im Sinne der Definition von II, § 1, 4 linear unabhängig sind.

4. Charakteristiken und charakteristische Differentialgleichungen. Es handelt sich jetzt darum, in der Umgebung einer regulären Stelle[1]), z. B. des Punktes $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $n-1$ unabhängige Integrale von (5) aufzufinden. Es sei etwa $A_1(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. Man stelle nun das folgende System von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen auf:

$$\frac{d x_1}{A_1} = \frac{d x_2}{A_2} = \cdots = \frac{d x_n}{A_n}, \tag{7}$$

das man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{d x_2}{d x_1} = \frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{d x_3}{d x_1} = \frac{A_3}{A_1}, \quad \ldots, \quad \frac{d x_n}{d x_1} = \frac{A_n}{A_1}. \tag{7'}$$

Nach VI, § 1, 6 besitzen diese Gleichungen genau ein Lösungssystem bei vorgegebenen Anfangswerten[2]). Seien die Anfangswerte für $x_1 = 0$ etwa

$$x_2 = w_2, \; x_3 = w_3, \ldots, x_n = w_n, \tag{8}$$

wo die $w_2, \ldots, w_n$ genügend kleine absolute Beträge besitzen, und die zugehörigen Lösungen

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2(x_1, w_2, \ldots, w_n), \\ x_3 = \varphi_3(x_1, w_2, \ldots, w_n), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1, w_2, \ldots, w_n). \end{cases} \tag{9}$$

Nun ist an der Stelle $x_1 = 0$ die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n)}{\partial(w_2, w_3, \ldots, w_n)} = 1, \tag{10}$$

da dort

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial w_\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu \\ 0 & \text{,, } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

In einer gewissen Umgebung unserer betrachteten Stelle kann man daher das System (9) nach den w auflösen:

$$w_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß diese w_ν, die natürlich in der Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$ linear unabhängig sind, der Gl. (5) genügen. Schreitet man in der Richtung der Kurve ψ_ν fort, so wird ja

$$\frac{d w_\nu}{d x_1} = \frac{\partial w_\nu}{\partial x_1} + \frac{\partial w_\nu}{\partial x_2}\frac{d x_2}{d x_1} + \cdots + \frac{\partial w_\nu}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d x_1} = 0,$$

---

[1]) Dort verschwinden also nicht alle A_ν gleichzeitig.

[2]) Die erforderliche Lipschitzbedingung für $\frac{A_\nu}{A_1}$ ist in der Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$ sicher erfüllt, wenn sie für alle A_ν gilt.

d. h. unter Verwendung von (7'):

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial w_\nu}{\partial x_2} + \cdots + \frac{A_n}{A_1}\frac{\partial w_\nu}{\partial x_n} = 0.$$

Daraus folgt aber sofort $A(w_\nu) = 0$ für $\nu = 2, 3, \ldots, n$.

Durch (9) ist eine $(n-1)$-parametrige Schar von Kurven im Raum der unabhängigen Variablen x_ν bestimmt, die wir **Charakteristiken** nennen wollen.

Man sieht so allgemein: **Jede Charakteristik genügt der partiellen Differentialgleichung** (5).

Die **allgemeine Lösung** von (5) ist also nach dem Früheren darstellbar in der Form

$$z = \Phi(w_2, w_3, \ldots, w_n). \tag{12}$$

Das kann man übrigens im Rahmen unserer Betrachtungen auch so einsehen: Wegen (10) kann man statt $x_2, \ldots, x_n$ als unabhängige Variablen $w_2, \ldots, w_n$ einführen. Dann hat man nach (6), wenn z eine Lösung von (5) sein soll:

$$A(z) = 0 = A(x_1)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1} + A(w_2)\frac{\partial z}{\partial w_2} + \cdots + A(w_n)\frac{\partial z}{\partial w_n}\cdot$$

Hält man $w_2, w_3, \ldots, w_n$ konstant, so sieht man, daß wegen $A(x_1) = A_1 \neq 0$ z nicht von x_1 abhängen kann. Das liefert aber die Gl. (12).

(12) liefert gleichzeitig den wichtigen Satz: **Jede Lösung z von (5) ist längs jeder Charakteristik konstant.** (Und umgekehrt.)

5. Das Cauchysche Anfangswertproblem. Der besseren Anschaulichkeit halber sei zunächst der Fall von nur zwei unabhängigen Variablen x und y behandelt. Gl. (5) geht dann über in

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Wie schon in **1** angedeutet wurde, wollen wir jetzt untersuchen, inwieweit eine Lösung z von (13) durch ihre Werte längs einer Kurve $\mathfrak{C}$ bestimmt ist. (**Cauchysches Anfangswertproblem.**)

Die vorgegebene Kurve $\mathfrak{C}$, deren Parameterdarstellung

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t)$$

sei, möge keinen singulären Punkt aufweisen. Es sei also

$$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0.$$

Ferner setzen wir voraus, daß sie keine Charakteristik berührt. Da man die Gleichungen der letzteren in der Form

$$\frac{dx}{dt} = A, \quad \frac{dy}{dt} = B$$

schreiben kann, ist diese Voraussetzung gleichbedeutend mit der Forderung, daß

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \tag{14}$$

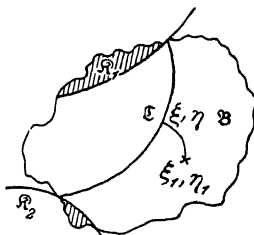
ist. Unter dieser Voraussetzung soll bewiesen werden, daß durch die Werte von z auf $\mathfrak{C}$ die Lösung z von (13) eindeutig bestimmt ist, wenn in einem Gebiet um die Kurve $\mathfrak{C}$ herum A und B nicht beide gleichzeitig verschwinden.

Ich betrachte einen Bereich $\mathfrak{B}$, der durch $\mathfrak{C}$ in zwei Teile zerlegt wird (vgl. Fig. 67) und in dem A und B nicht beide gleichzeitig verschwinden. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{C}$ geht jetzt genau eine charakteristische Kurve hindurch. Wegen (14) schließt in jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ die orientierte Kurvennormale mit der durch den betreffenden Kurvenpunkt gehenden Charakteristik in einem der beiden Teilgebiete von $\mathfrak{B}$ stets einen Winkel ein, der dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\pi/2$, im anderen größer als $\pi/2$. Daraus folgt leicht, daß keine Charakteristik $\mathfrak{C}$ zweimal schneidet.

Fig. 67

Die beiden Charakteristiken durch die Endpunkte von C ($\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$) schneiden eventuell von $\mathfrak{B}$ noch ein oder mehrere Stücke ab, die bei der folgenden Betrachtung wegzulassen sind (in der Figur schraffiert).

Man kann nun leicht zeigen, daß durch jeden Punkt ξ_1, η_1 des Restbereiches genau eine Charakteristik geht, die $\mathfrak{C}$ trifft. Man verbinde etwa ξ_1, η_1 innerhalb des Bereiches mit $\mathfrak{C}$. Durch den Punkt ξ, η auf $\mathfrak{C}$ geht gewiß eine Charakteristik hindurch. Geht man nun auf der Verbindungslinie nach ξ_1, η_1 zu, so folgt unsere Behauptung leicht aus den Stetigkeitssätzen von VI, § 1, **4** und **6** in Verbindung mit (14).

In diesem Restbereich kann es nun nur eine Lösung z von (13) geben, die auf $\mathfrak{C}$ vorgegebene Werte $z = \chi(t)$ annimmt; denn längs jeder Charakteristik ist ja der Wert von z konstant und gleich dem im Schnittpunkt von $\mathfrak{C}$ mit dieser Charakteristik vorgeschriebenen. Um zu zeigen, daß auf diese Weise mit Hilfe der Charakteristiken

bei stetig differenzierbarem $\chi(t)$ eine Lösung erhalten wird, braucht nur noch nachgewiesen zu werden, daß eine differenzierbare Fläche entsteht.

Nach dem Früheren kann man die Charakteristiken in der Form

$$t = f(x, y)$$

darstellen, wo f stetige partielle erste Ableitungen besitzt. Unsere mit Hilfe der Charakteristiken aufgestellte Lösung, die auf $\mathfrak{C}$ die gegebenen Werte annimmt, wird dann

$$z = \chi(f(x, y))$$

und besitzt mithin stetige erste Ableitungen. Damit ist alles bewiesen.

Im Falle von n unabhängigen Variablen gibt es, wie man auf die gleiche Weise zeigt, genau eine Lösung z, die auf einer $(n-1)$-dimensionalen stetig differenzierbaren Fläche des x-Raumes stetig differenzierbare Werte annimmt, wenn diese Fläche nicht von den Charakteristiken berührt wird. Die letzte Voraussetzung drückt sich so aus, daß, wenn $x_\nu = x_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ die Fläche darstellt, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt_1} & \frac{dx_2}{dt_1} & \cdots & \frac{dx_n}{dt_1} \\ \frac{dx_1}{dt_2} & \frac{dx_2}{dt_2} & \cdots & \frac{dx_n}{dt_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{dx_1}{dt_{n-1}} & \frac{dx_2}{dt_{n-1}} & \cdots & \frac{dx_n}{dt_{n-1}} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

6. Planare Differentialgleichungen. Wir kommen zur Veranschaulichung unserer Resultate noch einmal auf die etwas allgemeinere Differentialgleichung

$$A(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = C(x,y,z) \tag{2}$$

zurück, deren Koeffizienten also die unbekannte Funktion z enthalten (bei mehreren unabhängigen Variablen verläuft die Betrachtung analog). Wir können das Problem sofort auf das frühere zurückführen, wenn wir die Lösung von (2) in der Form

$$u(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

mit $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ ansetzen. Dann geht nämlich (2) über in

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

Die Charakteristiken genügen den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}. \tag{17}$$

Geben wir jetzt eine Raumkurve $\mathfrak{C}$ vor, welche keine durch (17) bestimmte Charakteristik berührt, so wissen wir, daß wir durch Ansetzen der Charakteristiken an diese Kurve eine zweidimensionale Fläche u bekommen, die (16) befriedigt. Dieses Problem ist viel spezieller als das frühere; denn erstens dürften wir auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit die Werte von u vorschreiben, und zweitens haben wir sogar auf unserer eindimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ ganz bestimmte Werte angenommen, nämlich $u = 0$. In einem Bereich, in dem A, B und C nicht gleichzeitig verschwinden, erhält man, da ja u auf den Charakteristiken seinen Wert nicht ändert, also stets verschwindet, eine Fläche $u(x, y, z) = 0$, die (16) genügt. Ist $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$, so kann man nach z auflösen und erhält dann n $z = z(x, y)$ die gesuchte Integralfläche von (2), die durch unsere Kurve $\mathfrak{C}$ hindurchgeht.

Man nennt die Differentialgleichung (2) „planar", und zwar aus folgendem Grunde. Eine Integralfläche von (2), die durch einen festen Raumpunkt $P = (x, y, z)$ hindurchgeht, besitzt dort eine Normale, deren Richtungscosinus sich wie $\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : (-1)$ verhalten. Gl. (2) besagt nun, daß die Normalen aller durch P möglichen Integralflächen in einer Ebene liegen. Das kann man geometrisch auch so ausdrücken: Die Tangentialebenen aller durch P gehenden Integralflächen schneiden sich in einer Geraden, deren Richtungscosinus sich wie $A(x, y, z) : B(x, y, z) : C(x, y, z)$ verhalten, und diese Gerade ist offenbar die Tangente an die durch P gehende Charakteristik. An diese Bemerkung werden wir in § 3 wieder anknüpfen.

In unserem Beispiel (3) genügen die Charakteristiken den Gleichungen

$$dx = -dy \quad \text{und} \quad dz = 0,$$

ihre Gleichungen lauten daher

$$x + y = a \quad \text{und} \quad z = b.$$

Nach dem Früheren ist also das allgemeine Integral von (3) darstellbar in der Form

$$\varphi(x + y, z) = 0,$$

worin die früher gegebene Lösung (4) enthalten ist.

Es wäre noch zu bemerken, daß die Charakteristikenmethode unmittelbar ein Verfahren zur näherungsweisen Integration der Gl. (2) nahelegt, indem man nämlich, von einem Punkte der gegebenen Kurve ausgehend, die Charakteristiken nach den charakteristischen Differentialgleichungen durch Polygonzüge approximiert und dadurch, daß man dies von mehreren Punkten der Kurve aus unternimmt, ein Netz von Punkten im Raume erhält, die der gesuchten Integralfläche, je nach der Feinheit der Annäherung, beliebig nahe liegen.

§ 2. Systeme linearer partieller Differentialgleichungen

1. Allgemeine Begriffsbildungen. Es seien zunächst zwei lineare Differentialgleichungen bei n unabhängigen Variablen gegeben, denen eine Funktion z genügen soll:

$$(1)\qquad \begin{cases} A(z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0, \\[2ex] B(z) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0. \end{cases}$$

Die A_ν und B_ν sollen wieder Funktionen der x_ν allein sein.

Unter Benutzung der Formel (6) aus § 1 erhält man

$$\begin{aligned} A(B(z)) &= A\left(\sum B_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu}\right) = \sum A\left(B_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu}\right) \\ &= \sum A(B_\nu)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} + \sum B_\nu A\left(\frac{\partial z}{\partial x_\nu}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt für den folgendermaßen definierten Klammerausdruck:

$$(2)\qquad \{A, B\}(z) = A(B(z)) - B(A(z)) = \sum_{\nu=1}^{n} [A(B_\nu) - B(A_\nu)] \frac{\partial z}{\partial x_\nu}.$$

Für das Rechnen mit diesen Klammerausdrücken gelten folgende Rechenregeln:

$$(3)\qquad \begin{cases} \{A, B\}(z) = -\{B, A\}(z), \quad \{A, A\}(z) \equiv 0, \\ \{A, B + C\}(z) = \{A, B\}(z) + \{A, C\}(z) \\ \text{und} \\ \{pA, qB\}(z) = pA(q).B(z) - qB(p)A(z) + p.q\,\{A, B\}(z), \end{cases}$$

wobei p und q Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (und eventuell auch von z) sind.

Aus $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$ folgt auch $\{A, B\}(z) = 0$. Aus den Gl. (1) kann man so durch Bilden der Klammerausdrücke immer neue Differentialgleichungen ableiten, denen z genügen muß. Diese

Gleichungen werden aber von einem gewissen Schritt an Kombinationen der vorhergehenden werden, da ja μ unabhängige Gleichungen nur $n-\mu$ unabhängige Lösungen besitzen.

Man nennt nun ein System

$$(4) \qquad A^{(1)}(z) = 0, \quad A^{(2)}(z) = 0, \quad \ldots, \quad A^{(m)}(z) = 0$$

vollständig, wenn man durch Bildung von Klammerausdrücken keine von den vorhandenen unabhängige Gleichung herstellen kann.

Geht man von dem System (4) zu einem neuen System

$$A'^{(\mu)}(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\mu\nu} A^{(\nu)}(z) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

über, wobei die $\alpha_{\mu\nu}$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind mit von Null verschiedener Determinante $\|\alpha_{\mu\nu}\|$, so ist dieses auch vollständig. Denn bei Bildung der Klammerausdrücke $\{A'^{(\varrho)}, A'^{(\sigma)}\}(z)$ treten lauter Summanden der Form $\{\alpha_{\varrho\beta} A^{(\beta)}, \alpha_{\sigma\gamma} A^{(\gamma)}\}(z)$ auf, die wegen der letzten Formel (3) wieder aus den $A^{(\mu)}$ zusammensetzbar sind.

Wir sagen: Zwei Gl. (1) liegen in Involution, wenn der Klammerausdruck $\{A, B\}(z)$ identisch verschwindet. Verschwinden alle Klammerausdrücke, die aus den Differentialausdrücken (4) herstellbar sind, identisch, so heißt (4) ein vollständiges System in Involution (Jacobi).

Man kann nun durch eine lineare Substitution jedes vollständige System in Involution bringen. Die ersten m Spalten der Funktionalmatrix von (4) mögen z. B. eine von Null verschiedene Determinante liefern (eine m-reihige Determinante muß ja von Null verschieden sein). Zu dieser Determinante $\|A_\nu^{(\mu)}\|$ bilde man die reziproke (inverse) Matrix $\{B_\nu^{(\mu)}\}$ (vgl. II, § 5, 1). Dann setze man

$$A'^{(\mu)}(z) = \sum_{\nu=1}^{m} B_\nu^{(\mu)} A^{(\nu)}(z) \qquad (u = 1, 2, \ldots, m).$$

Auf diese Weise wird erreicht, daß in $A'^{(\mu)}(z)$ von den ersten m Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial x_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, m)$ nur $\dfrac{\partial z}{\partial x_\mu}$ auftritt, und zwar mit dem Koeffizienten 1 versehen. Das neue System ist mit (4) äquivalent, es ist vollständig, und es ist ein Involutionssystem. Denn es ist $\{A'^{(\nu)}, A'^{(\sigma)}\}(z) \equiv 0$, da wegen der Definition (2) die Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial y_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, m)$ in dem Klammersymbol nicht auftreten, dieses aber eine lineare Kombination der m Differentialausdrücke $A'^{(\mu)}(z)$ sein

muß; in einer solchen können jedoch die ersten m Ausdrücke $\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}$ nur verschwinden, wenn die m Koeffizienten der $A'^{(\mu)}(z)$ verschwinden, d. h. es muß $\{A'^{(\nu)}, A'^{(\sigma)}\}(z) \equiv 0$ sein.

2. Theorie eines vollständigen Involutionssystems. Sei jetzt das System

$$(4') \qquad A^{(\mu)}(z) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ein vollständiges Involutionssystem.

Ist $A^{(\nu)}(z_1^{(\nu)}) = 0$, so ist auch $A^{(\varrho)}(z_1^{(\nu)})$ eine Lösung der ν-ten Gleichung. Das folgt aus der Beziehung:

$$A^{(\nu)}\left(A^{(\varrho)}(z_1^{(\nu)})\right) - A^{(\varrho)}\left(A^{(\nu)}(z_1^{(\nu)})\right) = \{A^{(\nu)}, A^{(\varrho)}\}(z_1^{(\nu)}) \equiv 0.$$

Ein vollständiges Lösungssystem von $A^{(1)}(z) = 0$ sei z. B. $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}$. Dann ist die allgemeine Lösung dieser ersten Gleichung von der Form

$$z = \Phi^{(1)}\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}\right).$$

Nun soll aber z auch der zweiten Gleichung genügen. Also:

$$(5) \qquad A^{(2)}(z) = A^{(2)}\left(z_1^{(1)}\right)\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + \cdots + A^{(2)}\left(z_{n-1}^{(1)}\right)\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_{n-1}^{(1)}} = 0.$$

Nach der eben gemachten Bemerkung sind nun alle $A^{(2)}(z_\nu^{(1)})$ als Integrale von $A^{(1)}(z) = 0$ als Funktionen von $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}$ schreibbar. (5) besitzt also als eine partielle Differentialgleichung der $n-1$ Variablen $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}$ ein vollständiges Lösungssystem der Gestalt: $z_1^{(2)}\left(z_1^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}\right), \ldots, z_{n-2}^{(2)}\left(z_1^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}\right)$. In bezug auf die $z_\nu^{(1)}$ haben die $z_\mu^{(2)}$ den Rang $n-2$. Ich behaupte, sie haben den Rang $n-2$ auch als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dies folgt sofort aus folgendem Satz über lineare Substitutionen:

Das System

$$v_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

habe den Rang $m (\leqq n)$, das System

$$\xi_\nu = \sum_{\varrho=1} b_{\nu\varrho}\eta_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

den Rang $n (\leqq l)$. Dann hat das System der v_μ als Funktionen der η_ϱ wieder den Rang m.

Beweis: Andernfalls könnte man mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten α eine solche Relation erhalten:

$$0 = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu v_\mu(\eta) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu a_{\mu\nu}.$$

Das geht aber nicht, da die ξ_ν linear unabhängig sein sollen und nicht alle Ausdrücke $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu a_{\mu\nu}$ verschwinden können, weil die Matrix der $a_{\mu\nu}$ den Rang m haben soll.

Das gleiche Verfahren wie vorhin bei den ersten beiden Gleichungen des Systems (4) wende man jetzt auf die Gl. (5) und die dritte Gleichung von (4) an. Man erhält so:

$$(6) \qquad A^{(3)}(z) = A^{(3)}(z_1^{(2)}) \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + \cdots + A^{(3)}(z_{n-2}^{(2)}) \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_{n-2}^{(2)}} = 0,$$

wenn $z = \Phi^{(2)}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_{n-2}^{(2)})$ als allgemeines Integral von (5) dargestellt ist. Eine vollständige Lösung von (6) $z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots, z_{n-3}^{(3)}$ besitzt sowohl in der Abhängigkeit von $z_1^{(2)}, \ldots, z_{n-2}^{(2)}$, als auch in der Abhängigkeit von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Rang $n-3$. So fortfahrend gelangt man schließlich zu einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit $n - m + 1$ unabhängigen Variablen, also mit $n - m$ unabhängigen Lösungen.

3. Charakteristiken und Anfangswertproblem. Eine Lösung des Systems (4) bleibt sicher konstant längs jeder Charakteristik jeder einzelnen Gleichung des Systems. Betrachtet man eine Kurve

$$(7) \qquad \frac{d x_\nu}{d t} = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu A_\nu^{(\mu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist längs dieser Kurve jede Lösung z von (4) konstant. Denn schreitet man längs dieser Kurve fort, so hat man

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_\nu} \frac{d x_\nu}{d t} = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu A^{(\mu)}(z) = 0.$$

Das besagt nun, daß es in jedem Punkte im x-Raume ein m-dimensionales Richtungsbündel gibt, derart, daß z konstant bleibt, wenn man in einer Richtung dieses Bündels fortschreitet.

Analog wie in § 1 kann man nun beweisen, daß es *eine, und nur eine Lösung z des Systems (4) gibt, die auf einer $(n-m)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit des x-Raumes vorgegebene stetig differenzierbare Werte annimmt, vorausgesetzt, daß diese Mannigfaltigkeit in keinem Punkte von einer charakteristischen Richtung berührt wird.* Ist die

$(n-m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit in Parameterform durch die Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$ gegeben, also

$$x_\nu = f_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}),$$

so drückt sich die letzte Bedingung darin aus, daß die n-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial t_{n-m}} & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \cdots A_1^{(m)} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \frac{\partial f_n}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial t_{n-m}} & A_n^{(1)} & A_n^{(2)} \cdots A_n^{(m)} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein muß. Ist dagegen die Mannigfaltigkeit durch m Gleichungen gegeben, etwa in der Form

$$g_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m),$$

so hat man die Bedingung, daß die m-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} A^{(1)}(g_1) & A^{(1)}(g_2) \cdots A^{(1)}(g_m) \\ A^{(2)}(g_1) & A^{(2)}(g_2) \cdots A^{(2)}(g_m) \\ \vdots & \\ A^{(m)}(g_1) & A^{(m)}(g_2) \cdots A^{(m)}(g_m) \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfallen muß. Denn eine charakteristische Richtung (7) berührt die Mannigfaltigkeit, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\varrho}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu A_\nu^{(\mu)} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Das gibt aber das Gleichungssystem

$$\sum \alpha_\mu A^{(\mu)}(g_\varrho) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m),$$

welches nur lösbar ist, wenn die vorhin angegebene Determinante verschwindet.

4. Ein Beispiel. Es wird nützlich sein, die dargelegte Theorie auf ein Beispiel anzuwenden. Es sei:

$$(8) \qquad \begin{cases} A(z) = x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial z}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_4} = 0, \\ B(z) = x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial z}{\partial x_4} = 0. \end{cases}$$

Gefragt ist nach einem vollständigen Lösungssystem dieser beiden Gleichungen.

Das System (8) liegt nicht in Involution; denn durch Bildung des Klammerausdruckes (2) erhält man noch die folgende Gleichung, der z auch genügen muß:

$$(9) \qquad C(z) = x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial z}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial z}{\partial x_4} = 0.$$

Statt (8) und (9) kann ich folgendes System behandeln:

$$(10) \qquad \begin{cases} A_1(z) = {}^1/_2 (C(z) + A(z)) = x_2 \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_4 \dfrac{\partial z}{\partial x_3} = 0, \\ B_1(z) = ({}^1/_2 A(z) - C(z)) = x_1 \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial z}{\partial x_4} = 0, \\ C_1(z) = \qquad B(z) \qquad = x_1 \dfrac{\partial z}{\partial x_1} - x_2 \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \\ \qquad\qquad\qquad + x_3 \dfrac{\partial z}{\partial x_3} - x_4 \dfrac{\partial z}{\partial x_4} = 0. \end{cases}$$

Für die drei Klammerausdrücke erhält man:

$$\begin{aligned} \{A_1, B_1\}(z) &= -C_1(z), \\ \{A_1, C_1\}(z) &= 2 A_1(z), \\ \{B_1, C_1\}(z) &= -2 B_1(z). \end{aligned}$$

Das System (10) ist somit **vollständig**, da es drei Gleichungen enthält, müssen alle Lösungen z Funktion einer einzigen sein. Um das System (10) in Involution zu bringen, löse man die ersten beiden Gleichungen nach $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ bzw. $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ auf und setze diese Ausdrücke in die dritte ein. Nach einer kurzen Umrechnung der dritten Gleichung und Einsetzen in die erste erhält man dann das sicher **in Involution** liegende neue System:

$$(11) \qquad \begin{cases} A_2(z) = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} - \dfrac{x_4}{x_1} \dfrac{\partial z}{\partial x_4} = 0, \\ B_2(z) = \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + \dfrac{x_3}{x_1} \dfrac{\partial z}{\partial x_4} = 0, \\ C_2(z) = \dfrac{\partial z}{\partial x_3} + \dfrac{x_2}{x_1} \dfrac{\partial z}{\partial x_4} = 0. \end{cases}$$

Die erste Gl. (11) muß drei unabhängige Integrale besitzen. Zwei davon sind offenbar x_2 und x_3. Um das dritte zu finden, bilde man die noch fehlende charakteristische Gleichung:

$$\frac{d x_1}{x_1} = - \frac{d x_4}{x_4};$$

das liefert

$$\log x_1 + \log x_4 = \text{const} \quad \text{oder} \quad y = x_1 . x_4 = \text{const}.$$

Die allgemeine Lösung von $A_2(z) = 0$ ist demnach von der Form

$$z = F(x_2, x_3, y).$$

$B_2(F) = 0$ geht jetzt über in:

$$\text{(12a)} \quad B_3(F) = B_2(x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + B_2(x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + B_2(y)\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Analog geht $C_2(F) = 0$ über in

$$\text{(12b)} \qquad C_3(F) = \frac{\partial F}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Wegen der charakteristischen Gleichungen von (12a):

$$\frac{d x_2}{1} = \frac{d x_3}{0} = \frac{d y}{x_3}$$

erhält man als vollständiges Lösungssystem von $B_3(F) = 0$

$$x_3 = \text{const} \quad \text{und} \quad u = y - x_2 x_3 = x_1 x_4 - x_2 x_3 = \text{const}.$$

Also wird die allgemeine Lösung von der Form $F = G(x_3, u)$. Aus $C_3(G) = 0$ wird:

$$\frac{\partial G}{\partial x_3} + \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial u}{\partial y}\right]\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0.$$

Ein Integral hiervon ist $u = x_1 x_4 - x_2 x_3$. Die allgemeine Lösung von (9) ist daher darstellbar in der Form:

$$z = \Phi(x_1 x_4 - x_2 x_3).$$

§ 3. Allgemeine partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Vorbemerkungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen. Wenn wir die Charakteristikenmethode auf die Gleichung von allgemeinerem Typus

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

mit

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

übertragen wollen, so haben wir wieder wie in § 1, 6 in einem Raumpunkt $P = (x, y, z)$ die Stellung der in diesem Punkte möglichen Tangentenebenen von Integralflächen zu untersuchen. Die Gl. (1) stellt eine Relation zwischen p und q her, so daß also nur eine einparametrige Schar von Tangentenebenen möglich ist, die durch

$$\text{(2)} \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

dargestellt sind. Diese durch den Punkt P gehende Schar von Ebenen umhüllt im allgemeinen einen Kegel, den man den Mongeschen Kegel nennt. Um diesen Kegel als Erzeugnis seiner Seitenlinien darzustellen, berechnet man die Einhüllende von (2) unter Berücksichtigung von (1). In (1) und (2) werden p und q als Parameter aufgefaßt, nach denen zu differenzieren ist. Der eine Parameter ist vom andern abhängig; um jedoch keinen zu bevorzugen, wählen wir die Schreibweise der Differentiale:

$$\frac{\partial F}{\partial p} d p + \frac{\partial F}{\partial q} d q = 0, \quad (X - x) d p + (Y - y) d q = 0.$$

Da aus diesem System nicht folgen darf $d p = 0$, $d q = 0$, so muß die Determinante verschwinden, also

$$\frac{\partial F}{\partial p}(Y - y) - \frac{\partial F}{\partial q}(X - x) = 0. \tag{3}$$

Denkt man sich aus (1), (2) und (3) die Parameter p und q eliminiert, so erhält man aus den laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung des durch P gehenden Mongeschen Kegels. Daß die sich ergebende Gleichung einen Kegel darstellt, mit P als Spitze, erkennt man daraus, daß die Gleichungen für $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ sämtlich erfüllt sind und daß, wenn X, Y, Z den Gleichungen genügen, dies auch von

$$X' = x + \lambda(X - x), \quad Y' = y + \lambda(Y - y), \quad Z' = z + \lambda(Z - z)$$

für beliebiges λ gilt.

Die Integralfläche muß nun in jedem Punkte den zugehörigen Mongeschen Kegel berühren, und zwar längs einer Seitenlinie. Die gesuchten Charakteristiken müssen also in jedem Raumpunkt von einer Seitenlinie des zugehörigen Mongeschen Kegels berührt werden. Aus (2) und (3) folgen somit die charakteristischen Differentialgleichungen

$$d z = p\, d x + q\, d y, \quad F_p\, d y = F_q\, d x,$$

woraus man durch leichte Umformung erhält:

$$\frac{d x}{F_p} = \frac{d y}{F_q} = \frac{d z}{p F_p + q F_q}. \tag{4}$$

Jede Kurve, die diesen Differentialgleichungen genügt, besitzt als Tangenten nur Seitenlinien Mongescher Kegel; sie mögen Mongesche Integralkurven heißen. Sie sind in sehr hoher Mannigfaltigkeit vorhanden, denn in den Gl. (4) sind noch p und q als zwei willkürliche Funktionen von x, y, z verfügbar, die nur der Relation (1) genügen müssen. Die Mongeschen Integralkurven hängen also noch von einer willkürlichen Funktion ab.

Um nun aus dieser Mannigfaltigkeit die Charakteristiken auszusondern, benutzen wir jetzt erst die Tatsache, daß die Charakteristiken auf den Integralflächen liegen sollen. Es sei $z = z(x, y)$ eine solche. Dann sind auch $p = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ als Funktionen von x und y bestimmt, und es folgt aus (1) durch Differentiation nach x

$$F_x + F_z \cdot p + F_p \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Wir multiplizieren mit dx und bemerken, daß auf der Integralfläche $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ gilt; dann erscheint:

$$F_p \frac{\partial p}{\partial x} dx + F_q \frac{\partial p}{\partial y} dx = -(F_z p + F_x) dx.$$

Unter Benutzung der ersten Gl. (4) erhalten wir hieraus

$$F_p \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) = -(F_z p + F_x) dx.$$

Da nun $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$ geschrieben werden kann, so ist

$$\text{(4a)} \qquad -\frac{dp}{F_x + pF_z} = \frac{dx}{F_p}$$

eine Differentialgleichung für p. Analog folgt eine solche für q:

$$\text{(4b)} \qquad -\frac{dq}{F_y + qF_z} = \frac{dy}{F_q}.$$

Führen wir aus Symmetriegründen noch eine neue Variable t ein, so sind zusammengefaßt die gesuchten charakteristischen Differentialgleichungen:

$$\text{(5)} \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt.$$

Wir fassen in diesem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen t als die unabhängige Variable auf. Sind x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 vorgeschriebene Anfangswerte der gesuchten Funktionen x, y, z, p, q, die für $t = 0$ angenommen werden, so erscheinen die Lösungen von (5) in der Form:

$$\text{(6a)} \quad \begin{cases} x = \varphi_1(t; \; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ y = \varphi_2(t; \; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ z = \varphi_3(t; \; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \end{cases}$$

$$\text{(6b)} \quad \begin{cases} p = \psi_1(t; \; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ q = \psi_2(t; \; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0). \end{cases}$$

Da die Anfangswerte noch die Gleichung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ befriedigen müssen, so sind von den Parametern nur vier verfügbar, und (6a) stellt eine dreiparametrige Kurvenschar dar, denn man braucht bei der Zählung der Parameter nur die Kurven zu betrachten, die etwa die Ebene $x_0 = 0$ schneiden. Längs jeder Charakteristik sind noch die Funktionen p und q gegeben[1]).

Im Falle der planaren Differentialgleichung § 1, (2) artet an jeder Stelle der Mongesche Kegel in eine Gerade aus und sämtliche durch diese hindurchgehenden Ebenen sind mögliche Tangentialebenen einer Lösungsfläche von § 1, (2). Das System der Gl. (5) zerfällt, da in den beiden ersten Gleichungen p und q nicht mehr auftreten; die den Gl. (5) genügenden Mongeschen Kurven hängen also nicht mehr von der Anfangsstellung der Tangentialebene ab; jede dieser Kurven ist der Träger einer einparametrigen Schar von charakteristischen Streifen.

2. Vektorform der Charakteristikengleichungen. Wie schon aus unserer Ableitung hervorgeht, zerfallen die charakteristischen Gl. (5) in zwei Gruppen: 1. die Differentialgleichungen (4), die aussagen, daß die Charakteristiken in jedem Punkte den dort definierten Mongeschen Kegel in einer Seitenlinie berühren; 2. die Gl. (4a) und (4b), die aus der Bedingung erhalten wurden, daß die Charakteristiken auf den Integralflächen liegen müssen. Die letzteren Gleichungen kann man nun in folgender Weise, unabhängig von dem speziell gewählten Koordinatensystem, als eine Vektorgleichung schreiben: Bedeutet $\mathfrak{x}$ den Ortsvektor eines Raumpunktes, $\bar{\nu}$ mit den Komponenten

$$\nu_x = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \nu_y = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \nu_z = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

den Normalvektor im Punkte $\mathfrak{x}$ auf einer durch $\mathfrak{x}$ gehenden Integralfläche von (1), so kann man die Gleichung (1) kurz in der Form

$$F(\mathfrak{x}, \bar{\nu}) = 0 \tag{1a}$$

schreiben. Wir behaupten nun, daß man die Gl. (4a) und (4b) durch

$$\left(\bar{\nu} \times \frac{d\bar{\nu}}{dt}\right) \operatorname{grad} F \equiv \left(\bar{\nu}, \frac{d\bar{\nu}}{dt}, \operatorname{grad} F\right) = 0 \tag{4'}$$

ersetzen kann, wo t den auch in der Schreibweise (5) benutzten Parameter längs der Charakteristik bedeute und $\operatorname{grad} F$ bei konstantem $\bar{\nu}$ zu bilden ist. Denn nach II, § 3, (11) läßt sich (4') in

[1]) Man spricht deshalb oft statt von Charakteristiken von „charakteristischen Streifen".

unserem zugrunde gelegten rechtwinkligen Koordinatensystem in Determinantenform so schreiben:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot dt}\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ dp & dq & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

und daraus folgt

$$\frac{dp}{dq} = \frac{F_x + pF_z}{F_y + qF_z},$$

übereinstimmend mit den letzten Gl. (5). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}(t) = n(t)\bar{\nu}$ einen Vektor der $\bar{\nu}$-Richtung, dessen Länge eine beliebige differenzierbare Funktion des Parameters t ist, so können wir statt (4′) auch

$$(4'') \qquad \left(\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dt}, \operatorname{grad} F\right) = 0$$

schreiben, da der jetzt in der zweiten Zeile der Determinante noch auftretende Zusatzsummand $\bar{\nu}\cdot\frac{dn}{dt}$ der ersten Zeile proportional ist, also den Wert der Determinante nicht ändert.

Faßt man t als einen Zeitparameter auf, so kann man sagen: Die Normale $\bar{\nu}$ der Integralfläche im Punkte $\mathfrak{x}$ wird im Zeitelement dt in die Normalenrichtung desjenigen Punktes, der ihm längs der Charakteristik benachbart ist, durch Drehung übergeführt. (4′) bzw. (4″) besagen nun, daß die Achse dieser infinitesimalen Drehung auf dem Vektor $\operatorname{grad} F$ senkrecht steht, wobei man aber nicht vergessen darf, daß $\operatorname{grad} F$ noch von $\bar{\nu}$ abhängt.

3. Anfangswertproblem. Betrachtet man die allgemeine Differentialgleichung

$$(7) \qquad F(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0$$

mit

$$p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$$

und schreitet längs einer Lösung fort, so muß gelten:

$$(8) \qquad \frac{dF}{dx_\varrho} = F_z . p_\varrho + F_{x_\varrho} + \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial x_\varrho} = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots n).$$

Lassen wir in Analogie zum vorigen Paragraphen die x_ϱ eine bestimmte Kurve durchlaufen, nämlich

$$(9\text{a}) \qquad \frac{dx_\varrho}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots n),$$

so muß wegen

$$\frac{\partial p_\varrho}{\partial x_\nu} = \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\varrho}$$

gelten:

$$\frac{d p_\varrho}{d t} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial p_\varrho}{\partial x_\nu} \frac{d x_\nu}{d t} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\varrho} F_{p_\nu}.$$

Mit Hilfe von (8) erhält man daraus:

$$\text{(9b)} \qquad \frac{d p_\varrho}{d t} = -(F_{x_\varrho} + p_\varrho F_z) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots n).$$

Noch leichter folgt:

$$\text{(9c)} \qquad \frac{d z}{d t} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_\nu} \frac{d x_\nu}{d t} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F_{p_\nu}.$$

(9a) bis (9c) sind die $2n+1$ charakteristischen Differentialgleichungen, sie bestimmen eine Kurvenschar im $(2n+1)$-dimensionalen Raum, die Charakteristiken. Zwei Integrale z von (7), die in einem Punkt der Kurve (9a) samt ihren ersten Ableitungen übereinstimmen, stimmen längs der ganzen Kurve (9a) überhaupt überein. Die zwei Integrale berühren sich also längs der Charakteristik. Schreibt man über dem n-dimensionalen Raum ein Element vor, d. h. einen Punkt nebst Tangentialebene, so ist dadurch nach (9a), (9b) und (9c) die Charakteristik bestimmt.

Es sei nun auf einer Ausgangsmannigfaltigkeit

$$\text{(10)} \qquad x_\nu = x_\nu(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

vom Range $n-1$ der Wert von z vorgeschrieben, also

$$\text{(11)} \qquad z = z(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}),$$

und zwar mögen die ersten partiellen Ableitungen stetig sein. Dann folgt durch Differentiation:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial z}{\partial \tau_k} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_k} p_\nu = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Das sind $n-1$ Gleichungen für die n Größen p_ν. Dazu tritt als n-te Gleichung noch die gegebene Differentialgleichung (7). Natürlich müssen auf unserer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Werte x_ν und z so beschaffen sein, daß sie dort den n Gleichungen genügen. Ist nun

$$\text{(13)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_{n-1}} \\ F_{p_1} & F_{p_2} & \cdots & F_{p_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so kann ich die n Gleichungen nach $p_1, p_2, \dots p_n$ auflösen und erhalte eine Parameterdarstellung der Form

(14) $$p_\nu = p_\nu(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{n-1}) \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

Die Bedingung (13) bedeutet dabei, daß die einparametrige Richtungsschar

(15) $$dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n = F_{p_1} : F_{p_2} : \cdots : F_{p_n}$$

im x-Raum die gegebene Mannigfaltigkeit nicht berührt. (15) stellt aber gerade die Richtungen der Kurven (9a) dar. Aus (12) und der charakteristischen Gl. (9c) sieht man, daß im $(n+1)$-dimensionalen Raum der $z, x_1, x_2, \dots x_n$ zu dem Schema (13) eine Spalte hinzukommt, die von den schon vorhandenen n Spalten linear abhängt. Die neue Matrix hat mithin den gleichen Rang wie die Matrix (13). Wir können daher die Auflösungsbedingung (13) auch so aussprechen: Keine Mongesche Integralkurve darf die gegebene Mannigfaltigkeit berühren.

Bei zwei unabhängigen Veränderlichen ist also eine Integralfläche $z = z(x_1, x_2)$ gesucht, die durch eine gegebene Kurve

(16) $$x_\nu = f_\nu(\tau), \quad z = g(\tau) \quad (\nu = 1, 2)$$

hindurchgeht. Aus den Gleichungen

(12') $$-g'(\tau) + f_1'(\tau) p_1 + f_2'(\tau) \cdot p_2 = 0,$$
(1) $$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0,$$

deren Funktionaldeterminante

(16') $$\begin{vmatrix} f_1'(\tau) & f_2'(\tau) \\ F_{p_1} & F_{p_2} \end{vmatrix}$$

wir als nicht verschwindend vorauszusetzen haben, lassen sich p_1 und p_2 berechnen. Die letzte Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß die Matrix

$$\begin{vmatrix} g'(\tau) & f_1'(\tau) & f_2'(\tau) \\ \dfrac{dz}{dt} & \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dx_2}{dt} \end{vmatrix},$$

wo die obere Zeile die Richtung der gegebenen Kurve, die untere jede Richtung des zu dem betreffenden Punkte gehörenden Mongeschen Kegels bedeutet, den Rang 2 besitzt. Die Auflösung möge

(17) $$p_1 = h_1(\tau), \quad p_2 = h_2(\tau)$$

liefern. (16) und (17) bestimmen nun eine Kurve im 5-dimensionalen Raum der x_1, x_2, z, p_1, p_2. An jeden Punkt dieser Kurve setze ich nun die nach (5) als Funktionen von t bestimmten Charakteristiken

an, die für $t = 0$ auf unserer Kurve die errechneten Anfangswerte besitzen. Ich habe also:

$$(18)\qquad \begin{cases} x_\nu = x_\nu(\tau, t) & x_\nu(\tau, 0) = f_\nu(\tau) \\ z = z(\tau, t) & z(\tau, 0) = g(\tau) \\ p_\nu = p_\nu(\tau, t) & p_\nu(\tau, 0) = h_\nu(\tau) \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Es ist nun zu zeigen, daß durch die linke Spalte der Gl. (18) eine der Differentialgleichung (1) genügende Fläche bestimmt ist.

4. Verifikation der Lösung. Von unseren Funktionen (18) wissen wir zunächst nur, daß für $t = 0$

$$(12'')\qquad A(t, \tau) \equiv \frac{\partial z}{\partial \tau} - \sum_{\nu=1}^{2} p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} = 0$$

gilt, ferner für beliebige t und τ die Gl. (9a), (9b) und (9c). Aus letzteren folgt sofort

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum F_{x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial t} + F_z \frac{\partial z}{\partial t}$$
$$= \sum F_{x_\nu} F_{p_\nu} - \sum F_{p_\nu}(F_{x_\nu} + p_\nu F_z) + \sum F_z p_\nu F_{p_\nu} = 0.$$

Da für $t = 0$ F für alle τ verschwindet, verschwindet also F für alle t und τ.

Ich zeige jetzt, daß der durch (12'') definierte Ausdruck $A(t, \tau)$ für alle t und τ identisch verschwindet. Denn es gilt:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial \tau} - \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right),$$

da ja die zweite Klammer wegen (9a) und (9c) verschwindet. Mithin:

$$(19)\qquad \frac{\partial A}{\partial t} = -\sum \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} + \sum \frac{\partial p_\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

Aus dem identischen Verschwinden von F folgt:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \tau} = \sum F_{x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} + \sum F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial \tau} + F_z \frac{\partial z}{\partial \tau},$$

$$0 = F_z\left(\frac{\partial z}{\partial \tau} - \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}\right) + \sum (F_{x_\nu} + p_\nu F_z) \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} + \sum F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial \tau},$$

$$0 = F_z A + \sum \frac{\partial p_\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x_\nu}{\partial t} - \sum \frac{\partial p_\nu}{\partial t} \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}.$$

Subtrahiert man dies von (19), so hat man in

$$(20)\qquad \frac{\partial A}{\partial t} = -F_z A$$

eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung für A. Da nun für $t = 0$ und alle τ A verschwindet, muß daher A identisch in t und τ verschwinden, d. h. es gilt

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}$$

für alle t und τ. Andererseits ist wegen (9c)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum p_\nu F_{p_\nu} = \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial t},$$

mithin

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial \tau} = \sum p_\nu d x_\nu. \tag{21}$$

Da nun für $t = 0$ die Funktionaldeterminante (16') nicht verschwindet, kann man für kleine t $x_1(t, \tau)$ und $x_2(t, \tau)$ nach t und τ auflösen. Man erhält so etwa:

$$t = \varphi(x_1, x_2), \quad \tau = \psi(x_1, x_2), \quad z = z(x_1, x_2), \quad p_\nu = p_\nu(x_1, x_2).$$

Aus (21) folgt jetzt:

$$p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}.$$

Damit ist der Beweis erbracht, daß die Funktionen der ersten Spalte (18) die durch die vorgegebene Kurve gehende Integralfläche von (1) in Parameterdarstellung liefern.

Bei n Veränderlichen verläuft der Beweis genau so.

§ 4. Liesche Theorie des Elementenvereins

1. Definition des Elementenvereins. Um die Überlegungen des vorigen Paragraphen auf eine breitere Grundlage zu stellen, gehen wir aus vom Begriff des Elements. Darunter verstehen wir einen Punkt $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nebst der Stellung einer durch ihn hindurchgehenden Ebene, die durch die Angabe der p_ν bestimmt ist. Unter einer m-dimensionalen Schar von Elementen versteht man daher die Angabe von $2n + 1$ Funktionen der Art:

$$\begin{cases} x_\nu = f_\nu(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \\ p_\nu = g_\nu(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n), \\ z = h(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \end{cases} \tag{1}$$

wenn deren Funktionalmatrix den Rang m hat. Von einem m-dimensionalen Elementenverein spricht man dann, wenn identisch für die ganze Schar, also identisch in $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m$, gilt:

$$dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu d x_\nu = 0. \tag{2}$$

(2) vertritt hier also die m Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial \tau_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots m).$$

Zur Erläuterung der Begriffsbildung betrachten wir den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen. Wir untersuchen zunächst einen zweidimensionalen Elementenverein:

$$(1') \qquad \begin{cases} x_\nu = f_\nu(\tau_1, \tau_2) \\ p_\nu = g_\nu(\tau_1, \tau_2) \quad (\nu = 1, 2). \\ z = h(\tau_1, \tau_2) \end{cases}$$

Ist

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so kommt das Frühere heraus. Der Elementenverein ist eine Fläche $z(x_1, x_2)$.

Verschwindet (3) nur in einem Punkte, so ist das ein singulärer Punkt, den wir von der Betrachtung ausschließen wollen.

Hat (3) den Rang 1, so ist z. B. x_2 als Funktion von x_1 darstellbar (oder umgekehrt). Dann kann man x_1 und irgendeinen anderen Parameter u (z. B. $u = \tau_1$ oder $u = \tau_2$) als neue Parameter einführen und erhält:

$$(4) \quad x_1 = x_1, \ x_2 = f(x_1), \ z = g(x_1), \ p_1 = p_1(x_1, u), \ p_2 = p_2(x_1, u).$$

Aus der Bedingung (2) folgt aber:

$$g'(x_1) - p_1 - p_2 f'(x_1) = 0, \quad p_1 = g'(x_1) - p_2 f'(x_1).$$

Man kann demnach die fünf Funktionen (4) als Funktionen von x_1 und p_2 darstellen, da der Rang von (1') gleich 2 sein sollte.

$$(4') \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \quad x_2 = f(x_1), \quad z = g(x_1), \\ p_1 = g'(x_1) - p_2 f'(x_1), \quad p_2 = p_2. \end{cases}$$

Das ist eine Kurve und dazu in jedem ihrer Punkte die einparametrige Schar ihrer Tangentialebenen.

Hat (3) den Rang 0, so sind x_1 und x_2, mithin auch z, konstant. Die Bedingung (2) $dz = \sum p_\nu dx_\nu$ ist jetzt keine Forderung mehr. Wir erhalten also als Elementenverein einen Punkt im Raum und sämtliche durch ihn gehenden Ebenen.

Bei einem eindimensionalen Elementenverein

$$x_\nu = x_\nu(\tau), \quad p_\nu = p_\nu(\tau), \quad z = z(\tau)$$

erhalten wir, falls der Rang von x_1 und x_2 in bezug auf τ 1 ist, eine Kurve und durch jeden ihrer Punkte nur eine Tangentialebene. Im Falle, daß der Rang von x_1 und x_2 0 ist, erscheint ein Punkt mit einer durch ihn hindurchgehenden eindimensionalen Schar von Ebenen.

Mehr als zwei unabhängige Parameter kann offenbar im Raum kein Elementenverein besitzen. Analog bei n unabhängigen Veränderlichen.

2. Charakteristikentheorie. Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung

$$F(z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n) = 0 \tag{5}$$

und ein m-dimensionaler Elementenverein

$$x_\nu = x_\nu(\tau_1, \dots \tau_m), \quad p_\nu = p_\nu(\tau_1, \dots \tau_m), \quad z = z(\tau_1, \dots \tau_m), \tag{6}$$

der der Gl. (5) genügt. Ich will daraus einen ihn enthaltenden $(m+1)$-dimensionalen Elementenverein machen, der der Gl. (5) genügt. Die Richtung der Charakteristiken

$$\frac{dx_\nu}{dt} = F_{p_\nu}, \quad \frac{dz}{dt} = \sum p_\nu F_{p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -(F_{x_\nu} + p_\nu F_z) \tag{7}$$

möge im Raume von $2n+1$ Dimensionen die Mannigfaltigkeit (6) nicht berühren, d. h. die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \tau_m} & F_{p_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tau_m} & F_{p_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \tau_m} & -F_{x_1} - p_1 F_z \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial z}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z}{\partial \tau_m} & \sum p_\nu F_p \end{pmatrix} \tag{8}$$

möge den Rang $m+1$ besitzen. An jedes Element des Elementenvereins (6) setze ich nun die durch dasselbe eindeutig bestimmte Charakteristik an. Das neue Gebilde hat dann für kleine t sicher den Rang $m+1$, da für $t=0$ die Matrix (8) erscheint. Für $t=0$ ist $F=0$. Nun ist aber

$$\frac{dF}{dt} = \sum F_{x_\nu} \frac{dx_\nu}{dt} + \sum F_{p_\nu} \frac{dp_\nu}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \equiv 0$$

wegen (7). Mithin erfüllt unsere $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit die Gl. (5). Jetzt ist nur noch zu zeigen, daß sie einen Elementenverein darstellt. Dazu muß ich neben der wegen (7) sicher erfüllten Relation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = 0$$

noch zeigen:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau_\varrho} - \sum p_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_\varrho} \equiv A_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots m). \tag{9}$$

Dies folgt aus der genau wie in § 3, **4** zu erhaltenden gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial A_\varrho}{\partial t} = -F_z \cdot A_\varrho,$$

da für $t = 0$ A_ϱ verschwindet, weil dann unser gegebener Elementenverein (6) erscheint.

Ist $m = n - 1$, so erhält man auf diese Weise ein Integral[1]), d. h. einen n-dimensionalen Elementenverein, der (5) erfüllt, und dieses Integral ist eindeutig durch den $(n-1)$-dimensionalen Elementenverein bestimmt.

3. Die Mongeschen Integralkurven. Wir kehren noch einmal zu den Sätzen des § 3 zurück. Wir haben dort ausgeschlossen, daß die vorgeschriebene Kurve, durch die die Integralfläche hindurchgehen soll, eine Mongesche Integralkurve ist. Da die Charakteristiken auch die Gl. (4) des § 3 erfüllen, so sind sie selbst spezielle Mongesche Kurven. Vorzuschreiben aber, daß die Integralfläche durch eine gegebene Charakteristik gehe, liefert gewiß keine eindeutige Bestimmung der Integralfläche. Es sei also das vorgeschriebene Kurvenstück eine Mongesche Integralkurve, falle jedoch in keinem seiner Teile mit einer Charakteristik zusammen. Durch jeden Punkt einer Integralkurve geht offenbar genau eine Charakteristik, deren Trägerkurve dort die Integralkurve berührt. Der zugehörige charakteristische Streifen muß nämlich den Mongeschen Kegel längs der durch die Richtung der Integralkurve vorgeschriebenen Seitenlinie berühren, womit in jedem Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ der Mongeschen Kurve auch die Größen p_0 und q_0 bestimmt sind, also eine Charakteristik herausgegriffen ist. Die Gesamtheit aller die vorgelegte Mongesche Integralkurve berührenden Charakteristiken bildet aber auch hier eine Integralfläche; denn für den entstehenden zweidimensionalen Elementenverein kann nach den in **1** angeführten Beispielen die Determinante (3) in der Umgebung der Mongeschen Kurve nicht identisch verschwinden.

[1]) Vgl. das Beispiel in § 7, 1.

Jede Mongesche Integralkurve läßt sich somit auffassen als Einhüllende einer Schar von Charakteristiken, die auf einer Integralfläche liegen. Sie selbst muß aber eine singuläre Linie der Integralfläche sein. Läge sie nämlich regulär eingebettet in der Integralfläche, so könnte man wie für die Charakteristiken schließen, daß sie auch alle Gl. (5) des § 3 erfüllt, also selbst eine Charakteristik wäre, gegen unsere Voraussetzung. Eine Mongesche Integralkurve liegt zu den Charakteristiken auf der Fläche etwa so, wie die Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche zu den erzeugenden Geraden der Fläche.

§ 5. Das vollständige Integral

1. Allgemeines und singuläres Integral. Die in § 3 durch die Cauchysche Charakteristikenmethode gefundene Lösung ist bestimmt durch die willkürliche Kurve der Anfangswerte [1]), oder, analytisch gesprochen, die Lösung hängt ab von einer willkürlichen Funktion. Eine solche Lösung in analytisch expliziter Form, z. B. die Lösung (4) des Beispiels (3) in § 1, nennt man ein allgemeines Integral, da es die ganze Mannigfaltigkeit von Lösungen erschöpft.

Eine Integralfläche konnten wir durch die Cauchysche Methode offenbar nur gewinnen, wenn die charakteristischen Differentialgleichungen sich regulär verhalten, also nur dort, wo nicht zugleich $F_p = 0$ und $F_q = 0$ erfüllt ist [2]). Da auch außerdem

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

vorgeschrieben ist, so lassen sich diese singulären Punkte von vornherein ohne Integration nur durch Elimination der Variablen p und q oder in Parameterdarstellung $x(p, q)$, $y(p, q)$, $z(p, q)$ bestimmen. Es wird sich dann im allgemeinen eine Fläche ergeben; wofern sie eine Integralfläche ist, nennt man sie ein singuläres Integral.

2. Das vollständige Integral. Nach einer Methode von Lagrange gelingt es, das allgemeine Integral schon aus einer viel geringeren Mannigfaltigkeit von Lösungen durch reine Differentiationsprozesse zu erhalten. Es sei nämlich gelungen, auf irgendeine Weise eine zweiparametrige Lösung von (1) zu finden:

$$(2) \qquad z = V(x, y; a, b).$$

Aus dieser Schar kann man durch die Wahl einer Funktion $b = w(a)$ eine einparametrige Schar herausgreifen:

$$(3) \qquad z = V[x, y; a, w(a)].$$

---

[1]) Wir beschränken uns hier zunächst wieder auf zwei unabhängige Veränderliche.

[2]) Vgl. am besten Gl. (9a) von § 3.

Diese wird im allgemeinen eine Einhüllende besitzen, die man auf bekannte Weise durch Differenzieren von (3) nach dem Parameter und Elimination des Parameters aus (3) und dem Differentiationsergebnis

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \cdot w'(a) = 0 \tag{4}$$

findet. Da diese Einhüllende nun in jedem ihrer Punkte eine Integralfläche berührt, so hat sie in jedem ihrer Punkte die dort einer Integralfläche zukommenden Neigungsgrößen p und q. Die Größen x, y, z, p, q einer Integralfläche erfüllen aber (1). Folglich erfüllt auch die Einhüllende in jedem ihrer Punkte die Gl. (1). Da aber dieses Eliminationsresultat aus (3) und (4) von einer willkürlichen Funktion abhängt, so haben wir auf diese Weise ein allgemeines Integral gefunden. Somit reicht die zweiparametrige Schar von Integralen (2) aus, um das allgemeine Integral zu finden; (2) heißt deshalb nach Lagrange ein vollständiges Integral.

Es kann (4) auch erfüllt werden durch $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$. In diesem Falle lassen sich unter der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

aus den beiden letzten Gleichungen die Parameter a, b als Funktionen von x und y darstellen. Führt man diese in (2) ein, so erhält man eine Integralfläche. Sie ist nämlich die Einhüllende der zweiparametrigen Schar (2), und als solche geometrisch vor anderen Integralflächen, die Einhüllende einparametriger Scharen sind, ausgezeichnet. Eine solche Fläche ist ein singuläres Integral. Man kann nachweisen, daß sie auch $F_p = 0$ und $F_q = 0$ erfüllen muß [1]).

Das vollständige Integral erlaubt auch die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems. Ist eine Kurve gegeben, so kann man eine Integralfläche aus (2) heraussuchen, die durch einen Punkt der Kurve geht und dort die Kurve berührt. Da dies gerade zwei Bedingungen sind, so werden sie im allgemeinen zur Bestimmung von a und b ausreichen. Führt man dies für jeden Punkt der Kurve durch, so ist damit wieder eine einparametrige Schar von Integralen herausgegriffen, deren Einhüllende der Konstruktion zufolge die gegebene Kurve enthalten muß.

---

[1]) Siehe z. B. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, S. 199—202.

3. Die Charakteristiken. Eine bestimmte Integralfläche der einparametrigen Schar berührt die Einhüllende längs einer gewissen Linie. Diese muß aber als eine Kurve, durch die mehrere Integralflächen gehen, eine Charakteristik sein. Für einen bestimmten Wert von a können wir $w(a)$ und $w'(a)$ als beliebige Konstanten b und c wählen, so daß demnach die Gleichungen

$$z = V(x, y;\, a, b), \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} c = 0 \tag{5}$$

eine charakteristische Kurve liefern müssen. Um zu zeigen, daß die hierdurch bestimmte Kurve auch wirklich die charakteristischen Differentialgleichungen (5) des § 3 erfüllt, bemerken wir vor allem, daß, da $V(x, y;\, a, b)$ ein vollständiges Integral sein soll,

$$F\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

identisch in x, y, a und b gelten muß. Durch Differentiation nach a und b folgt hieraus:

$$F_z \frac{\partial V}{\partial a} + F_p \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial a} + F_q \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial a} = 0, \quad F_z \frac{\partial V}{\partial b} + F_p \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial b} + F_q \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial b} = 0.$$

Wegen der zweiten Gl. (5) ergibt Multiplikation der letzten Gleichung mit c und Addition der beiden Gleichungen:

$$F_p \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial a} + c \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial b}\right) + F_q \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial a} + c \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial b}\right) = 0. \tag{7}$$

Die zweite Gl. (5) bindet die Variablen x und y auf unserer zu untersuchenden Kurve aber derart aneinander, daß

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} + c \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} + c \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial y}\right) dy = 0 \tag{8}$$

sein muß. Wir wollen annehmen, daß mindestens eine der Funktionen $\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ wirklich von x oder y abhängt, daß also nicht alle Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial a}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial b}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial a}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial b}$ identisch verschwinden. Dann sind im allgemeinen auch die Klammern in (7) und (8) nicht identisch Null, woraus folgt

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}. \tag{9}$$

Ferner ist

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ dz &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

wodurch (9) ergänzt wird zu

$$\text{(9a)} \qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q}.$$

Endlich ergibt Differentiation von (6) nach x und y

$$F_x + F_z \frac{\partial V}{\partial x} + F_p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F_q \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$F_y + F_z \frac{\partial V}{\partial y} + F_p \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + F_q \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Multiplikation mit dx bzw. mit dy und Benutzung von (9) und (10) ergibt

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} (F_x + pF_z)\,dx + F_p\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dy\right) = 0, \\[2ex] (F_y + qF_z)\,dy + F_q\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dx + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}dy\right) = 0. \end{cases}$$

Aus (10) folgt nun

$$dp = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dy, \qquad dq = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dy,$$

so daß wir aus (11) schließen können:

$$\frac{dx}{F_p} = -\frac{dp}{F_x + pF_z}, \qquad \frac{dy}{F_q} = -\frac{dq}{F_y + pF_z},$$

womit wir die charakteristischen Differentialgleichungen wieder vollzählig erhalten haben.

4. Verallgemeinerung auf n unabhängige Variable. Im Falle von n unabhängigen Variablen läßt sich die Theorie des vollständigen Integrals wie folgt entwickeln. Es sei

$$\text{(12)} \qquad z = V(x_1, x_2 \ldots x_n, \quad \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

ein Integral von

$$\text{(13)} \qquad F(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0$$

mit n Parametern. Soll die Integralfläche bestimmt werden, die die $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Anfangswerten

$$\text{(14)} \qquad x_i = x_i(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{n-1}), \quad z = z(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{n-1})$$

enthält, so bestimmen wir für jedes System $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{n-1}$ das Integral, das den Punkt (14) enthält und dort die Mannigfaltigkeit (14) berührt, also die Gleichungen erfüllt:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} z(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{n-1}) = V \\[1ex] \dfrac{\partial z}{\partial \tau_j} = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial \tau_j} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \tau_j} + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial \tau_j}, \quad j = 1, 2 \ldots (n-1). \end{cases}$$

Durch diese n Gleichungen sind im allgemeinen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ als Funktionen von $\tau_1 \ldots \tau_{n-1}$ bestimmt. Somit ist durch jeden Punkt von (14) ein diese Mannigfaltigkeit berührendes Integral gelegt. Aus

$$(16)\quad z = V(x_1, x_2 \ldots x_n,\ \alpha_1(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}),\ \alpha_2(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}), \ldots \alpha_n(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}))$$

erhalten wir nun das Integral, das (14) ganz enthält, durch eine Umhüllungskonstruktion, die der bei zwei unabhängigen Variablen nachgebildet ist. Aus der Gl. (16) und den $n-1$ Gleichungen

$$(17)\qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_j} + \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau_j} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau_j}$$

eliminieren wir $\tau_1 \ldots \tau_{n-1}$ und erhalten dann z als Funktion von $x_1, x_2 \ldots x_n$. Daß diese Funktion die Eigenschaft hat, alle Wertsysteme (14) zu enthalten, kann man leicht einsehen [1]). Ferner ist

$$(18)\quad F\left(V(x_1, x_2 \ldots x_n,\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n),\ x_1, x_2 \ldots x_n,\ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

identisch erfüllt in den x_i und den Parametern α_i, nach Definition des vollständigen Integrals. Nun ist durch (16) nach Ausführung der Elimination aus (17) z als Funktion von $x_1 \ldots x_n$ gegeben. Ferner ist

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \tau_j}\frac{\partial \tau_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \tau_j}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \tau_j},$$

---

[1]) Aus der ersten Gl. (15) folgt durch Differentiation nach τ_j unter Benutzung der $n-1$ letzten Gl. (15)

$$(15\text{a})\qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_j} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau_j}, \quad j = 1, 2 \ldots (n-1).$$

Aus (17) finden wir durch Auflösung nach $\tau_1 \ldots \tau_{n-1}$:

$$(15\text{b})\qquad \tau_j = T_j(x_1 \ldots x_n).$$

Behauptet wird, daß die Fläche

$$z = V\big(x_1 \ldots x_n,\ \alpha_1(T_1(x_1 \ldots x_n), \ldots T_{n-1}(x_1 \ldots x_n)), \ldots \alpha_n(T_1(x_1 \ldots x_n), \ldots T_{n-1}(x_1 \ldots x_n))\big)$$

die Mannigfaltigkeit (14) enthält. Dies wird bewiesen sein, wenn man gezeigt hat, daß

$$(15\text{c})\quad \tau_j = T_j(x_1(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}),\ x_2(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}), \ldots x_n(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}))$$

gilt. Nun ist aber (15b) aus (17) gewonnen. Wird in (17) überall x_i durch $x_i(\tau_1 \ldots \tau_{n-1})$ ersetzt, so geht (17) in (15a) über. Dasselbe Eliminationsverfahren, das, auf (17) angewandt, (15b) ergibt, muß also, auf (15a) angewandt, gerade (15c) ergeben, womit der Beweis erbracht ist.

worin die innere Summe wegen (17) verschwindet, also

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

so daß z als Funktion von $x_1 \dots x_n$ wirklich ein Integral von (13) darstellt.

Eine Zerlegung des eben durchgeführten Beweises zeigt, daß (15) nur zur Erfüllung der vorgeschriebenen Anfangsbedingungen dient, während (16) und (17) zusammen durch die Elimination der τ_j stets ein Integral liefern, wie auch die Funktionen $\alpha_1(\tau_1 \dots \tau_{n-1})$, $\dots \alpha_n(\tau_1 \dots \tau_{n-1})$ gegeben sein mögen. Wir können die gleiche Schar (16) auch darstellen, indem wir aus

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} &= \alpha_{n-1}(\tau_1 \dots \tau_{n-1}) \end{aligned}$$

die Größen $\tau_1 \dots \tau_{n-1}$ durch $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ ausdrücken und in $\alpha_n(\tau_1 \dots \tau_{n-1})$ einsetzen. Die entstehende Funktion heiße $w(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})$. Wir sehen also, daß

$$(19) \qquad \begin{cases} z = V(x_1 \dots x_n, \quad \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \quad w(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})), \\ 0 = \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_j} + \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_n}\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2 \dots (n-1) \end{cases}$$

durch Elimination von $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ stets ein Integral liefern muß, wie auch $w(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})$ gewählt sein mag. Halten wir hier $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ fest, so liefern die Gl. (19) eine Kurve, in der wir in Analogie zu den früheren Überlegungen bei zwei Variablen eine Charakteristik vermuten. Da wir nur die einzelne Kurve betrachten, so kommt es nicht auf den Verlauf der Funktionen w, $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_j}$ an, sondern nur auf deren Werte für $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$. Wir behaupten also, daß

$$(20) \qquad \begin{cases} z = V(x_1 \dots x_n, \ \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \ \alpha_n), \\ 0 = \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_j} + \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_n}\beta_j, \quad j = 1, 2 \dots (n-1) \end{cases}$$

für beliebige Wahl der Parameter $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ eine Lösung der charakteristischen Gl. (9a) bis (9c) von § 3 darstellen, wenn man noch

$$(20\text{a}) \qquad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \dots n$$

hinzunimmt. Der Beweis verläuft völlig analog dem in **3** für zwei unabhängige Variablen gegebenen und soll deshalb hier nicht noch einmal durchgeführt werden.

5. Trennung der Variablen. In gewissen Fällen ist es leicht, ein vollständiges Integral anzugeben. Der in der Physik wichtigste Fall ist der, daß die Gl. (13) die folgende Gestalt besitzt:

$$F(f_1(x_1, p_1), \; f_2(x_2, p_2), \; \ldots \; f_n(x_n, p_n)) = 0. \tag{21}$$

Man sagt dann, die Variablen seien getrennt. Wir wollen annehmen, daß (21) z. B. nach f_n auflösbar sei:

$$f_n(x_n, p_n) = G(f_1(x_1, p_1), \ldots, f_{n-1}(x_{n-1}, p_{n-1})). \tag{22}$$

In diesem Falle setze man etwa an:

$$\left\{\begin{array}{l} f_\mu(x_\mu, p_\mu) = a_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \qquad\qquad \text{und} \quad f_n(x_n, p_n) = G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \end{array}\right. \tag{23}$$

wo die a_μ willkürliche Konstanten bedeuten. Wir wollen annehmen, daß wir (23) nach den p auflösen können, also

$$\left\{\begin{array}{l} p_\mu = g_\mu(x_\mu, a_\mu) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n-1, \\ p_n = g_n(x_n, G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})). \end{array}\right. \tag{24}$$

Daraus folgt ein vollständiges Integral in der Form:

$$z = \sum_{\mu=1}^{n-1} \int_{x_\mu^{(0)}}^{x_\mu} g_\mu(\xi_\mu, a_\mu)\, d\xi_\mu + \int_{x_n^{(0)}}^{x_n} g_n(\xi_n, G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}))\, d\xi_n + b, \tag{25}$$

wo b eine neue willkürliche Konstante bedeutet.

§ 6. Die Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichungen [1])

1. Das Jacobische Symbol und die Poissonsche Gleichung. Eine besonders wichtige Rolle in der Physik spielen die Jacobi-Hamiltonschen kanonischen Differentialgleichungen, das ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der folgenden Form:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\nu}, \qquad \frac{dy_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

wo zunächst die gegebene Funktion H nicht explizite von t abhängen soll, also

$$H = H(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = H(x, y), \tag{2}$$

wie wir im folgenden der Kürze halber schreiben wollen. Für eine beliebige mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ver-

[1]) Vgl. hierzu auch Kap. V, §§ 3, 4.

sehene Funktion $F(x, y)$ gilt dann beim Fortschreiten längs einer Lösungskurve von (1):

$$(3)\quad \frac{dF}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(F_{x_\nu}\frac{dx_\nu}{dt} + F_{y_\nu}\frac{dy_\nu}{dt}\right) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\frac{\partial H}{\partial y_\nu} - \frac{\partial F}{\partial y_\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\nu}\right) \equiv (F, H)_{xy}.$$

Der Klammerausdruck $(F, H)_{xy}$[1]) wird als Jacobisches Symbol bezeichnet (rundes Klammersymbol).

Gilt umgekehrt für jede Funktion F die Relation (3), so bestehen die Gl. (1); denn man hat bei geeigneter Spezialisierung von F:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = (x_\nu, H) = \frac{dH}{dy_\nu}, \qquad \frac{dy_\nu}{dt} = (y_\nu, H) = -\frac{dH}{dx_\nu}.$$

Als Rechenregeln für das Jacobische Symbol ergeben sich:

$$(4')\qquad (F,H) = -(H,F), \qquad (F,F) = 0, \qquad (H,H) = 0,$$

d. h. nach (3): H bleibt längs der Lösungen von (1) konstant, oder H ist ein Integral von (1). Weiter erhält man:

$$(4'')\quad (F_1+F_2,\ H_1+H_2) = (F_1, H_1) + (F_2, H_1) + (F_1, H_2) + (F_2, H_2),$$

$$(4''')\qquad (F, H.K) = H(F, K) + K(F, H),$$

und schließlich für $F = F(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ und $H = H(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, wo die u_ϱ wieder Funktionen der x und y sind, wegen $(F, u_\varrho) = \sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial u_\lambda}(u_\lambda, u_\varrho)$:

$$(4'''')\quad (F,H) = \sum_{\varrho,\lambda=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial u_\varrho}\frac{\partial F}{\partial u_\lambda}(u_\lambda, u_\varrho) = \sum_{\lambda<\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial u_\lambda}\frac{\partial H}{\partial u_\varrho} - \frac{\partial F}{\partial u_\varrho}\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)(u_\lambda, u_\varrho).$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die Poissonsche Gleichung, die zwischen drei Funktionen F, G und H die folgende Beziehung stiftet:

$$(5)\qquad \{F,G,H\} \equiv (F,(G,H)) + (G,(H,F)) + (H,(F,G)) = 0.$$

Den Beweis von (5) kann man rechnerisch etwa so erbringen: Unter Benutzung der Rechenregeln (4) erhält man, wenn man

$$H = H(u_1, u_2, \ldots, u_k)$$

ansetzt:

$$(F,(G,H)) = \sum_{\varrho=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial u_\varrho}(F, (G, u_\varrho)) + \sum_{\varrho=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial^2 H}{\partial u_\varrho\,\partial u_\lambda}(F, u_\lambda)\,(G, u_\varrho).$$

---

[1]) Den Index xy setzen wir im folgenden nur an die Klammer heran, wenn außer den x und y noch andere Variablenreihen auftreten.

Durch Vertauschung von F und G erhält man daraus leicht den entsprechenden Ausdruck für $(G,(H,F)) = -(G,(F,H))$. Man hat demnach:

$$(F,(G,H)) + (G,(H,F)) = \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial u_\varrho} \{(F,(G,u_\varrho)) + (G,(u_\varrho,F))\}.$$

Wegen

$$(H,(F,G)) = \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial u_\varrho} (u_\varrho,(F,G))$$

erhält man daraus

$$\{F,G,H\} = \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial u_\varrho} \{F,G,u_\varrho\}.$$

Macht man jetzt die gleiche Überlegung noch für F und G, so erhält man schließlich:

$$(5') \qquad \{F,G,H\} = \sum_{\varrho=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_\mu} \frac{\partial G}{\partial u_\lambda} \frac{\partial H}{\partial u_\varrho} \{u_\mu, u_\lambda, u_\varrho\}.$$

Als $u_1, u_2, \ldots, u_k$ führe man nun $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein. Dafür nehmen die Jacobischen Symbole die folgenden Werte an:

$$(6) \quad \begin{cases} (x_\nu, x_\mu) = 0, & (y_\nu, y_\mu) = 0, \\ (x_\nu, y_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & ,, \ \mu = \nu, \end{cases} & (y_\nu, x_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ -1 & ,, \ \mu = \nu. \end{cases} \end{cases}$$

Ist c eine Konstante, so hat man noch $(u_\varrho, c) = 0$, wo u_ϱ eine beliebige Funktion der x und y sein kann. Daraus folgt aber sofort, daß sämtliche Ausdrücke $(v_\nu, (v_\mu, v_\lambda))$ verschwinden, wenn darin für die v irgendwelche der Größen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ gesetzt werden. Nach (5') ist damit die Poissonsche Gl. (5) bewiesen.

Aus der Poissonschen Gl. (5) folgt: Sind F und G zwei Integrale von (1), ist also $(F,H) = (G,H) = 0$, so ist auch (F,G) ein Integral von (1). Kann man so durch Bildung der Jacobischen Symbole aus zwei schon bekannten von H verschiedenen Integralen im ganzen zu $2n$ unabhängigen Integralen gelangen, so kann man durch einen reinen Auflösungsprozeß daraus die x und y bestimmen, die sich in diesem Falle auf $2n$ Konstanten reduzieren würden. Im allgemeinen werden aber die so erhaltenen Integrale von einem gewissen Schritt an von den früheren abhängig werden.

2. Kanonische Transformationen. Führt man statt der Variablenreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Variablenreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ als Funktionen der x und y so ein, daß die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, so wollen wir diese Substitution

kanonisch nennen, wenn durch sie **jedes** Gleichungssystem der Form (1) in ein solches der gleichen Gestalt übergeht, also in

$$\frac{d\xi_\nu}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \eta_\nu}, \qquad \frac{d\eta_\nu}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_\nu}. \tag{7}$$

Hierbei ist $H^*(\xi, \eta) = H(x, y)$.

Durch das Symbol

$$\begin{matrix} d\xi_\nu \\ d\eta_\nu \end{matrix} \quad S \quad \begin{matrix} dx_\nu \\ dy_\nu \end{matrix} \tag{8}$$

wollen wir andeuten, daß die $d\xi_\nu$ und $d\eta_\nu$ durch die Substitution S aus den dx_ν, dy_ν hervorgehen. Das sieht ausführlicher so aus:

$$d\xi_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\varrho} dx_\varrho + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_\varrho} dy_\varrho, \quad d\eta_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\varrho} dx_\varrho + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial y_\varrho} dy_\varrho.$$

Soll S in (8) eine **kanonische** Substitution sein, so folgt aus (1) in der symbolischen Schreibweise (8):

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial H^*}{\partial \eta_\nu} \\ -\dfrac{\partial H^*}{\partial \xi_\nu} \end{matrix} \right. \quad S \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial H}{\partial y_\nu} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial x_\nu}, \end{matrix} \tag{8'}$$

wo S die gleiche Substitution wie in (8) ist. Die Substitutionen (8) und (8') sind mithin kogredient (vgl. II, § 5, 2).

Sei T die zu S kontragrediente Substitution und sei in unserer Symbolik:

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial F^*}{\partial \xi_\nu} \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial \eta_\nu} \end{matrix} \right. \quad T \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_\nu} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_\nu}. \end{matrix} \tag{9}$$

Dann folgt aus Gl. (25) in II, § 5 mit Rücksicht auf (8'):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial H^*}{\partial \eta_\nu} - \frac{\partial F^*}{\partial \eta_\nu} \frac{\partial H^*}{\partial \xi_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{\partial H}{\partial y_\nu} - \frac{\partial F}{\partial y_\nu} \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \right);$$

oder wegen (3):

$$(F^*, H^*)_{\xi, \eta} = (F, H)_{x, y}. \tag{10}$$

Eine Substitution ist also dann und nur dann kanonisch, wenn das Jacobische Symbol für zwei willkürliche Funktionen F und H invariant bleibt.

Wegen

$$\delta H^* = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H^*}{\partial \eta_\nu} \delta \eta_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \left(-\frac{\partial H^*}{\partial \xi_\nu} \right) (-\delta \xi_\nu)$$

und

$$\delta H = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_\nu}\right)(-\delta x_\nu)$$

gilt

$$(11) \qquad \left\{ \begin{matrix} \delta \eta_\nu \\ -\delta \xi_\nu \end{matrix} \; T \; \begin{matrix} \delta y_\nu \\ -\delta x_\nu, \end{matrix} \right.$$

wo T wieder die zu S in (8′) kontragrediente Substitution ist. Wegen (8) muß daher gelten:

$$\sum_{\nu=1}^{n} d\xi_\nu \,\delta \eta_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} d\eta_\nu \,\delta \xi_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} dx_\nu \,\delta y_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} dy_\nu \,\delta x_\nu.$$

Daraus folgt aber, daß der Ausdruck

$$(12) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu \, d\xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \, dx_\nu$$

ein vollständiges Differential[1]) ist. Hieraus ersieht man, daß die kanonischen Substitutionen eine Gruppe bilden.

Die Bedingung (10) läßt sich noch etwas anders formulieren. Durch Spezialisierung von F und H bekommt man als notwendige Bedingung:

$$(13) \quad (\xi_\varrho, \xi_\sigma)_{x,y} = 0, \quad (\eta_\varrho, \eta_\sigma)_{x,y} = 0, \quad (\xi_\varrho, \eta_\sigma)_{x,y} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho \neq \sigma \\ 1 & \;\;\text{„} \;\; \varrho = \sigma. \end{cases}$$

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, daß also allgemein (10) gilt, folgt unmittelbar aus (4″″) und (3).

3. Beispiele von kanonischen Transformationen. Wert der Funktionaldeterminante. 1. Es sei $\xi_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} c_{\nu\varrho} x_\varrho$, wo die $c_{\nu\varrho}$ eine Transformation mit nicht verschwindender Determinante bilden mögen. Die kontragrediente Substitution möge die Matrixelemente $d_{\nu\varrho}$ besitzen. Bildet man dann noch $\eta_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} d_{\nu\varrho} y_\varrho$, so gehen die ξ_ν, η_ν aus den

---

[1]) Sind zwei Funktionenreihen $f_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $g_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, k)$ gegeben, so kann man ja die Bedingung dafür, daß $\sum_{\varrho=1}^{k} f_\varrho \, dg_\varrho$ ein vollständiges Differential ist, unabhängig von den unabhängigen Variablen x so formulieren, daß

$$\sum_{\varrho=1}^{k} (df_\varrho \,\delta g_\varrho - dg_\varrho \,\delta f_\varrho) = 0$$

sein soll. d und δ bedeuten dabei zwei voneinander unabhängige Variationen. Im Text hat man f_ϱ durch η_ν und $-y_\nu$ zu ersetzen, g_ϱ durch ξ_ν und x_ν.

x_ν, y_ν durch eine kanonische Substitution hervor; denn es ist $\sum \eta_\nu d\xi_\nu \equiv \sum y_\nu dx_\nu$, da sich die dx_ν wie die x_ν transformieren, also kontragredient zu den y_ν. Die Determinante der kanonischen Substitution ist gleich dem Produkt der Determinanten der $c_{\nu\varrho}$ und der $d_{\nu\varrho}$, also gleich 1.

2. Wir betrachten die Substitution

$$\xi_1 = y_1, \quad \eta_1 = -x_1, \quad \xi_\nu = x_\nu, \quad \eta_\nu = y_\nu \quad \text{für} \quad \nu > 1.$$

Es wird

$$\sum \eta_\nu d\xi_\nu - \sum y_\nu dx_\nu = \eta_1 d\xi_1 - y_1 dx_1 = -x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = d(-x_1 \cdot y_1),$$

also ein vollständiges Differential. Mithin ist unsere Substitution kanonisch. Ihre Funktionaldeterminante ist offenbar wieder 1.

3. Es sei eine kanonische Substitution in der Form (8) vorgelegt. Dann gilt sicher

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu d\xi_\nu - \sum y_\nu dx_\nu = d\Omega, \tag{14}$$

wo $d\Omega$ ein vollständiges Differential bedeutet. Ich will annehmen, daß sich die ξ_ν eindeutig durch die y_ν ausdrücken lassen. Dann kann ich Ω als Funktion der x und ξ annehmen und erhalte aus (14):

$$\eta_\nu = \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial \xi_\nu}, \qquad y_\nu = -\frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x_\nu}. \tag{15}$$

Mache ich mit einer beliebigen Funktion $\Omega(x, \xi)$ den Ansatz (15), wobei ich nur noch verlange, daß die n-reihige Determinante

$$D = \left| \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x_\nu \partial \xi_\mu} \right| \neq 0 \tag{16}$$

ausfällt, so lassen sich bei gegebenen x und y durch die zweite Gl. (15) die ξ durch die y ausdrücken, bei gegebenen ξ und η durch die erste Gl. (15) x durch η. Auf diese Weise erhalte ich also sicher eine kanonische Substitution. Ihre Funktionaldeterminante wird

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, \xi)} \cdot \frac{\partial(x, \xi)}{\partial(x, y)} = (-1)^n \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi, x)} \cdot \frac{\partial(x, \xi)}{\partial(x, y)}$$
$$= (-1)^n \frac{\partial(\eta)}{\partial(x)}\bigg|_\xi \cdot \frac{\partial(\xi)}{\partial(y)}\bigg|_x{}^{[1]} = (-1)^n \frac{D}{(-1)^n D} = 1.$$

4. Nun können wir beweisen, daß die Funktionaldeterminante einer jeden kanonischen Substitution 1 sein muß.

---

[1]) Diese Schreibweise bedeutet, daß die als Index angehängten Variablen nicht zu ändern sind.

Sei jetzt in der vorgelegten kanonischen Substitution die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\xi)}{\partial(y)}$ an einer Stelle gleich Null. Sonst haben wir ja den unter 3. erledigten Fall. Ihr Rang möge $k < n$ sein. Dann kann man mit Hilfe der n Gleichungen

$$d\xi_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\varrho} dx_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_\varrho} dy_\varrho \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bei festem x k der Größen ξ statt der y einführen, z. B. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Nach II, § 1, 5 erhält man dann

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_\varrho} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_{\nu\varkappa} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial y_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Ich behaupte, es kann nicht gleichzeitig

$$\frac{\partial \eta_\nu}{\partial y_\varrho} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_{\nu\varkappa} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial y_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{17'}$$

gelten. Denn setzt man

$$f_\nu(x, y) = \xi_\nu - \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_{\nu\varkappa} \xi_\varkappa \quad \text{und} \quad g_\nu(x, y) = \eta_\nu - \sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\nu \xi_\varkappa,$$

so würde folgen:

$$(f_\nu, g_\nu) = \sum_{\varrho=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\varrho} \frac{\partial g_\nu}{\partial y_\varrho} - \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_\varrho} \right) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

da jedes $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} = 0 = \frac{\partial g_\nu}{\partial y_\varrho}$ ist. Andererseits muß aber wegen (4″) und (12) gelten:

$$(f_\nu, g_\nu) = (\xi_\nu, \eta_\nu) = 1 \text{ für } \nu > k.$$

Das liefert aber einen Widerspruch.

Jetzt setze man

$$\xi'_\nu = \xi_\nu, \qquad \eta'_\nu = \eta_\nu \text{ für } \nu \neq k+1,$$
$$\xi'_{k+1} = \eta_{k+1}, \; \eta'_{k+1} = -\xi_{k+1}.$$

Nach 2. ist dadurch eine neue kanonische Substitution entstanden, deren Funktionaldeterminante den gleichen Wert besitzt wie die ursprüngliche und in der $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{k+1}$ wegen (17′) den Rang $k+1$ besitzen. Durch eventuelle Wiederholungen dieser Überlegung gelangt man schließlich zu einer kanonischen Substitution der Form 3., für die wir ja schon den Wert der Funktionaldeterminante zu 1 berechnet haben.

4. Die Jacobische Auflösungsmethode der Hamiltonschen Differentialgleichungen. Um das System (1) aufzulösen, wird man nach **3**, 3. eine Funktion $\Omega(x, \xi)$ suchen, die der Bedingung (16) genügt und deren zugehörige kanonische Transformation auf ein leicht lösbares neues Gleichungssystem (7) führt. Ist

$$H^* = \xi_1,$$

so wird das neue System:

$$\frac{d\xi_\nu}{dt} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \frac{d\eta_\mu}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu > 1 \\ -1 & \text{,, } \mu = 1. \end{cases}$$

Mithin sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ konstant und es gilt $\eta_1 = c - t$, wo c eine weitere Konstante bedeutet.

Beachtet man die zweite Gl. (15), so findet man, daß unsere so charakterisierte Funktion $\Omega(x, \xi)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen muß:

$$(18) \quad H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, -\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial x_1}, -\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial x_n}\right) = \xi_1.$$

Hierin sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Variablen, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ Parameter. Gesucht ist also ein von n Parametern abhängiges Integral von (18), d. h. ein vollständiges Integral von (18). In manchen Fällen ist diese Aufgabe leichter lösbar als die Auffindung der Lösungen von (1).

Ist (18) gelöst, so erhält man also nach (14) die Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ von (1) aus

$$(19) \quad \frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial \xi_\mu} = \begin{cases} \eta_\mu & \text{für } \mu > 1 \\ c - t & \text{,, } \mu = 1 \end{cases}, \quad y_\nu = -\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1 \ldots n),$$

worin die $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ und c die $2n$ Integrationskonstanten bedeuten.

Jetzt ist der Zusammenhang mit der in § 4 entwickelten Theorie des vollständigen Integrals leicht herzustellen. Setzt man nämlich $z = -\Omega(x, \xi)$, so sind die Gleichungen (1) die charakteristischen Differentialgleichungen § 3 (9a) und (9b) von (10). Hinzu tritt noch die charakteristische Gleichung (9c) des § 3, welche nur aussagt, daß

$$\frac{dz}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{dx_\nu}{dt}$$

ist, und ohne Bedeutung ist, da z nicht in (18) vorkommt und daher die Gleichungen (9a) und (9b) für sich integrierbar sind. Man muß jedoch beachten, daß das gesuchte vollständige Integral von (18) noch der Bedingung (16) genügen muß, so daß also darin keine der n Konstanten additiv auftreten darf.

5. Verallgemeinerung auf den Fall, daß t in H explizite vorkommt. a) Die Funktion H, die in das Gleichungssystem (1) eingeht, sei jetzt von der Gestalt

$$(2') \qquad H = H(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = H(t, x, y).$$

Für eine beliebige Funktion $F(t, x, y)$ gilt dann beim Fortschreiten längs einer Lösungskurve von (1):

$$(3') \qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \left(F_{x_\nu} \dfrac{dx_\nu}{dt} + F_{y_\nu} \dfrac{dy_\nu}{dt} \right) + \dfrac{\partial F}{\partial t} \\ \quad = (F, H)_{x, y} + \dfrac{\partial F}{\partial t} = (F, H + y_0)_{x_0, x, y_0, y}, \end{cases}$$

wenn man $t = x_0$ setzt und noch eine diesem x_0 entsprechende neue Variable y_0 einführt. Genau wie in **1** beweist man nun: Sind F und G zwei Integrale von (1), wobei jetzt H die Form (2') haben soll, so ist auch $(F, G)_{x_0, x, y_0, y} = (F, G)_{x, y}$ [1]) ein Integral von (1). Kann man so durch Bildung von Klammerausdrücken zu $2n$ unabhängigen Integralen gelangen, so kann man durch einen reinen Auflösungsprozeß daraus die von $2n$ Konstanten und t abhängenden x und y bestimmen.

b) Um auch in diesem Falle die Theorie der kanonischen Substitutionen zu entwickeln, betrachten wir in naheliegender Verallgemeinerung der in (12) auftretenden Differentialausdrücke den folgenden Ausdruck:

$$(20) \qquad d\varDelta \equiv \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \, dx_\nu - M \, dt,$$

wo M eine beliebige Funktion der x, y, t sein kann. Bildet man unter Einführung der von den dx_ν, dy_ν, dt unabhängigen Differentiale δx_ν, δy_ν, δt den Ausdruck

$$(21) \qquad \delta d \varDelta - d \delta \varDelta,$$

so muß (21) bei Koordinatentransformationen ungeändert bleiben. Man nennt (21) die bilineare Kovariante des Differentialausdrucks (20). Die Bedingung dafür, daß (21) für jede beliebige Variation δ den Wert Null annimmt, drückt sich dadurch aus, daß die Koeffizienten der δx_ν, δy_ν, δt einzeln verschwinden müssen. So erhält man das zur Differentialform (20) gehörende erste Pfaffsche Gleichungssystem, das natürlich auch gegen Koordinatentransformationen invariant ist. In unserem Falle lautet es:

$$(22) \quad dy_\nu + \frac{\partial M}{\partial x_\nu} dt = 0, \quad dx_\nu - \frac{\partial M}{\partial y_\nu} dt = 0, \quad dM - \frac{\partial M}{\partial t} dt = 0,$$

---

[1]) F und G hängen ja von x_0 und y_0 nicht ab.

wobei die letzte Gleichung unterdrückt werden kann, da sie eine Folge der vorhergehenden ist. Ersetzt man M durch H, so ist (22) mit dem System (1) identisch. Daraus folgt: Führt man statt x_ν, y_ν, t neue Koordinaten ξ_ν, η_ν, τ (die Funktionaldeterminante darf nicht verschwinden) ein, so daß der Ausdruck $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu dx_\nu - H\,dt$ in einen Ausdruck der Form $\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu d\xi_\nu - K\,d\tau + d\Omega$ übergeht — $d\Omega$ sei dabei ein vollständiges Differential, so daß $\delta d\Omega - d\delta\Omega = 0$ wird —, so geht das erste Pfaffsche Gleichungssystem (1) des ersten Ausdrucks in das entsprechende System

$$\frac{d\xi_\nu}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial y_\nu}, \quad \frac{d\eta_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_\nu} \tag{23}$$

des zweiten Ausdrucks über.

Um solche kanonischen Transformationen aufzustellen, kann man etwa so vorgehen: Man nehme irgendeine der in 2 betrachteten speziellen kanonischen Transformationen her, die die $2n+2$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n, t, y_1, y_2, \ldots, y_n, p$ in neue $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \pi$ überführen, wobei die Hamiltonsche Funktion $\widetilde{H}(x,t,y,p) = H(t,x,y) + p$ übergehen möge in $\widetilde{H}^*(\xi, \tau, \eta, \pi)$. Hierfür ist

$$\sum y_\nu dx_\nu - \sum \eta_\nu d\xi_\nu + p\,dt - \pi\,d\tau \tag{24}$$

ein vollständiges Differential.

Jetzt erteile man der Veränderlichen p nur spezielle Werte durch die Vorschrift

$$\widetilde{H} = H(t,x,y) + p = 0$$

und löse die entsprechende Gleichung $\widetilde{H}^*(\xi, \tau, \eta, \pi) = 0$ nach π auf; man erhält etwa

$$K(\tau, \xi, \eta) + \pi = 0.$$

Für diese spezielle Transformation, die eine Transformation des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der x_ν, y_ν, t in die ξ_ν, η_ν, τ darstellt, muß die Bedingung (24) immer noch gelten, d. h.

$$\sum y_\nu dx_\nu - \sum \eta_\nu d\xi_\nu - H\,dt + K\,d\tau = d\Omega, \tag{24'}$$

wo $d\Omega$ ein vollständiges Differential bedeutet. Diese Transformation ist mithin kanonisch.

c) Um jetzt zu einer Integrationstheorie des Systems (1) zu gelangen, kann man etwa so vorgehen: Sei $\Omega(t, x, \xi)$ eine beliebige

Funktion von $t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Man definiere eine Substitution durch

$$(25) \qquad y_\nu = +\frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu}, \quad \eta_\nu = -\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\nu}, \quad \tau = t,$$

unter der Voraussetzung, daß die Gl. (25) nach ξ_ν und x_ν auflösbar sind, d. h. daß die n-reihige Determinante

$$(26) \qquad D = \left| \frac{\partial^2 \Omega(t, x, \xi)}{\partial x_\nu \partial \xi_\mu} \right| \neq 0$$

ausfällt. Diese Substitution ist kanonisch, denn es wird

$$\sum y_\nu d x_\nu - H\,dt = \sum \eta_\nu d\xi_\nu + \sum \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu \right) - H\,dt$$
$$= \sum \eta_\nu d\xi_\nu - \left(H + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) dt + d\Omega.$$

Die Hamiltonsche Funktion K des neuen Systems ist daher

$$(27) \qquad K = H + \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Kann man diese Transformation nun so einrichten, daß diese neue Hamiltonsche Funktion K identisch verschwindet, daß also nach (27) und (25)

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega(t, x, \xi)}{\partial t} + H\Big(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dfrac{\partial \Omega(t, x, \xi)}{\partial x_1}, \\ \qquad \dfrac{\partial \Omega(t, x, \xi)}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial \Omega(t, x, \xi)}{\partial x_n}\Big) = 0 \end{cases}$$

ist, so lautet das neue Differentialgleichungssystem

$$(29) \qquad \frac{d\eta_\nu}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi_\nu}{dt} = 0.$$

Seine Lösungen sind demnach $\xi_\nu = \alpha_\nu$, $\eta_\nu = \beta_\nu$ mit $2n$ Konstanten α_ν und β_ν. Hat man daher ein von n Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ abhängendes vollständiges Integral der Jacobi-Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (28) gefunden, das die Bedingung (26) erfüllt, so erhält man die Lösungen des Systems (1) durch Auflösung der Gleichungen

$$(30) \qquad \frac{\partial \Omega(t, x, \alpha)}{\partial \alpha_\nu} = -\beta_\nu, \quad y_\nu = \frac{\partial \Omega(t, x, \alpha)}{\partial x_\nu}.$$

§ 7. Systeme partieller Differentialgleichungen

1. Begriff der Vollständigkeit. Vorgelegt seien zwei Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0, \\ g(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0. \end{cases}$$

Jeder n-dimensionale Elementenverein, der beiden Gleichungen genügt, muß zu jedem seiner Punkte des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes die Charakteristiken von f und g enthalten. So muß z. B. g längs einer solchen Charakteristik von f stets Null bleiben. Das ergibt unter Benutzung der charakteristischen Gl. (9a, b, c) aus § 3:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_\nu}\frac{\partial f}{\partial p_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial g}{\partial z}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} = 0$$

oder

$$(2)\qquad [g,f] \equiv \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + p_\nu\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

$[g,f]$ wird als Jacobisches Symbol bezeichnet (eckiges Klammersymbol). Es gilt

$$(3)\qquad [g,f] = -[f,g];\quad [f,f] = 0;\quad [f,g] = \alpha[f,g_1] + \beta[f,g_2],$$

falls $dg = \alpha dg_1 + \beta dg_2$ ist, wo α und β beliebige Funktionen unserer Variablen sind.

Aus (1) folgt jetzt als neue Gleichung, der die Lösungen von (1) genügen müssen:

$$[f,g] = 0.$$

Bei linearen Differentialgleichungen geht das Jacobische Symbol in den durch Gl. (2) aus § 2 definierten Klammerausdruck über. Enthalten f und g die Variable z nicht, so geht (2) über in das in § 6, (3) definierte Jacobische Symbol.

Durch Bildung der Klammersymbole (2) gelangt man schließlich aus (1) zu einem Gleichungssystem

$$(4)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_m = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß alle Gl. (4) voneinander unabhängig sind, daß die Funktionalmatrix den Rang m besitzt und daß durch Bildung von Klammersymbolen (2) keine von den vorhandenen unabhängige Gleichung entsteht. Dann nennen wir das System (4) vollständig.

Folgt aus dem Bestehen der Gl. (4), daß dann eine $(m+1)$-te Funktion f_{m+1} auch verschwindet, so kann die aus den $f_1 \ldots f_{m+1}$

gebildete Funktionalmatrix nicht den Rang $m+1$ besitzen; denn sonst wäre das Gleichungssystem

$$df_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu} dp_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial z} dz \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m+1)$$

möglich mit $df_\varrho = 0$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ und $df_{m+1} \neq 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Es gilt also

$$df_{m+1} = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu df_\mu.$$

Hieraus folgt: Soll das System

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \ldots, \quad g_l = 0 \tag{4'}$$

dem System (4) gleichwertig sein, so muß $l = m$ sein. Wir wollen nun noch zeigen, daß aus der Vollständigkeit von (4) auch die Vollständigkeit von (4') folgt. Es gilt nämlich

$$dg_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\lambda\mu} df_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Daher mit Benutzung von (3)

$$[g_\varrho, g_\sigma] = \sum_{\tau=1}^{m} \alpha_{\sigma\tau} [g_\varrho, f_\tau] = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\varkappa=1}^{m} \alpha_{\sigma\tau} \alpha_{\varrho\varkappa} [f_\varkappa, f_\tau].$$

Man könnte nun, ähnlich wie in § 2, noch den Begriff der Involution einführen. Wir wollen jedoch zur Auflösung des Systems (4) einen anderen Weg einschlagen.

2. Auflösungstheorie. Neben der aus m Zeilen und $2n+1$ Spalten bestehenden Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \cdots \\ \vdots & . & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial z} & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial p_1} & \cdots \end{pmatrix} \tag{5}$$

des Systems (4) betrachte man nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f_m}{\partial z} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f_m}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial p_1} & \frac{\partial f_m}{\partial p_2} & \cdots \end{pmatrix} \tag{6}$$

die aus m Zeilen und $2n$ Spalten besteht. Sicher gilt für den Rang r der Matrix (6):

$$m - 1 \leqq r \leqq m. \tag{7}$$

Denn fügt man zu (6) eine Spalte mit den Elementen

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_m}{\partial z}$$

hinzu, so entsteht eine zu (5) äquivalente Matrix.

Ich behaupte nun: Die Lösungsmannigfaltigkeit des Systems (4) ist notwendig ein Elementenverein, wenn für sie der Rang der Matrix (6) $m-1$ ist. Denn beim Fortschreiten längs einer Lösung hat man:

$$(8) \quad \begin{cases} df_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial z}\left(dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, dx_\nu\right) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial z}\right) dx_\nu \\ \qquad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu}\, dp_\nu = 0. \end{cases}$$

Da die Matrix (6) den Rang $m-1$ hat, gibt es m Faktoren α_μ, daß

$$(9) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z}(\partial z - \Sigma\, p_\nu\, dx_\nu) = 0$$

wird längs einer Lösung des Systems (4). Da nun aber die Matrix (5) den Rang m hat, so gilt für beliebige df_μ unter Benutzung des jetzt nicht verschwindenden Ausdrucks (8)

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu\, df_\mu = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z}\right)(dz - \Sigma\, p_\nu\, dx_\nu) \neq 0,$$

mithin

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial z} \neq 0,$$

so daß aus (9) folgt: $dz - \Sigma\, p_\nu\, dx_\nu = 0$ längs einer Lösung von (4) Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Der Rang der Lösungen von (4) ist nun $2n+1-m$. Nach § 4, **1** kann ein Elementenverein höchstens den Rang n besitzen; daher muß bei Eintreten der Rangerniedrigung der Matrix (6) gegenüber der Matrix (5) $m \geqq n+1$ sein.

Auf der Lösungsmannigfaltigkeit des Systems (4) hat nun das Gleichungssystem

$$(10) \quad \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_\varrho}{\partial z}\right) u_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\varrho}{\partial p_\nu} v_\nu = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

wegen $[f_\varrho, f_\sigma] = 0$ die m Lösungen

$$(11) \quad u_\nu = \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_\nu}, \quad v_\nu = \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_\sigma}{\partial z} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n,\ \sigma = 1, 2, \ldots, m).$$

Nach (7) besitzen diese sowie das System (10) entweder den Rang m oder den Rang $m-1$. Ist nun $m = n+1$, so ist der Rang von (10) und (11) notwendig n, d. h.: Durch reine Auflösung der Gl. (4) erhält man im Falle $m = n+1$ eine n-dimensionale Lösungsmannigfaltigkeit, und diese ist ein Elementenverein. Damit ist im Falle $m = n+1$ das Problem erledigt.

Da $m > n+1$ wegen der eben an (10) und (11) angestellten Überlegungen ausgeschlossen ist, bleibt jetzt noch der Fall $m < n+1$ zu betrachten. Der Rang der Lösungen von (4) ist jetzt größer als n, mithin können diese Lösungen keinen Elementenverein bilden; daher ist der Rang r der Matrix (6) gleich m.

Es sei ein k-dimensionaler Elementenverein $x_\nu = x_\nu(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, $p_\nu = p_\nu(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, $z = z(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ gefunden, der den Gl. (4) genügt. Keine charakteristische Richtung des Systems (4) möge diesen Elementenverein berühren. Diese Bedingung drückt sich darin aus, daß die $(2n+1)$-reihige, $(k+m)$-spaltige Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_k} & \frac{\partial f_1}{\partial p_\nu} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial p_\nu} \\
\frac{\partial p_\nu}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial p_\nu}{\partial \tau_k} & -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) & \cdots & -\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_m}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial z}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial \tau_k} & \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho \frac{\partial f_1}{\partial p_\varrho} & \cdots & \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho \frac{\partial f_m}{\partial p_\varrho}
\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Rang } k} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Rang } m}$$

den Rang $m+k$ besitzt (vgl. hierzu § 2, **3**).

Man setze nun auf jeden Punkt des k-dimensionalen Elementenvereins eine Charakteristik von $f_1 = 0$ darauf:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f_1}{\partial z}\right), \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho \frac{\partial f_1}{\partial p_\varrho}.$$

Die neue $(k+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit genügt für $t = 0$ den Gl. (4), aber auch für beliebige t wegen

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{df_\varrho}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial x_\nu} \dfrac{dx_\nu}{dt} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial p_\nu} \dfrac{dp_\nu}{dt} + \dfrac{\partial f_\varrho}{\partial z} \dfrac{dz}{dt} = [f_\varrho, f_1] \\ \qquad = \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{\varrho\mu} f_\mu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

da das System (4) vollständig sein soll. (12) ist nämlich ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die f_ϱ, für das im Anfangspunkt $t = 0$ sämtliche f_ϱ verschwinden. Wie in § 4, **2** be-

weist man überdies, daß diese $(k+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ein Elementenverein ist.

Auf jeden Punkt der neuen Mannigfaltigkeit setze man nun eine Charakteristik von $f_2 = 0$ darauf, usf. So gelangt man schließlich zu einem $(k+m)$-dimensionalen Elementenverein, der den Gl. (4) genügt. Ist $k = n - m$, so ist ein Integral von (4) gefunden. Einen den Gl. (4) genügenden $(n-m)$-dimensionalen Elementenverein kann man aber leicht so finden: Man nehme irgendeinen n-dimensionalen Elementenverein, der in einem Punkte den m Gl. (4) genügt. Das kann man leicht machen. Durch Auflösung der Gl. (4), d. h. durch Einschränkung der n Parameter des ursprünglichen Elementenvereins, erhält man daraus in der Umgebung dieses Punktes einen $(n-m)$-dimensionalen Elementenverein, der dort die Gl. (4) befriedigt.

§ 8. Berührungstransformationen

1. Definition. Ein Beispiel. Unter einer Berührungstransformation versteht man eine Transformation der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n, z$ des n-dimensionalen Raumes in neue Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \zeta$ derart, daß aus einem Elementenverein wieder ein Elementenverein wird, daß also aus $dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, dx_\nu = 0$ stets folgt: $d\zeta - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu\, d\xi_\nu = 0$. Eine Differentialgleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0$$

wird dadurch übergehen in eine Differentialgleichung

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n, \zeta) = 0.$$

Als Beispiel für die Verwendung von Berührungstransformationen betrachten wir die Clairautsche Differentialgleichung:

$$z - px - qy = \varphi(p, q). \tag{1}$$

Es rechnet sich

$$dz - p\,dx - q\,dy = d(z - px - qy) - (-x)\,dp - (-y)\,dq.$$

Die Transformation

$$\zeta = z - px - qy, \quad \xi = p, \quad \eta = q, \quad \pi = -x, \quad \chi = -y \tag{2}$$

ist also eine Berührungstransformation. Sie führt (1) über in

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta). \tag{3}$$

Gesucht ist ein zweidimensionaler Elementenverein, der der Gl. (3) genügt.

a) Bei willkürlichem ξ und η stellt (3) eine Fläche dar. Es ist $\pi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\chi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$. Im ursprünglichen Raume wird daraus nach (2):

$$p = \xi, \quad q = \eta, \quad x = -\varphi_\xi(\xi, \eta), \quad y = -\varphi_\eta(\xi, \eta), \tag{4}$$
$$z = \varphi(\xi, \eta) - \xi \varphi_\xi - \eta \varphi_\eta .$$

Das ist eine Fläche, wenn

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{\xi\xi} & \varphi_{\xi\eta} \\ \varphi_{\xi\eta} & \varphi_{\eta\eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfällt. Hat D den Rang 1, so ist das eine Kurve mit einer einparametrigen Schar von Tangentialebenen, ist der Rang von D Null, so bekommt man alle Ebenen durch einen Punkt.

b) Sind ξ, η und damit auch ζ konstant, π und χ willkürlich, so ist das im neuen Raume ein Punkt mit sämtlichen hindurchgehenden Ebenen. Im ursprünglichen Raume sind p und q konstant, x und y willkürlich, das liefert eine Ebene.

c) Der Rang der ξ, η, ζ sei 1. Dann hat man etwa $\eta = g(\xi)$, $\zeta = \varphi(\xi, g(\xi))$. Die Bedingung des Elementenvereins wird

$$(\varphi_\xi + \varphi_\eta g'(\xi))\, d\xi - \pi\, d\xi - \chi\, g'(\xi)\, d\xi = 0.$$

Das gibt etwa

$$\pi = \varphi_\xi + \varphi_\eta g'(\xi) - \chi g'(\xi).$$

Man kann also etwa ξ und χ willkürlich nehmen. Aus den Formeln (2) folgt jetzt:

$$x = -(\varphi_\xi + \varphi_\eta g'(\xi)) - \chi g'(\xi), \quad y = -\chi.$$

Das liefert im allgemeinen eine Fläche im x, y, z-Raume.

2. Spezielle Berührungstransformationen. Sei allgemein eine Transformation der x_ν, p_ν, z in neue Variable ξ_ν, π_ν, ζ [1]) vorgelegt. Dann kann man formal schreiben:

$$d\zeta - \sum \pi_\nu d\xi_\nu = A\,dz + \sum B_\nu dx_\nu + \sum C_\nu dp_\nu$$
$$= A(dz - \sum p_\nu dx_\nu) + \sum (B_\nu + A p_\nu)\, dx_\nu + \sum C_\nu dp_\nu .$$

Wenn unsere Transformation eine Berührungstransformation sein soll, muß dieser Ausdruck für $dz - \sum p_\nu dx_\nu = 0$ verschwinden, d. h. es muß gelten

$$d\zeta - \sum \pi_\nu d\xi_\nu = A(dz - \sum p_\nu dx_\nu). \tag{5}$$

Wir setzen $A \neq 0$ voraus. Ist A nur an einer Stelle gleich Null, so nennen wir diese Stelle singulär. Verschwindet A identisch,

---

[1]) Wir brauchen nicht vorauszusetzen, daß ihre Funktionaldeterminante von Null verschieden ist; das wird später von selbst herauskommen.

so folgt $d\zeta - \sum \pi_\nu d\xi_\nu \equiv 0$, d. h. der Raum der ζ, ξ_ν, π, besteht nur aus Elementenvereinen; dann ist er aber nach § 4, **1** höchstens n-dimensional. Eine Umkehrung der Transformation ist mithin nicht möglich. Diesen Fall wollen wir ausscheiden. Wir betrachten nur den Fall $\Delta \neq 0$.

Gewöhnlich schreibt man (5) in der Form

$$dz - \Sigma p_\nu dx_\nu = \varrho(d\zeta - \Sigma \pi_\nu d\xi_\nu) \quad \text{mit} \quad \varrho \neq 0. \tag{6}$$

Wir behandeln zunächst den folgenden Spezialfall: Die π_ν und ξ_ν mögen nur von den x_ν und p_ν abhängen, nicht von z. Ferner sei $\varrho = 1$. Dann kann man für (6) schreiben:

$$\Sigma \pi_\nu d\xi_\nu - \Sigma p_\nu dx_\nu = d(\zeta - z) = dS, \tag{7}$$

d. h. ein vollständiges Differential. Also $\zeta = z + S$, $S = S(x_\nu, p_\nu)$. (7) ist aber gerade die Bedingung (12) in § 6, **2** für die dort betrachteten speziellen kanonischen Transformationen. Deshalb sind unsere speziellen Berührungstransformationen, wie man sich leicht überzeugen kann, mit den in § 6, **2** und **3** behandelten speziellen kanonischen Transformationen identisch. Daß die Funktionaldeterminante von Null verschieden sein muß, folgt so: Wegen (7) gilt

$$\Sigma(d\pi_\nu \delta\xi_\nu - \delta\pi_\nu d\xi_\nu) - \Sigma(dp_\nu \delta x_\nu - \delta p_\nu dx_\nu) = 0$$

oder

$$\Sigma dx_\nu \delta p_\nu + \Sigma dp_\nu(-\delta x_\nu) = \Sigma d\xi_\nu \delta\pi_\nu + \Sigma d\pi_\nu(-\delta\xi_\nu).$$

Das besagt aber, daß die folgenden beiden Substitutionen S und T

$$\begin{matrix} d\xi_\nu \\ d\pi_\nu \end{matrix} \; S \; \begin{matrix} dx_\nu \\ dp_\nu, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \delta\pi_\nu \\ -\delta\xi_\nu \end{matrix} \; T \; \begin{matrix} \delta p_\nu \\ -\delta x_\nu \end{matrix}$$

kontragredient sind. Also ist die Determinante von S von Null verschieden, mithin auch unsere Funktionaldeterminante wegen $\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} = 1$. Nach § 6, **3** hat sie den Wert 1.

3. Allgemeine Berührungstransformationen. Wir setzen $z = x_0$ und führen eine neue Veränderliche p_0 ein, indem wir jetzt die $2n + 2$ Veränderlichen

$$x_0' = x_0 = z, \; x_\nu' = x_\nu, \; p_0' = p_0, \; p_\nu' = -p_\nu p_0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

betrachten. Dadurch geht die Forderung $dz - \Sigma p_\nu dx_\nu = 0$ über in $\sum\limits_{\mu=0}^{n} p_\mu dx_\mu = 0$, ist also homogen gemacht worden. Analog führen wir ein:

$$\xi_0' = \xi_0 = \zeta, \; \xi_\nu' = \xi_\nu, \; \pi_0' = \pi_0, \; \pi_\nu' = -\pi_\nu \pi_0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man jetzt $\pi_0' = \varrho\, p_0'$, so geht (6) über in

$$\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu' \, d x_\mu' = \sum_{\mu=0}^{n} \pi_\mu' \, d \xi_\mu' \quad \text{oder} \quad \sum_{\mu=0}^{n} (\pi_\mu' d \xi_\mu' - p_\mu' d x_\mu') = 0. \tag{8}$$

Jetzt haben wir eine der in 2 behandelten speziellen Berührungstransformationen vor uns, aber im Raume von $2n+2$ Dimensionen. Das in (7) auftretende totale Differential dS verschwindet sogar identisch, so daß wir $S = 0$ annehmen können. Wegen

$$\frac{\partial(\xi_0', \ldots, \xi_n', \pi_0', \ldots, \pi_n')}{\partial(x_0', \ldots, x_n', p_0', \ldots, p_n')} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(p_0', \ldots, p_n', x_0', \ldots, x_n')}{\partial(p_0, \ldots, p_n, x_0, \ldots, x_n)} = (-p_0)^n$$

erhält man unter Berücksichtigung von $\pi_0' = \varrho\, p_0'$:

$$\frac{\partial(\pi_0, \ldots, \pi_n, \xi_0, \ldots, \xi_n)}{\partial(p_0, \ldots, p_n, x_0, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(\pi_0, \ldots, \pi_n, \xi_0, \ldots, \xi_n)}{\partial(\pi_0', \ldots, \pi_n', \xi_0', \ldots, \xi_n')} \cdot \frac{\partial(\pi_0', \ldots, \pi_n', \xi_0', \ldots, \xi_n')}{\partial(p_0', \ldots, p_n', x_0', \ldots, x_n')} \cdot \frac{\partial(p_0', \ldots, p_n', x_0', \ldots, x_n')}{\partial(p_0, \ldots, p_n, x_0, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\varrho^n}.$$

Nun gilt

$$\frac{\partial(\pi_0, \ldots, \pi_n, \xi_0, \ldots, \xi_n)}{\partial(p_0, \ldots, p_n, x_0, \ldots, x_n)} = \varrho \frac{\partial(\pi_1, \ldots, \pi_n, \zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)},$$

so daß man schließlich erhält:

$$\frac{\partial(\pi_1, \ldots, \pi_n, \zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\varrho^{n+1}}. \tag{9}$$

Wie in § 6, 2, (13) die speziellen Berührungstransformationen durch die runden Klammersymbole charakterisiert wurden, kann man nun die allgemeinen Berührungstransformationen mit den eckigen Klammersymbolen in Verbindung bringen. Aus den Definitionen der beiden Symbole (S. 661 bzw. 671) folgt durch leichte Rechnung für zwei Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ die Beziehung

$$[f, g]_{x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n} = -p_0 (f, g)_{x_0', \ldots, x_n', p_0', \ldots, p_n'} \tag{10}$$

und analog

$$[f, g]_{\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n} = -\pi_0 (f, g)_{\xi_0', \ldots, \xi_n', \pi_0', \ldots, \pi_n'},$$

so daß man schließlich nach § 6, 2, (10) für eine Berührungstransformation erhält:

$$[f, g]_{x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n} = \frac{1}{\varrho} [f, g]_{\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n} \tag{11}$$

für zwei beliebige Funktionen f und g. Durch Spezialisierung von f und g folgt daraus für Berührungstransformationen als notwendige Bedingung:

$$(12)\quad \begin{cases} [\xi_\nu, \xi_\mu]_{x,p,z} = 0, \quad [\pi_\nu, \pi_\mu]_{x,p,z} = 0, \quad [\xi_\nu, \zeta]_{x,p,z} = 0, \\ [\xi_\nu, \pi_\mu]_{x,p,z} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \dfrac{1}{\varrho} & \text{"} \quad \mu = \nu, \end{cases} \quad [\zeta, \pi_\nu]_{x,p,z} = \dfrac{\pi_\nu}{\varrho}. \end{cases}$$

Daß (12) auch ein hinreichendes Kriterium für Berührungstransformationen ist, kann man etwa so einsehen: Für eine beliebige Funktion $f(x, z, p)$ führen wir neben

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} dp_\nu$$

den folgenden Differentialausdruck ein:

$$(13)\qquad Df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx_\nu + \sum \frac{\partial f}{\partial p_\nu} dp_\nu.$$

Es gilt:

$$(14)\qquad df = \frac{\partial f}{\partial z}\left(dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dx_\nu\right) + Df.$$

Unter Benutzung dieser Umformung kann man schreiben:

$$(15)\quad \begin{cases} d\zeta - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu d\xi_\nu = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial z}\right) \cdot \left(dz - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu dx_\nu\right) \\ \qquad\qquad + D\zeta - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu D\xi_\nu. \end{cases}$$

Der letzte Ausdruck hierin ist jedenfalls von der Form

$$(16)\quad D\zeta - \sum_{\nu=1}^{n} D\xi_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x, z, p) dx_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(x, z, p) dp_\nu.$$

Ich betrachte jetzt die folgende Differentialgleichung für u:

$$(17)\qquad [\zeta, u] - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu [\xi_\nu, u] = 0,$$

die sich auch so schreiben läßt:

$$(17')\qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial p_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Aus (12) sieht man, daß die Gl. (17) die $2n$ Lösungen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ besitzt. Schreibt man (17') für alle $2n$ Lösungen an und besitzt die $2n$-reihige Koeffizientendeterminante K einen von Null

verschiedenen Wert, so kann man auf das identische Verschwinden der a_ν und b_ν, mithin auch des Ausdruckes (16) schließen. Daß $K \neq 0$ sein soll, braucht nicht vorausgesetzt zu werden; es folgt etwa so: Man errechnet durch Kombination von Zeilen mit Zeilen:

$$K^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial p_\nu} & \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial z} \\ \frac{\partial \pi_\varrho}{\partial p_\nu} & \frac{\partial \pi_\varrho}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \pi_\varrho}{\partial z} \end{vmatrix} (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \pi_\varrho}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \pi_\varrho}{\partial z} & -\frac{\partial \pi_\varrho}{\partial p_\nu} \\ \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial z} & -\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial p_\nu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} [\pi_\varrho, \xi_\sigma] & [\xi_\varrho, \xi_\sigma] \\ [\pi_\varrho, \pi_\sigma] & [\xi_\varrho, \pi_\sigma] \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho^{2n}}.$$

Aus (15) folgt nun

$$(18) \quad d\zeta - \sum \pi_\nu d\xi_\nu = A.(dz - \sum p_\nu dx_\nu) \text{ mit } A = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \sum \pi_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial z}.$$

Also haben wir es sicher mit einer Berührungstransformation zu tun, wenn $A \neq 0$ ist. Verschwindet A nicht identisch, so kann A an keiner Stelle verschwinden; denn man kann im $(2n+1)$-dimensionalen Raume eine gegen eine solche Stelle konvergierende Punktfolge angeben, für die überall $A \neq 0$ ist, also wegen (6) und (12) $A = \frac{1}{\varrho}$. Mithin muß auch in der Grenze $A = \frac{1}{\varrho}$ sein. Es bleibt also nur noch der Fall zu behandeln, daß A identisch verschwindet. Ich behaupte, dies kann nicht eintreten. Es wäre nämlich dann $d\zeta - \sum \pi_\nu d\xi_\nu \equiv 0$, mithin $\zeta = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Aus $d\zeta = \sum \pi_\nu d\xi_\nu = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu$ folgt dann $\pi_\nu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu$, ferner:

$$\frac{1}{\varrho} = [\xi_\nu, \pi_\nu] = \left[\xi_\nu, \frac{\partial F}{\partial \xi_\nu}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right] = \sum_\mu \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu} [\xi_\nu, \xi_\mu] = 0$$

wegen der dritten Formel (3) und (12). Die letzte Formel bedeutet aber einen Widerspruch gegen die Voraussetzung $\varrho \neq 0$. Damit ist gezeigt, daß (12) ein hinreichendes Kriterium für Berührungstransformationen ist.

4. Invarianz der charakteristischen Differentialgleichungen gegenüber Berührungstransformationen. Die Differentialgleichung

$$(19) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0$$

möge durch eine vorgelegte Berührungstransformation übergeführt werden in

$$(20) \qquad f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n, \zeta) = 0,$$

wobei wir wegen des Nichtverschwindens der Funktionaldeterminante der Transformation annehmen können, daß f den aus F durch die Transformation entstandenen Ausdruck nach Multiplikation mit ϱ bedeutet.

Wir betrachten die in **3** eingeführte spezielle kanonische Transformation des $(2n+2)$-dimensionalen Raumes der gestrichenen Größen. Nach § 6 folgt dann, wenn man als Hamiltonsche Funktion den Ausdruck

$$(21)\quad \begin{cases} H = -p_0' F\left(x_1', \ldots, x_n', -\dfrac{p_1'}{p_0'}, \ldots, -\dfrac{p_n'}{p_0'}, x_0'\right) \\ \quad = -\pi_0' f\left(\xi_1', \ldots, \xi_n', -\dfrac{\pi_1'}{\pi_0'}, \ldots, -\dfrac{\pi_n'}{\pi_0'}, \xi_0'\right) \end{cases}$$

einführt, daß die Hamiltonschen Differentialgleichungen des Raumes der x_μ', p_μ' in die Hamiltonschen Gleichungen des Raumes der ξ_μ', π_μ' übergehen $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Im Raume der x_μ', p_μ' lauten diese Gleichungen:

$$\frac{dx_0'}{dt} = -\frac{1}{p_0'}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu' \frac{\partial F}{\partial p_\nu} - F, \qquad \frac{dp_0'}{dt} = p_0' \frac{\partial F}{\partial x_0'},$$
$$\frac{dx_\nu'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_\nu}, \qquad \frac{dp_\nu'}{dt} = p_0' \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus folgen im Raume der ungestrichenen Größen, wenn man nur Elementenvereine betrachtet, die der Differentialgleichung (19) genügen, die Gleichungen

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{\partial F}{\partial p_\nu}, \quad \left(\frac{dp_0}{dt} = p_0 \frac{\partial F}{\partial z}\right),$$
$$\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

also gerade die charakteristischen Differentialgleichungen zu (19). Genau die gleiche Betrachtung wende man auf den Raum der ξ_μ', π_μ' an.

§ 9. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1. Die charakteristischen Differentialgleichungen. Ehe wir speziell die Charakteristikentheorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickeln, wollen wir etwas allgemeinere Gleichungen betrachten, in denen die Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

linear auftreten, also eine Differentialgleichung der Form:

$$(1) \qquad Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

worin aber A, B, C, D Funktionen von x, y, z, p und q sind.

Um eine Integralfläche in diesem Falle festzulegen, muß man im allgemeinen nicht nur eine Kurve vorgeben, sondern längs dieser Kurve auch noch die Werte von p und q, wie wir dies im nächsten Paragraphen ausführlicher sehen werden. Eine solche Kurve mit der Gesamtheit der Neigungen der durch sie hindurchgehenden Tangentenebenen nennen wir einen Streifen. Die charakteristischen Streifen bestimmen wir nun als die, welche zu mehreren Integralflächen gemeinsam gehören. Wir fassen einen Streifen ins Auge; entlang desselben ist

$$(2) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(3) \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Die Gl. (2) schränkt nur die Möglichkeiten von p und q ein, die längs der Kurve dieser Bedingung unterworfen sein müssen. Mit Hilfe von (3) drücken wir r und t durch s und die Differentiale aus und tragen dies in die mit $dx\,dy$ multiplizierte Gl. (1) ein. Das ergibt:

$$(3\text{a}) \qquad r\,dx = dp - s\,dy, \qquad t\,dy = dq - s\,dx,$$

$$(4) \quad s(A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2) - (A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy) = 0.$$

Man erkennt hieraus, daß, sobald die Funktionen x, y, z, p, q mittels irgendeines Parameters längs der Kurve gegeben sind, im allgemeinen aus (4) auch s als Funktion dieses Parameters bestimmt werden kann und durch (3a) dann auch die Funktionen r und t. Nimmt man an, daß (1) beliebig oft differenzierbare Funktionen enthält, so könnte man dieses Verfahren nun weiter treiben und im allgemeinen längs der Kurve die dritten Ableitungen und solche beliebig hoher Ordnung rekursiv bestimmen. In einem Falle jedoch ist dies Verfahren von vornherein unausführbar, nämlich, wenn in (4) längs des gegebenen Streifens der Koeffizient von s verschwindet. Dies ist derjenige Fall, in dem wir den Streifen einen charakteristischen Streifen nennen wollen. Er ist also gekennzeichnet durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(5\text{a}) \qquad A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$(5\text{b}) \qquad A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy = 0.$$

Wir können somit sagen: Wenn längs einer Kurve sich verschiedene Integralflächen berühren, so kann dies nur eine charakteristische Kurve sein, und die Integralflächen haben längs dieser charakteristischen Kurve einen Streifen gemeinsam. Man kann nun auch umgekehrt nach-

weisen, daß durch einen aus der Integration der charakteristischen Differentialgleichungen gewonnenen Streifen auch wirklich unendlich viele Integralflächen gehen, wie dies Goursat[1]) getan hat.

Wir haben hier übrigens nicht alle charakteristischen Differentialgleichungen aufgestellt. Doch sind die Gl. (2) und (5) die einzigen unter ihnen, die nur die Variablen x, y, z, p, q enthalten. Vor allem kommt es uns im folgenden auf die Gl. (5a) an; wir werden sie in Zukunft kurz die charakteristische Differentialgleichung von (1) nennen.

2. Lineare partielle Differentialgleichungen. Für lineare Differentialgleichungen wird (5a) besonders einfach. Es sei

$$ar + 2bs + ct + dp + eq + fz + g = 0 \tag{6}$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, worin die Größen $a, b, c \ldots g$ nur von x und y abhängen sollen. Dann geht die charakteristische Gl. (5a) über in

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0, \tag{7}$$

was eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $y(x)$ darstellt. Unabhängig von z und von p und q haben im linearen Falle also alle Charakteristiken in der xy-Ebene völlig bestimmte Projektionen. Diese Projektionen der Charakteristiken bilden im allgemeinen zwei Scharen, nämlich die Lösungen der beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$a\,dy - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})\,dx = 0. \tag{8}$$

Allerdings können diese Gleichungen, und damit auch ihre Lösungen, imaginär werden, nämlich in dem Falle $b^2 - ac < 0$, den man den elliptischen Fall nennt; reell sind sie in dem hyperbolischen Falle $b^2 - ac > 0$. Endlich fallen beide Gleichungen in eine zusammen, wenn, in dem sogenannten parabolischen Falle, $b^2 - ac = 0$ ist.

3. Transformation auf die Normalform mit Hilfe der Charakteristiken. Eine allgemeine Integrationstheorie kann man hier nicht mit Hilfe der Charakteristiken errichten, sie können aber dazu dienen, die Differentialgleichungen auf eine gewisse Normalform zu bringen. Indem wir zunächst den parabolischen Fall beiseite lassen, nehmen wir an, daß die Lösungen der beiden Gl. (8) in

$$u(x, y) = \alpha, \qquad v(x, y) = \beta \tag{9}$$

erhalten seien, wobei wir zunächst auch nicht beachten wollen, daß diese Funktionen im elliptischen Falle die Gl. (8) offenbar nur be-

[1]) Goursat, Lecons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, tome I, Paris 1896, S. 184—191.

friedigen können, wenn sie imaginär sind. Die Lösungen (9) bilden, da sie voneinander verschieden sein sollen, ein Netz in der xy-Ebene. Wir wollen nun α und β als neue Variablen einführen. Da wir erwähnt haben, ohne es zu beweisen, daß die Charakteristiken geometrisch dadurch ausgezeichnet sind, daß sie gemeinsame Streifen verschiedener Integralflächen sind, so können wir schließen, daß bei jeder Punkttransformation Charakteristiken wieder in Charakteristiken übergehen müssen, da Integralflächen wieder in Integralflächen übergehen. In unserem Falle hat das die Folge, daß die Charakteristiken in den neuen Variablen sich einfach schreiben müssen $\alpha =$ konst und $\beta =$ konst. Die charakteristische Differentialgleichung der aus (6) durch Transformation hervorgehenden Gleichung muß also in $d\alpha = 0$ und $d\beta = 0$ zerfallen, sie muß demnach lauten

$$2\,b^*\,d\alpha\,d\beta = 0.$$

Wir können daher im voraus erwarten, daß durch die Transformation (9) aus (6) eine Gleichung hervorgeht, deren erster und dritter Koeffizient verschwinden, die also die Form hat

$$(10) \qquad 2\,b^* \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + d^* \frac{\partial z}{\partial\alpha} + e^* \frac{\partial z}{\partial\beta} + f^* z + g^* = 0.$$

Betrachten wir noch den parabolischen Fall. Dann haben wir statt eines Netzes von Charakteristiken nur eine einzige Schar $u(x, y) = \alpha$. Jede aus einer parabolischen Differentialgleichung durch eine Punkttransformation hervorgehende Gleichung muß aber, wegen der Invarianz der Charakteristiken, wieder in eine solche übergehen. Führen wir also außer α noch irgendeine weitere davon unabhängige Variable ein, z. B. $x = \beta$, so muß in der transformierten Form die charakteristische Differentialgleichung $d\alpha = 0$ als Lösung zulassen, also muß $a^* = 0$ sein. Da aber überdies der parabolische Fall auch nach der Transformation eintritt, also $b^{*2} - a^* c^* = 0$, so muß auch $b^* = 0$ herauskommen, die transformierte Gleichung muß also die Form haben

$$(11) \qquad c^* \frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} + d^* \frac{\partial z}{\partial\alpha} + e^* \frac{\partial z}{\partial\beta} + f^* z + g^* = 0.$$

Selbstverständlich kann man diese Transformationen auch direkt durchrechnen, indem man benutzt, daß (9) die Lösungen von (8) enthält, ohne Rücksicht auf die geometrische Bedeutung der Charakteristiken.

4. Übergang zu reellen Variablen im elliptischen Falle. Analoge Normalform im hyperbolischen Falle. Im elliptischen Falle stellt (8) zwei konjugiert-komplexe Gleichungen dar, so daß die Lösungen (9) gleichfalls konjugiert-komplex werden. Es sei etwa

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y), \quad v(x, y) = \varphi(x, y) - i\,\psi(x, y),$$

wo φ und ψ reelle Funktionen sind. Setzen wir

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{12}$$

und führen ξ und η als unabhängige Variablen ein, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{i}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right),$$

also entsteht aus (10) als Normalform

$$a_*\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) + d_*\frac{\partial z}{\partial \xi} + e_*\frac{\partial z}{\partial \eta} + f_* z + g_* = 0,$$

worin nur reelle Koeffizienten auftreten, da diese Gleichung durch die reelle Transformation (11) aus der reellen Gl. (6) hervorgegangen ist.

Setzt man im hyperbolischen Falle

$$u = \xi + \eta = \text{konst}$$

und

$$v = \xi - \eta = \text{konst},$$

so nimmt (10) folgende Gestalt an:

$$a_*\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) + d_*\frac{\partial z}{\partial \xi} + e_*\frac{\partial z}{\partial \eta} + f_* z + g_* = 0.$$

Literatur

1. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2ième éd. Paris 1921.
2. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, tome I. Paris 1896.
3. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, tome II, III, 3ième éd. Paris 1918, 1923.
4. C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke, Supplementband. Berlin 1884.
5. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin 1926.

Sechzehntes Kapitel

Die Potentialgleichung in der Ebene

Die Potentialtheorie der Ebene beschäftigt sich mit der zweidimensionalen Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

insbesondere mit der Bestimmung ihrer Lösungen bei gegebenen Anfangs- oder Grenzbedingungen. Die Lösungen werden harmonische

Funktionen genannt. Das Grundproblem, auf das sich die meisten anderen Aufgaben zurückführen lassen, besteht in der Konstruktion derjenigen in einem Bereich der x-y-Ebene harmonischen Funktion, die am Rande desselben vorgeschriebene Werte annimmt (erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie).

§ 1. Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kreis

1. Das Poissonsche Integral. In III, § 1, **3** wurde gezeigt, daß die ebene Potentialtheorie in engstem Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Funktionen steht. Er beruht darauf, daß man jede in einem einfach zusammenhängenden Bereich definierte harmonische Funktion $u(x, y)$ als reellen Teil einer daselbst analytischen Funktion $f(z) = u + iv$ des komplexen Arguments $z = x + iy$ auffassen kann. Der zugehörige Imaginärteil v von $f(z)$ kann auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen [III, § 1 (10)]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

bestimmt werden und ist durch u bis auf eine additive Konstante bestimmt. Er ist selbst eine Lösung der Laplaceschen Gleichung und wird eine zu u konjugierte harmonische Funktion genannt. Wir wissen weiter, daß eine in einem (nicht notwendigerweise einfach zusammenhängenden) Bereich definierte analytische Funktion mit stetigen Randwerten durch diese vollkommen bestimmt ist und aus ihnen vermöge der Cauchyschen Formel [III, § 3 (8)]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \tag{3}$$

berechnet werden kann. Hierin bedeutet z einen inneren Punkt des Bereichs und die Integration ist über den gesamten Rand im positiven Sinne, d. h. derart zu erstrecken, daß man hierbei das Innere des Bereichs zur Linken hat. Es liegt nun die Frage nahe, ob man nicht durch Elimination von v aus (3) zur gesuchten Lösung des ersten Randwertproblems gelangen kann. Dies gelingt nun in der Tat für den Fall eines kreisförmigen Bereichs in folgender Weise: Der Kreis habe seinen Mittelpunkt im Nullpunkt und sein Radius sei R. Ersetzt man auf der rechten Seite von (3) z durch seinen Spiegelpunkt am Kreise, also durch $\frac{R^2}{\bar{z}}$, so muß, da dann der Integrand, als Funktion von ζ betrachtet, für $|\zeta| < R$ regulär und bis

in den Rand hinein stetig ist, Null herauskommen (Fundamentalsatz, III, § 3, 2):

$$(4) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}}.$$

Bezeichnet man die Randwerte von u, v, f für $\zeta = Re^{i\vartheta}$ der Reihe nach mit u_ϑ, v_ϑ, f_ϑ, so können wir, indem wir gleichzeitig statt ζ den Winkel ϑ als Integrationsvariable einführen, (3) und (4) auch so schreiben:

$$(3') \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta}{\zeta - z}(u_\vartheta + i v_\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$(4') \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}}(u_\vartheta + i v_\vartheta)\,d\vartheta.$$

Gehen wir in (4') zu den konjugierten Werten über und ersetzen (wegen $\zeta\bar{\zeta} = R^2$) $\bar{\zeta}$ durch $\frac{R^2}{\zeta}$, so ergibt sich

$$(4'') \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-z}{\zeta - z}(u_\vartheta - i v_\vartheta)\,d\vartheta.$$

Subtrahieren wir (4'') von (3'), so erhalten wir schließlich

$$(5) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u_\vartheta\,d\vartheta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_\vartheta\,d\vartheta$$

und hieraus durch Trennung von Reellem und Imaginärem die gesuchte Formel

$$(6) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) u_\vartheta\,d\vartheta.$$

Setzt man hier $z = re^{i\varphi}$, so ergibt eine einfache Rechnung (6) in der Gestalt

$$(6') \qquad u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta)} u_\vartheta\,d\vartheta.$$

Formel (6) bzw. (6') lehrt, daß und wie eine im Kreise $|z| \leqq R$ stetige, im Innern des Kreises harmonische Funktion

durch ihre Randwerte ausgedrückt werden kann und daß sie somit durch diese eindeutig bestimmt ist. Man nennt die Formel (6) nach ihrem Entdecker das Poissonsche Integral[1]). Von der bei der Herleitung derselben gemachten Voraussetzung, daß auch die konjugierte Funktion noch auf dem Rande des Kreises stetig ist, kann man sich nachträglich befreien, indem man sie zuerst auf einen kleineren Kreis $|z| \leqq R_1 < R$ anwendet und hierauf den Grenzübergang $\lim R_1 = R$ ausführt.

2. Willkürlichkeit der Randwerte. Wir werden nun umgekehrt zeigen, daß das Poissonsche Integral bei beliebig vorgeschriebener stetiger Randfunktion u_ϑ eine im Innern des Kreises harmonische Funktion liefert, die bei Annäherung an die Peripherie in die gegebenen Randwerte übergeht und somit die erste Randwertaufgabe für den Kreis löst.

Beweis: Daß zunächst $u(x, y)$ der Laplaceschen Gleichung genügt, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß der „Kern" des Poissonschen Integrals (6)

$$(7) \quad K(r, \varphi; \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \Re \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta)} \quad (0 \leqq r < R)$$

als Realteil einer analytischen Funktion des Argumentpunktes z diese Eigenschaft besitzt (III, § 1, **3**), durch Differentiation unter dem Integralzeichen.

Bei der Untersuchung des Verhaltens von $u(x, y)$ bei Randannäherung stützen wir uns auf folgende Eigenschaften des Kerns:

a) Der Kern ist eine für $r < R$ durchweg positive Funktion.

b) Es ist

$$\int_0^{2\pi} K(r, \varphi; \vartheta)\, d\vartheta = 1.$$

c) Das Integral $\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} K(r, \varphi; \vartheta)\, d\vartheta$, erstreckt nur über einen Teilbogen der Kreisperipherie, konvergiert, falls man den Punkt r, φ gegen einen inneren Punkt des Bogens rücken läßt, gegen 1 oder, was wegen Bestehens von b) hiermit gleichbedeutend ist, das Integral über den Restbogen konvergiert gegen Null.

Daß a) erfüllt ist, erkennt man unmittelbar aus der Darstellung des Kernes (7) in Polarkoordinaten.

Um b) zu beweisen, wende man das Poissonsche Integral auf $u(x, y) \equiv 1$ an.

---

[1]) Über den Zusammenhang der Formel (6) mit der „Greenschen Funktion" vgl. § 2, **5** und § 3, **1**.

Zum Beweise von c) beachte man, daß $K(r, \varphi, \vartheta)$, betrachtet allein unter der Einschränkung $r \geqq 0$, $R \geqq 0$, abgesehen von $r = R$, $\varphi \equiv \vartheta \pmod{2\pi}$ stetig ist und für $r = R$, $\varphi \not\equiv \vartheta \pmod{2\pi}$ verschwindet, woraus folgt, daß das Integral über den Restbogen bei dem betrachteten Grenzübergang gegen Null geht.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein: Es sei S die Maximalschwankung von u_ϑ, also das Maximum von $|u_{\vartheta'} - u_{\vartheta''}|$ für willkürliche Werte ϑ', ϑ'' und S_δ das Maximum von $|u_{\vartheta'} - u_{\vartheta''}|$ bei der Beschränkung $|\vartheta' - \vartheta''| \leqq \delta \; (0 < \delta < 2\pi)$. Um die Abweichung der mit den Randwerten u_ϑ angesetzten Funktion u von u_{ϑ_0} bei Annäherung an $\zeta_0 = R e^{i\vartheta_0}$ abschätzen zu können, schreiben wir u_{ϑ_0} in der Form

$$(8) \qquad u_{\vartheta_0} = \int_0^{2\pi} K(r, \varphi; \vartheta)\, u_{\vartheta_0}\, d\vartheta$$

und erhalten durch Subtraktion von (6) und (8)

$$(9) \qquad u(x, y) - u_{\vartheta_0} = \int_0^{2\pi} K(r, \varphi; \vartheta)(u_\vartheta - u_{\vartheta_0})\, d\vartheta$$

und wegen a)

$$(9') \qquad |u(x, y) - u_{\vartheta_0}| \leqq \int_0^{2\pi} K(r, \varphi; \vartheta)\, |(u_\vartheta - u_{\vartheta_0})|\, d\vartheta.$$

Zerlegt man im Integral rechts das Integrationsintervall in

$$\vartheta_0 - \frac{\delta}{2} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0 + \frac{\delta}{2}$$

und den Restbogen, so ergibt sich unter Benutzung von b)

$$(9'') \qquad |u(x, y) - u_{\vartheta_0}| \leqq S_\delta \int_{\vartheta_0 - \frac{\delta}{2}}^{\vartheta_0 + \frac{\delta}{2}} K(r, \varphi; \vartheta)\, d\vartheta + S\Big(1 - \int_{\vartheta_0 - \frac{\delta}{2}}^{\vartheta_0 + \frac{\delta}{2}} K(r, \varphi; \vartheta)\, d\vartheta\Big).$$

Wegen der Stetigkeit der Randfunktion kann von vornherein δ so klein gewählt werden, daß S_δ kleiner ist als eine vorgeschriebene positive Zahl ε. Dann ist auch der erste Bestandteil auf der rechten Seite von (9″) kleiner als ε und der zweite Bestandteil hat wegen c) diese Eigenschaft bei genügender nur von δ und S abhängiger Annäherung von $z = x + iy$ an ζ_0. Damit ist gezeigt, daß $u(x, y)$ tatsächlich die vorgeschriebenen Randwerte annimmt und daß sogar der Übergang in die Randwerte bei Annäherung an die Kreisperipherie gleichmäßig vor sich geht[1]). Das Poissonsche Integral

[1]) Das bedeutet, daß jedem positiven ε ein ebensolches für alle ζ_0 ausreichendes δ_ε zugeordnet werden kann, derart, daß $|u(x, y) - u_{\vartheta_0}| < \varepsilon$ für alle Punktepaare z, ζ_0, deren Abstand kleiner ist als δ_ε.

löst also die erste Randwertaufgabe für den Kreis. Daß damit auch die sogenannte zweite Randwertaufgabe gelöst ist, wird in allgemeinerem Zusammenhang in § 2, 4 gezeigt werden.

Man kann dieses Resultat, was hier ohne Beweis mitgeteilt sei, in folgender Weise verallgemeinern: Setzt man im Poissonschen Integral für u_ϑ eine höchstens in endlich vielen Punkten unstetige, aber beschränkte Funktion ein, so erhält man in $u(x, y)$ eine im Kreisinnern harmonische, beschränkte Funktion, die außerhalb der Unstetigkeitspunkte die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, und sie ist durch diese Eigenschaften bestimmt.

3. Reihenentwicklung der harmonischen Funktionen im Kreise. Wir wollen nun die Poissonsche Formel dazu benutzen, um eine wichtige Reihenentwicklung harmonischer Funktionen in einem Kreise herzuleiten. Zu dem Zwecke gehen wir von der Reihenentwicklung des Kerns aus:

$$\frac{1}{2\pi}\Re\left\{\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right\} = \frac{1}{2\pi}\Re\frac{1+\frac{z}{\zeta}}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{2\pi}\Re\left\{1+2\frac{z}{\zeta}+2\frac{z^2}{\zeta^2}+\cdots\right\}(|z|<R). \tag{10}$$

Sie konvergiert in dem Paar von Argumentpunkten z, ζ für

$$|z| \leqq R_1 (R_1 < R), \ |\zeta| = R$$

gleichmäßig.

Multipliziert man (10) entsprechend Gl. (6) mit u_ϑ und integriert gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist, so erhält man u in der Form

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{a_0}{2} + r(a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi) + r^2(a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi) + \cdots \tag{11}$$

mit

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_\vartheta \sin n\vartheta\, d\vartheta \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (10) konvergiert auch (11) in dem Teilkreis $r \leqq R_1$ in r und φ gleichmäßig. Für $r = R$

geht die Reihe formal in die Fourierentwicklung der Randfunktion über, die aber nicht zu konvergieren braucht.

Von den Koeffizientenformeln heben wir noch besonders die für a_0 hervor:

$$\frac{a_0}{2} = u(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\vartheta \, d\vartheta. \tag{12'}$$

Sie besagt, daß der Wert einer im Innern eines Kreises harmonischen, bis in den Rand hinein stetigen Funktion im Mittelpunkt als Mittelwert der Randwerte aufgefaßt werden kann.

Zu einer von (12) wesentlich verschiedenen Darstellung der Koeffizienten a_ν, b_ν gelangt man durch folgende Bemerkung: Wie aus der Herleitung der Reihenentwicklung (11) unmittelbar hervorgeht, entsteht sie aus der Potenzentwicklung der zu u gehörigen analytischen Funktion $f(z)$, indem man letztere gliedweise in Reelles und Imaginäres spaltet. Schreibt man sie also auf die rechtwinkligen Koordinaten x, y um, so erhält man eine Potenzreihe in diesen Variablen, in der Potenzprodukte gleich hoher Potenz ein Reihenglied bilden. Da nun eine Potenzreihe in z beliebig oft gliedweise differenziert werden kann, so gilt das auch von (11) und man kann somit die Koeffizienten in der Taylorschen Form durch Ableitungen nach x und y im Nullpunkt ausdrücken. Es ist also u durch sein Verhalten in der unmittelbaren Umgebung des Nullpunktes bereits im ganzen Kreise bestimmt. Ähnlich wie bei analytischen Funktionen kann man hierauf einen Prozeß der „harmonischen" Fortsetzung gründen[1], der zeigt, daß obige Bestimmbarkeit der harmonischen Funktionen aus dem Verhalten im Kleinen erhalten bleibt, wenn man den Kreis durch irgendeinen anderen Bereich ersetzt.

4. Der Extremumsatz. Mit Hilfe des Poissonschen Integrals lassen sich einige wichtige Ungleichungen für harmonische Funktionen herleiten, die besonders bei Eindeutigkeits- und Konvergenzbeweisen eine Rolle spielen. Die wichtigste ist in folgendem Extremumsatz enthalten: Eine in einem Bereich $\overline{\mathfrak{B}}$[2]) stetige, im Innern harmonische Funktion nimmt ihren größten und kleinsten Wert stets am Rande an und im Innern nur dann, wenn sie konstant ist[3]).

---

[1]) Vgl. III, § 3, 7.

[2]) Das Überstreichen soll zum Ausdruck bringen, daß der Rand zum Bereich gezählt wird.

[3]) Den Satz für das Minimum erhält man aus dem für das Maximum, indem man u durch $-u$ ersetzt.

Ist $\overline{\mathfrak{B}}$ eine Kreisscheibe, so fließt der Satz unmittelbar aus der Poissonschen Integralformel (6) unter Beachtung der Eigenschaften (*a*) und (*b*) der Kernfunktion; denn man hat ja

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underset{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi}{\mathrm{Max}} (u_\vartheta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta = \mathrm{Max}\,(u_\vartheta).$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur im Falle eines konstanten u_ϑ und somit konstanten $u(x, y)$ ein. Die Verallgemeinerung auf beliebige Bereiche kann nun in analoger Art vorgenommen werden, wie dies für den entsprechenden Satz für den Absolutbetrag einer analytischen Funktion in III, § 3, (6) geschehen ist; nimmt nämlich $u(x, y)$ in einem inneren Punkt (x_0, y_0) von $\mathfrak{B}$ den größten Wert an, so ergibt die Anwendung unseres Satzes für eine in $\mathfrak{B}$ fallende Kreisscheibe, die (x_0, y_0) zum Mittelpunkt hat, die Konstanz von u in der Umgebung von (x_0, y_0) und der Prozeß der harmonischen Fortsetzung zeigt die Konstanz im ganzen Bereich.

Unser Extremumsatz gestattet die wichtige Folgerung, daß das erste Randwertproblem, das wir für den Kreis gelöst haben, auch bei allgemeinen Bereichen und stetigen Randwerten jedenfalls nicht mehr als eine Lösung besitzen kann; denn die Differenz zweier Lösungen u_1, u_2 verschwindet am Rande, sie muß also identisch verschwinden.

5. Konvergente Folgen harmonischer Funktionen. Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Extremumsatz ist die folgende: Konvergiert eine Folge von in $\overline{\mathfrak{B}}$ stetigen, im Innern harmonischen Funktionen am Rande gleichmäßig, so konvergiert sie auch im Innern von $\overline{\mathfrak{B}}$ und die Konvergenz ist in ganz $\overline{\mathfrak{B}}$ eine gleichmäßige[1]. Beweis: Für genügend hohes n und beliebiges m ist $|\bar{u}_{n+m} - \bar{u}_n| < \varepsilon$[2] ($\varepsilon$ eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl). Nach dem Extremumsatz gilt diese Ungleichung dann aber auch im Innern von $\overline{\mathfrak{B}}$.

Wir können unseren Konvergenzsatz durch die Aussage vervollständigen: Die Grenzfunktion $u = \lim_{n=\infty} u_n$ ist selbst eine stetige im Innern von $\mathfrak{B}$ harmonische Funktion.

Die Stetigkeit folgt in bekannter Weise aus der gleichmäßigen Konvergenz. Um nachzuweisen, daß u harmonisch ist, denken wir uns um einen inneren Punkt 0, den wir zum Koordinatenursprung

[1] Der Satz gilt auch in entsprechender Fassung für eine von kontinuierlichen Parametern abhängende Schar harmonischer Funktionen.

[2] Durch Überstreichen werden die Randwerte angedeutet.

machen, einen Kreis $\mathfrak{K}$ gelegt, der ganz in $\overline{\mathfrak{B}}$ hineinfällt und wenden daselbst auf u_n, deren Randwerte mit $(u_n)_\vartheta$ bezeichnet werden mögen, die Poissonsche Formel an:

$$u_n(x, y) = \int_0^{2\pi} K(r, \varphi, \vartheta)(u_n)_\vartheta \, d\vartheta. \tag{13'}$$

In der Grenze erhält man hieraus wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Randfunktionen $(u_n)_\vartheta$

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} K(r, \varphi, \vartheta) u_\vartheta \, d\vartheta. \tag{13}$$

Das bedeutet aber, daß $u(x, y)$ die zu den Randwerten u_ϑ gehörige harmonische Funktion darstellt.

Indem man (13') nach x und y unter dem Integralzeichen differenziert, erkennt man, daß auch die Ableitungen beliebig hoher Ordnung von u_n gegen die entsprechenden Ableitungen von u konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Innern von $\mathfrak{B}$[1])[2]).

Ein zweiter Konvergenzsatz, den man Harnack verdankt, lautet: Es sei $u_1, u_2, \ldots$ eine Folge von in $\mathfrak{B}$ harmonischen und nicht abnehmenden Funktionen, es sei also $u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \cdots$. Es sei außerdem bekannt, daß die Folge in einem inneren Punkte O von $\mathfrak{B}$ konvergiert. Dann kann man hieraus schließen, daß die Folge in ganz $\mathfrak{B}$ konvergieren muß, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{B}$.

Der Beweis braucht nur für einen Kreisbereich mit O als Mittelpunkt geführt zu werden, da man jeden abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{B}$ mit endlich vielen in $\mathfrak{B}$ hineinfallenden abgeschlossenen Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_r$ derart überdecken kann, daß der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_\nu$ ins Innere von $\mathfrak{K}_{\nu-1}$ hineinfällt ($\nu = 2, 3, \ldots, r$) und der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ mit O identisch ist. Der Satz ist dann der Reihe nach für die einzelnen Kreise anzuwenden. Da die Differenzen $u_{n+m} - u_n$ nicht negativ sind und für hohe n in O klein werden, so handelt es sich also um Abschätzung von Potentialfunktionen in einem Kreise, die daselbst nicht negativ sind und deren Wert im Mittelpunkt bekannt ist. Es sei u eine solche Funktion, u_0 ihr Wert im Mittelpunkt. Unter Beachtung der Ungleichung

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta)} \leqq \frac{R + r}{R - r} \quad (0 \leqq r < R) \tag{14}$$

---

[1]) Auch hier gilt der Satz in entsprechender Fassung für eine von kontinuierlichen Parametern abhängende Schar harmonischer Funktionen.

[2]) Jeder solche Bereich kann mit endlich vielen ins Innere von $\mathfrak{B}$ fallenden Kreisen bedeckt werden.

liefert (6′) die wichtige Abschätzung

$$(15) \qquad u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{R+r}{R-r}\int_0^{2\pi} u_\vartheta\, d\vartheta = \frac{R+r}{R-r}\, u_0.$$

Wendet man sie auf $u_{n+m} - u_n$ an und beachtet die Konvergenz der Funktionenfolge im Mittelpunkt, so ergibt sich sofort der Harnacksche Konvergenzsatz für den Kreis und er gilt somit allgemein.

§ 2. Das Dirichletsche Integral und die Grundprobleme der Potentialtheorie

Die Theorie des Potentials steht in engster Beziehung zu einem bereits von J. J. Thomson und Dirichlet studierten Variationsproblem. Wir wollen von diesem ausgehen, um zu einer anschaulichen Einführung der Grundbegriffe und Grundprobleme der Potentialtheorie zu gelangen.

1. Das Dirichletsche Integral. Es sei $\mathfrak{B}$ ein ein- oder mehrfach zusammenhängender Bereich[1]) der z-Ebene, dessen Rand aus stetig gekrümmten Kurvenstücken zusammengesetzt ist. In ihm sei eine Funktion $u(x, y)$ definiert, die bis in den Rand hinein stetige Ableitungen erster Ordnung und im Innern auch stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, die dem Betrage nach unter einer festen Schranke bleiben. Wir bilden nun das über $\mathfrak{B}$ erstreckte „Dirichletsche Integral

$$(1) \qquad D_{\mathfrak{B}}(u,u) = \frac{1}{2}\iint_{(\mathfrak{B})} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy.$$

In den physikalischen Anwendungen bedeutet $D_{\mathfrak{B}}(u, u)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) stets den Ausdruck für die Energie eines Gradientenfeldes ∇u, die mit der Dichte $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}$ über die Ebene verteilt ist; daher wird (1) auch als Energieintegral bezeichnet.

Wir wollen nun zusehen, welche Änderung (1) erfährt, wenn man das Feld einer virtuellen Veränderung unterwirft, d. h. u durch eine wenig davon verschiedene Funktion ersetzt. Wie es in der Variationsrechnung üblich ist, setzen wir die benachbarte Funktion in der Form $u + \lambda v$ an, wo v eine in $\mathfrak{B}$ stetig differenzierbare, sonst aber

---

[1]) Ein Bereich ist k-fach zusammenhängend, wenn sein Rand aus k getrennten Stücken besteht.

willkürliche Funktion bedeutet und λ einen reellen Parameter. Für $\lambda = 0$ geht $u + \lambda v$ in u über. Es ergibt sich offenbar

$$(1') \quad D_{\mathfrak{B}}(u + \lambda v, u + \lambda v) = D_{\mathfrak{B}}(u,u) + 2\lambda D_{\mathfrak{B}}(u,v) + \lambda^2 D_{\mathfrak{B}}(v,v)$$

mit

$$(2) \qquad D_{\mathfrak{B}}(u,v) = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\mathfrak{B})}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Es ist zu beachten, daß bei Gleichsetzung von u und v der Ausdruck $D_{\mathfrak{B}}(u,v)$ in den des Dirichletschen Integrals übergeht; er ist, wie man sagt, die zum Dirichletschen Integral gehörige bilineare Bildung.

Für kleine Werte von λ kann rechts in (1') der dritte Posten gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden. Es stellt somit für kleine λ-Werte der Ausdruck $2\lambda D_{\mathfrak{B}}(u,v)$ approximativ die Veränderung des Dirichletschen Integrals dar, er ist, wie man in der Variationsrechnung sagt, die erste Variation desselben. Vgl. V, § 1.

Um zu erfahren, welchen Einfluß λv, die „Variation" von u, an den einzelnen Stellen des Bereichs $\mathfrak{B}$ auf die Änderung des Dirichletschen Integrals ausübt, rechnen wir (2) vermöge der ersten Greenschen Formel[1]) in die Summe zweier Integrale um, die nur v selbst, nicht aber die Ableitungen von v enthalten:

$$(2') \qquad 2\, D_{\mathfrak{B}}(u,v) = -\iint\limits_{(\mathfrak{B})} v \Delta u\, dx\, dy + \int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot v\, ds.$$

In dem über den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ zu erstreckenden zweiten Integral bedeutet ds das absolut genommene Bogenelement desselben, $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung in der nach außen gerichteten Normalenrichtung.

Die Koeffizienten von v im Flächen- und Randintegral geben uns nun ein Maß für die Größe des gesuchten Einflusses und wir führen, um ihre Bedeutung hervortreten zu lassen, für sie eigene Bezeichnungen ein:

$$(3) \qquad -\Delta u = 2\pi \varrho(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 2\pi\sigma(s).$$

In Anlehnung an physikalische Anwendungen möge ϱ die Flächendichte, σ die Liniendichte der zu u gehörigen Massenbelegung des Bereichs $\mathfrak{B}$ und dessen Randes genannt werden. — In der Variations-

---

[1]) Vgl. II, § 3 (33); diese Gleichung liefert, wenn man u und v vertauscht und die Reduktion von 3 auf 2 Dimensionen ausführt, genau (2') für die rechte Seite von (2).

rechnung wird Δu als der „Lagrangesche" Ausdruck des zum Dirichletschen Integral gehörigen Variationsproblems bezeichnet.

Wir wollen gleich zwei wichtige Eigenschaften der Massenbelegung herleiten, die sich leicht aus der Gl. (2') ergeben. Setzt man nämlich darin $v = 1$, so erhält man, da dann $D_{\mathfrak{B}}(u, v)$ verschwindet,

$$0 = \iint_{(\mathfrak{B})} \varrho(x, y)\, dx\, dy + \int_{(\mathfrak{R})} \sigma(s)\, ds. \tag{4}$$

Es verschwindet somit die Gesamtmasse von u in $\mathfrak{B}$, wie auch u gewählt sein mag. Setzt man $v = u$, so ergibt sich

$$D_{\mathfrak{B}}(u, u) = \pi \{\iint_{(\mathfrak{B})} \varrho u\, dx\, dy + \int_{(\mathfrak{R})} \sigma u\, ds\}. \tag{5}$$

Der Wert des Dirichletschen Integrals hängt also nur vom Produkt von u mit der Dichtefunktion an den einzelnen Stellen von $\mathfrak{B}$ ab.

2. Das Dirichletsche Prinzip. Wir wollen jetzt daran gehen die unter dem Namen Dirichletsches Prinzip bekannte fundamentale Extremumeigenschaft der harmonischen Funktionen abzuleiten.

Die harmonischen Funktionen können in unserer jetzigen Terminologie als Funktionen mit verschwindender flächenhafter Massenbelegung bezeichnet werden. Für eine solche Funktion u nimmt Gl. (2') die Gestalt an

$$2\, D_{\mathfrak{B}}(u, v) = \int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds. \tag{2''}$$

und es verschwindet somit die erste Variation des Dirichletschen Integrals, wenn die Variation von u, d. h. v, am Rande verschwindet. Die harmonischen Funktionen geben also dem Dirichletschen Integral bei festgehaltenen Randwerten einen stationären Wert. Sie sind durch diese Eigenschaft sogar gekennzeichnet; denn soll der Ausdruck (2') für jedes am Rande verschwindende v verschwinden, so muß, wie man leicht beweist, $\Delta u \equiv 0$ sein. Wir können aber eine noch weitergehende Aussage machen. Für harmonische Funktionen u und am Rande verschwindendes v gibt (1'), wenn darin $\lambda = 1$ gesetzt wird, die Formel

$$D_{\mathfrak{B}}(u + v, u + v) = D_{\mathfrak{B}}(u, u) + D_{\mathfrak{B}}(v, v). \tag{1''}$$

Nun ist aber $D_{\mathfrak{B}}(v, v)$ wegen des nicht negativen Integranden niemals negativ und nur dann gleich Null, wenn der Integrand und damit die Ableitungen von v identisch verschwinden, v also konstant ist. Soll aber v gleichzeitig am Rande verschwinden, dann muß es identisch verschwinden, und wir erhalten folgende Verschärfung des stationären

Verhaltens der harmonischen Funktionen: Eine in $\mathfrak{B}$ stetig differenzierbare, im Innern des Bereichs harmonische Funktion erteilt unter allen der ersteren Bedingung genügenden Funktionen, die mit ihr in den Randwerten übereinstimmen, dem Dirichletschen Integral den kleinsten Wert. Dieses Theorem wird als das Dirichletsche Prinzip bezeichnet. Auf ihm beruht eine Reihe von Methoden zur Lösung der ersten Randwertaufgabe [1]). (Vgl. XX.)

3. Die Poissonsche Gleichung und die Greensche Funktion. Die zuletzt eingeführten Begriffsbildungen führen naturgemäß auf die Frage, inwieweit durch Vorgabe von ϱ und σ oder ϱ allein die Funktion u bestimmt ist und wie sie aus den gegebenen Daten konstruiert werden kann. Daß ϱ und σ nicht gleichzeitig willkürlich vorgeschrieben werden können, lehrt Gl. (4). Andererseits ist eine Funktion durch ihre Massen bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Das sieht man folgendermaßen ein: Sind u_1 und u_2 zwei Funktionen mit denselben Massen, so genügt die Differenz $u = u_2 - u_1$ dem Gleichungssystem $\Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Setzt man sie also in die Gl. (5) ein, so erkennt man, daß ihre Gesamtenergie in $\mathfrak{B}$ verschwindet und daß sie somit konstant sein muß.

Wir werden im folgenden zeigen, daß, wenn (4) erfüllt ist, eine zugehörige Funktion existiert. Die Bestimmung von u zerlegt man naturgemäß in zwei Teilaufgaben. Wir versuchen u darzustellen als Summe von zwei Funktionen u^* und u^{**}, von denen die erste der „Poissonschen Differentialgleichung"

$$\Delta u^* = -2\pi\varrho \tag{6}$$

genügt und am Rande verschwindet. Die Restfunktion u^{**} genügt dann der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u^{**} = 0 \tag{7}$$

und nimmt am Rande vorgeschriebene Normalableitungen σ^{**} an. σ^{**} ist natürlich die Differenz von σ und der aus u^* entspringenden Randbelegung. Wegen (4) ist

$$\int \sigma^{**}\, ds = 0. \tag{8}$$

Wir wenden uns zuerst der Konstruktion von u^* zu. Es ist zunächst klar, daß es nicht mehr als eine Lösung geben kann; denn die Differenz zweier Lösungen ist eine Lösung der

---

[1]) Eine eingehendere Analyse zeigt, daß man die Voraussetzung, die harmonische Funktion habe auch am Rande stetige Ableitungen, durch die weniger fordernde ersetzen kann, ihr Dirichletsches Integral sei endlich.

Laplaceschen Gleichung, die am Rande verschwindet; sie muß also identisch verschwinden. Die Herstellung von u^* beruht nun auf folgendem einfachen Gedanken: Ist ϱ die Übereinanderlagerung von h Massenbelegungen $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_h$ und die zu den $\varrho_\nu (\nu = 1, \ldots, h)$ gehörigen, am Rande verschwindenden Lösungen u_ν^* von (6) bekannt, so ist $u^* = u_1^* + u_2^* + \cdots + u_h^*$. Es kommt also bei Konstruktion von u^* darauf an, ϱ aus möglichst einfachen Massenbelegungen aufzubauen. Die einfachste Belegung von $\mathfrak{B}$ erhält man, wenn man die gesamte Masse m in einen einzigen Punkt von $\mathfrak{B}: z' = x' + i y'$ konzentriert. Wie aus den Entwicklungen in XIII, § 3, 1 zu ersehen ist, handelt es sich dann (im Falle $m = 1$) um die Bestimmung einer in $\mathfrak{B}$ mit Ausnahme von $z = z'$ regulären, am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwindenden harmonischen Funktion $G(z', z)$ $(z = x + i y)$ in x und y, die im Punkte $z = z'$ unendlich wird wie $\log \frac{1}{r_{zz'}}$ $(r_{zz'} = |z' - z| =$ Distanz von z und z'), derart, daß die Differenz

$$G(z', z) - \log \frac{1}{r_{zz'}} = R(z', z) \tag{9}$$

eine im Innern von $\mathfrak{B}$ auch für $z = z'$ reguläre harmonische Funktion in x, y darstellt. Man nennt G die zum Aufpunkt z' gehörige Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ (XIII, § 3, 1). Da G am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwindet, nimmt R dort die Werte $-\log \frac{1}{r_{z'z}}$ an und es kann also höchstens eine solche Funktion geben. Der Existenzbeweis für die Greensche Funktion für einfach zusammenhängende Bereiche wird in § 4 erbracht werden.

Die obigen Überlegungen lassen nun vermuten, daß die gesuchte Lösung der Poissonschen Gleichung durch

$$u^*(x, y) = \iint_{\mathfrak{B}} G(z', z)\, \varrho\, (x', y')\, d x'\, d y' \tag{10}$$

gegeben ist. Wir wollen hier für diese Formel, die auch der Anwendung der Integralgleichungen in der Potentialtheorie zugrunde liegt (XIII, § 3, 1), einen Beweis geben unter der Voraussetzung, daß ϱ in $\mathfrak{B}$ beschränkt und stetig differenzierbar ist. Hierbei verwenden wir folgende auch sonst wichtigen Sätze über die Greensche Funktion:

a) Die Greensche Funktion ist für $z' \neq z$ eine stetige Funktion ihrer beiden Argumentpunkte. Es genügt, die Stetigkeit von $R(z', z)$ zu beweisen. Diese folgt aber aus der Tatsache, daß die Randwerte von R sich mit dem Parameter z' stetig ändern im Verein mit der Anmerkung 1 auf Seite 692.

b) Die Greensche Funktion ist im Innern von $\mathfrak{B}$ positiv. Aus (9) folgt, daß man um den Aufpunkt einen so kleinen Kreis

schlagen kann, daß in ihm und auch auf dem Rande G positiv ausfällt. Schneidet man diesen Kreis aus $\mathfrak{B}$ aus, so entsteht ein Restgebiet, in dem G regulär ist und auf dessen Rand G nirgends negativ, auf einem Randstück sogar positiv ist. Die Anwendung des in § 1, 4 abgeleiteten Extremumsatzes zeigt nun, daß die Greensche Funktion auch im Restgebiet positiv ist.

c) Die Greensche Funktion ist eine symmetrische Funktion ihrer beiden Argumentpunkte, d. h. es ist

$$G(z', z) = G(z, z') \tag{11}$$

für jedes Punktepaar aus $\mathfrak{B}$. Der Beweis hierfür ist in XIII, § 3, 3 für den allgemeinen Fall erbracht worden, daß es sich um die Greensche Funktion eines allgemeinen Differentialausdrucks zweiter Ordnung $\mathfrak{L}(u)$ handelt. Er braucht hier für den Sonderfall $\mathfrak{L}(u) \equiv \Delta u$ nicht wiederholt zu werden.

d) Beschränkt man z auf einen Teilbereich $\overline{\mathfrak{B}}_1$ von $\mathfrak{B}$ und läßt den Aufpunkt z' gegen den Rand von $\mathfrak{B}$ rücken, so konvergiert G und auch seine Ableitungen nach x und y von beliebig hoher Ordnung in $\overline{\mathfrak{B}}_1$ gleichmäßig gegen Null. Wegen c) gilt der Satz auch bei Vertauschung der Rolle von z und z' und ist in dieser Form, soweit er G selbst betrifft, eine Folge des Verschwindens von G am Rande im Verein mit der beim Beweis von a) verwendeten Eigenschaft der gleichmäßigen Änderung der Randwerte von $R(z', z)$ mit dem Parameter. Um die weitergehende Aussage über die Ableitungen zu erhalten, berücksichtige man die Anmerkung 1 auf Seite 693.

Wir können nun zeigen, daß die durch (10) dargestellte Funktion $u^*(x, y)$ tatsächlich der Poissonschen Gleichung $\Delta u^* = -2\pi\varrho$ genügt. Zunächst lehrt c) überhaupt, daß das Integral (10) gewiß existiert, da auch bei Randannäherung des Aufpunktes z' und festgehaltenem z die Greensche Funktion gegen 0 geht. Wir setzen nun $u^* = u_1^* + u_2^*$ mit

$$u_1^* = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \log\frac{1}{r_{z'z}}\,\varrho(x', y')\,dx'\,dy', \quad u_2^* = \iint\limits_{\mathfrak{B}} R(z', z)\,\varrho(x', y')\,dx'\,dy'. \tag{12}$$

Die Entwicklungen in XIV, § 1, 4 lehren, daß u_1^* für sich schon der Gleichung $\Delta u_1^* = -2\pi\varrho$ genügt. Man muß also vor allem zeigen, daß $\Delta u_2^* = 0$ ist. Dies ist aber der Fall, da ja R harmonisch ist und die auf die Ableitungen bezügliche Aussage von d) die Möglichkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen gewährleistet.

Es fehlt noch der Nachweis, daß $u^*(x, y)$ gegen Null konvergiert, wenn man z auf den Rand rücken läßt. Zu dem Zwecke zer-

legen wir $\mathfrak{B}$ in einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{B}_1$ und den Restbereich $\mathfrak{B}_2$ und spalten dementsprechend das Integral (10) in zwei Teilintegrale. Das über $\mathfrak{B}_1$ erstreckte konvergiert, wenn z auf den Rand rückt, wie aus d) folgt, gegen Null. Um über die Größe des über $\mathfrak{B}_2$ erstreckten Integrals Aufschluß zu gewinnen, brauchen wir eine neue Abschätzung des Integranden. Es sei D die Breite von $\mathfrak{B}$, d. h. die Maximaldistanz je zweier seiner Punkte. Da $R(z', z)$ als Funktion von z in $\mathfrak{B}$ regulär ist und, wenn z auf den Rand rückt, gleich $-\log \frac{1}{r_{z'z}}$ wird, so ist auf Grund des Extremumsatzes $-R(z', z) < \log D$ und somit

$$0 < G < \log \frac{D}{r_{z'z}}. \tag{13}$$

Ist nun etwa $|\varrho| < M$, so erhält man die Abschätzung

$$\left| \iint\limits_{\mathfrak{B}_2} G(z', z)\, \varrho(x', y')\, dx'\, dy' \right| < M \iint\limits_{\mathfrak{B}_2} \log \frac{D}{r_{z'z}}\, dx'\, dy'.$$

Nach der Schlußweise von XIV, § 1, 4 ist aber das Integral rechts nicht größer als das Integral mit demselben Integranden erstreckt über einen Kreis um den Punkt z mit demselben Inhalt J wie $\mathfrak{B}_2$ und konvergiert also mit J gegen Null. Wir können demnach folgendes Resultat aussprechen: Ist $\varrho(x, y)$ eine in $\mathfrak{B}$ stetig differenzierbare beschränkte Funktion, so genügt die durch (10) dargestellte Funktion der Poissonschen Gleichung (6) und geht bei Annäherung an den Bereichrand in Null über. Sie ist durch diese Eigenschaft bestimmt.

4. Die zweite Randwertaufgabe. Die Auflösung der Laplaceschen Differentialgleichung bei vorgeschriebener Randbelegung σ, d. h. bei vorgeschriebener Normalableitung am Rande, ein Spezialfall des oben formulierten allgemeinen Problems ($\varrho = 0$), nennt man das zweite Randwertproblem der Potentialtheorie. Die oben aufgeschobene Bestimmung von u^{**} kommt also auf eine Lösung des zweiten Randwertproblems hinaus. Wir wollen sehen, daß die Ermittlung von u^{**} bei Beschränkung auf einfach zusammenhängende Bereiche auf die Herstellung gewisser Lösungen des ersten Randwertproblems zurückgeführt werden kann. Wir nehmen also an, daß uns die Normalableitung $\frac{\partial u^{**}}{\partial n} = 2\pi\sigma^{**}(s)$ am Rande vorgeschrieben ist und suchen ein zugehöriges Potential. Von der Randbelegung σ^{**} setzen wir zuerst voraus, daß sie stetig ist und der für die Lösbarkeit bereits als notwendig erkannten Bedingung (8) genügt. Wir wollen zuerst an-

nehmen, daß eine Lösung des Problems u^{**} existiert von der Art, daß auch die konjugierte Funktion v^{**} mit ihren Ableitungen erster Ordnung bis in den Rand hinein stetig ist. Dann ist auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen am Rande $\frac{\partial u^{**}}{\partial n} = + \frac{\partial v^{**}}{\partial s}$, falls wachsenden Werten des Bogens s der positive Umlaufsinn entspricht, also derjenige, bei dem man das Innere des Bereichs zur Linken hat. Hieraus ergibt sich aber die Möglichkeit der Berechnung der Randwerte von v^{**}, und zwar hat man

$$v_s^{**} = 2\pi \int \sigma^{**}(s)\, d s + \text{Const.} \tag{14}$$

Die Gl. (8) sichert uns die Eindeutigkeit der durch (14) dargestellten Randfunktion von v^{**}. [Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen ist die linke Seite von (8) als Summe der über die einzelnen Randlinien erstreckten Integrale aufzufassen und Gl. (14) wird deshalb nur dann zu auf den einzelnen Randlinien eindeutigen Randfunktionen führen, wenn die Gesamtmassen auf diesen einzeln verschwinden. Das führt Komplikationen mit sich.]

Aus den Randwerten von v^{**} kann nun diese Funktion auch im Innern des Bereichs berechnet werden und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen geben uns dann auch die gesuchte Funktion u^{**}. Daß eine willkürliche additive Konstante in die Lösung eingehen muß, haben wir bereits früher durch allgemeine Überlegungen erkannt.

Die Konstruktion, die von σ^{**} zu u^{**} führte, kann nun auch dann ausgeführt werden, wenn die vorausgesetzten Randregularitäten von u^{**} und v^{**} nicht feststehen, und wird im allgemeinen auch Funktionen ergeben, die diesen Bedingungen nicht genügen. Es ist aber zu beachten, daß in den Anwendungen der Potentialtheorie meist nicht so sehr die Dichte $\sigma^{**}(s)$ selbst, sondern die Masse auf ganzen Teilbögen $s_1 \leqq s \leqq s_2$ eine Rolle spielt, und diese nach Gl. (14) im Regularitätsfalle durch die Wertedifferenz der konjugierten Funktion in den Endpunkten des Bogens gegeben ist. Wir wollen deshalb das zweite Randwertproblem von nun an so auffassen: Es wird eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige Funktion gesucht, deren konjugierte auf den einzelnen Randlinien bis auf eine additive Konstante vorgeschriebene Werte annimmt. Da wir im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereichs beweisen werden, daß das erste Randwertproblem stets lösbar ist, so können wir dann das Resultat aussprechen, daß es stets eine bis auf eine additive Konstante bestimmte Lösung besitzt.

5. Allgemeine Lösung der ersten Randwertaufgabe mit Hilfe der Greenschen Funktion. Es sei $u(x, y)$ eine in $\mathfrak{B}$ harmonische Funktion, deren erste Ableitungen bis in den Rand hinein stetig sind. Schneiden wir aus $\mathfrak{B}$ einen kleinen Kreis $\mathfrak{K}_\varrho$ mit dem Radius ϱ um den Aufpunkt z' der Greenschen Funktion $G(z', z)$ aus und wenden im Restbereich auf G sowie u die zweite Greensche Formel an, so ergibt sich, wenn man das Verschwinden von G am Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ beachtet,

$$(15) \qquad \int\limits_{(\mathfrak{R})} u \frac{\partial G}{\partial n} d s + \int\limits_{(\mathfrak{K}_\varrho)} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) d s = 0.$$

Der Grenzübergang $\varrho \to 0$ liefert für den zweiten Bestandteil in (15) den Wert $2 \pi u(x', y')$ und wir erhalten so die fundamentale Formel

$$(16) \qquad u(x', y') = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\mathfrak{R})} \bar{u} \frac{\partial G}{\partial n} d s.$$

Sie lehrt, wie man u aus den Randwerten $\bar{u}$ berechnen kann, wenn die Greensche Funktion des Bereichs bekannt ist. Zum Verständnis der Formel sei angeführt, daß sie aus (10) gewonnen werden kann, indem man die Belegung in eine Doppellinie am Rande mit der Dichte $\bar{u}$ ausarten läßt. Wir werden weiter bald sehen, daß das Poissonsche Integral für den Kreis sich als Spezialfall unserer Formel unterordnet.

Man kann (16) eine einfachere Form geben, wenn man die zu G konjugierte Funktion H einführt. Es ist ja, wenn wieder wachsenden Werten der Bogenlänge der positive Umlauf entspricht, $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial s}$, und man kann (16) also auch in der Form schreiben

$$(16') \qquad u(x', y') = -\frac{1}{2\pi} \int \bar{u} \frac{\partial H}{\partial s} d s = -\frac{1}{2\pi} \int \bar{u}\, d H.$$

Es ist wohl zu beachten, daß H schon in einfach zusammenhängenden Bereichen keine eindeutige Funktion sein kann, da ja das Integral $\int d H = \int \frac{\partial G}{\partial n} d s$, erstreckt über jede z' im positiven Sinne umlaufende Kurve, den Wert -2π ergibt. Das lehrt die Zerlegung (9). Das Differential $d H = \frac{\partial G}{\partial n} d s$ jedoch ist eine eindeutige Größe.

Wir haben bei Ableitung der Formeln (16) bzw. (16′) die Annahme gemacht, daß u bis in den Rand hinein stetige Ableitungen

besitzt, und dies auch stillschweigend von G und H vorausgesetzt. Da aber die Formeln nur die Randwerte von u, und (16′) in der an zweiter Stelle stehenden Schreibweise nicht einmal die Ableitungen von G enthält, so ist die Frage von Interesse, inwieweit man sich von ihnen befreien kann und ob überhaupt durch sie bei willkürlich vorgeschriebenen stetigen oder abteilungsweise stetigen Randwerten das erste Randwertproblem gelöst ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, beruht auf den folgenden Sätzen über das Verhalten von H am Bereichsrande, deren Beweis wir jedoch nicht vollständig durchführen können.

a) Die Konjugierte der Greenschen Funktion besitzt stetige Randwerte, die beim positiven Umlauf einer Randlinie ständig abnehmen. Man kann also auf dem Rande H als einen ausgezeichneten, nur noch vom Aufpunkt z' abhängigen Parameter betrachten.

a′) Ist der Rand stetig gekrümmt, so besitzen auch die ersten Ableitungen von G und H stetige Randwerte, und man kann die Aussage über das Abnehmen von H auf dem Rande noch verschärfen durch die Ungleichung

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial G}{\partial n} < 0. \tag{17}$$

Daß $\frac{\partial G}{\partial n}$ nicht positiv sein kann, kann man übrigens sofort dem Umstand entnehmen, daß G im Bereichsinnern positiv ist, am Rande aber verschwindet.

b) Es sei $2\pi e_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, h)$ der Abfall, den H auf der α-ten Randlinie $\mathfrak{R}_\alpha$ erfährt; dann ist

$$\sum_{\alpha=1}^{h} e_\alpha = 1. \tag{18}$$

Bei stetig gekrümmten Randlinien ist $e_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{R}_\alpha} \frac{\partial G}{\partial n}\, ds$, und man erhält die Gleichung durch Anwendung von (4).

c) Läßt man z' gegen einen inneren Punkt eines beliebig kleinen Randstückes $\mathfrak{S}$ konvergieren, so konvergiert die Abnahme von H auf $\mathfrak{S}$ gegen 2π, somit wegen (18) die Gesamtabnahme auf dem Rest des Randes gegen Null.

Mit Hilfe der angegebenen Eigenschaften von H kann nun leicht gezeigt werden, daß (16′) bei willkürlich vorgeschriebenen stetigen Randwerten $\bar{u}$ die erste Randwertaufgabe löst: Daß u in $\mathfrak{B}$ der Laplaceschen Gleichung genügt, ergibt sich durch Differentiation unter

dem Integralzeichen. Um nachzuweisen, daß u die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, kann man genau so vorgehen, wie das beim Poissonschen Integral in (§ 1) geschehen ist.

6. Greensche Funktion und konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereichs. Riemann hat als erster die Behauptung aufgestellt, daß jeder einfach zusammenhängende Bereich $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann, und er hat den Zusammenhang dieses Problems mit der Bestimmung der Greenschen Funktion desselben angegeben. Es sei $\zeta = f(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ analytische Funktion, die eine Abbildung der verlangten Art auf das Innere des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ leistet, und es möge etwa dem Punkte $z = z'$ der Kreismittelpunkt $\zeta = 0$ entsprechen. In der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ um $z = z'$

$$f(z) = a_1(z - z') + a_2(z - z')^2 + \cdots \tag{19'}$$

fehlt also das konstante Glied. Schon der erste Koeffizient $a_1 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z'}$ aber muß von Null verschieden sein, da ja sonst die Abbildung schon in der Umgebung von z' nicht umkehrbar wäre. (Siehe III, § 3, 6 Schlußbemerkung.) Wir können also $f(z)$ in der Form schreiben

$$f(z) = (z - z')\, f_1(z), \tag{19''}$$

und $f_1(z)$ ist in ganz $\mathfrak{B}$ (auch in z') von Null verschieden. Ich behaupte nun, daß

$$G = \log \frac{1}{|f(z)|} \tag{20}$$

die zum Aufpunkt z' gehörige Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ darstellt. Zuerst ist klar, daß G als Realteil der analytischen Funktion

$$G + iH = \log \frac{1}{f(z)} + i\alpha \tag{21}$$

(α bedeutet eine beliebig wählbare reelle Zahl) harmonisch ist und wie (19″) zeigt, in $z = z'$ die vorgeschriebene Unstetigkeit hat. Da weiter bei Annäherung von z an den Bereichsrand ζ gegen die Kreisperipherie gehen muß, also $|f(z)|$ gegen 1, so verschwindet G am Rande. Wir sehen somit, daß G die für die Greensche Funktion charakteristischen Eigenschaften besitzt.

Wir wollen jetzt das Umgekehrte nachweisen: Ist G die zum Aufpunkt z' gehörige Greensche Funktion, H ihre bis auf eine additive Konstante $-\alpha$ bestimmte Konjugierte, so stellt die durch Auflösung von (21) gewonnene Funktion

$$f(z) = e^{i\alpha} e^{-G - iH} \tag{21'}$$

die (allgemeinste) Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $|\zeta| < 1$ dar, die den Punkt $z = z'$ in $\zeta = 0$ übergehen läßt. Dies kann folgendermaßen eingesehen werden: Die Zerlegung (9) von G zeigt, daß man $G + iH$ in der Form schreiben kann

$$G + iH = \log \frac{1}{z - z'} - \varphi(z)$$

mit eindeutigem analytischen $\varphi(z)$, und es ist also auch

$$(22) \qquad e^{-i\alpha} f(z) = e^{-G - iH} = (z - z') e^{\varphi(z)} = (z - z') f_1(z)$$

eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige analytische Funktion. Nun ist

$$|f(z)| = e^{-G}$$

für Punkte in $\mathfrak{B}$ wegen $G > 0$ kleiner als 1. $f(z)$ nimmt also in $\mathfrak{B}$ nur Werte an, die innerhalb des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ liegen. Da weiter G am Rande verschwindet, so konvergiert sie dem Betrage nach gegen 1, wenn z auf den Rand geht. Es muß darüber hinaus gezeigt werden, daß jeder Wert aus dem Einheitskreis einmal, aber auch nur einmal angenommen wird.

Daß $\zeta = 0$ diese Eigenschaft hat, zeigt Gl. (22). Daraus läßt sich dasselbe für jeden anderen Wert aus $|\zeta| < 1$ erschließen, und zwar auf Grund des folgenden Hilfssatzes: Eine in einem Bereich $\mathfrak{B}$ analytische Funktion $f(z)$, deren Betrag daselbst kleiner ist als 1, bei Annäherung an den Rand aber gegen 1 konvergiert, nimmt in $\mathfrak{B}$ jeden Wert gleich oft an.

Wir fassen der Einfachheit halber einen einfach zusammenhängenden Bereich ins Auge, der Beweis gilt jedoch allgemein. Wir konstruieren in $\mathfrak{B}$ eine einfach geschlossene Linie $\mathfrak{L}$, die dem Rande so nahe ist, daß außerhalb von ihr $|f(z)|$ größer ist als eine vorgegebene Zahl ϱ $(0 < \varrho < 1)$. Es sei nun ζ_0 irgendein Wert aus dem Kreise $|\zeta| < \varrho$. Er kann offenbar von $f(z)$ nur innerhalb von $\mathfrak{L}$ angenommen werden. Um zu ermitteln, wie oft dies geschieht, haben wir die Zahl der in das Innere von $\mathfrak{L}$ fallenden Nullstellen von $f(z) - \zeta_0$ zu berechnen. Diese ist aber nach dem Satz von Rouché (III, § 3, 6) gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(z)$, was den Hilfssatz beweist.

Da (22) die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes erfüllt und der Wert 0 nur einmal angenommen wird, so ist bewiesen, daß (21') tatsächlich eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf das Innere des Einheitskreises liefert, und die Willkürlichkeit des konstanten Faktors $e^{i\alpha}$ bedeutet, daß die allgemeinste solche Abbildung, die aus z' den 0-Punkt $\zeta = 0$ hervorgehen läßt, gewonnen

wird, indem man auf eine von ihnen eine beliebige Drehung des Kreises um seinen Mittelpunkt folgen läßt. Wir können $e^{i\alpha}$ eindeutig festlegen, wenn wir fordern, daß einer vorgeschriebenen Richtung durch z' die positive reelle Achsenrichtung entsprechen soll[1].

Hat man zwei Bereiche $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ auf $|\zeta| < 1$ abgebildet, so gibt die Zusammensetzung der ersten Abbildung mit der Inversen der letzteren eine Abbildung von $\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{B}''$, und wir können also die bisherigen Resultate in folgende allgemeine Form kleiden: Zwei einfach zusammenhängende Bereiche, die von einfach geschlossenen Kurven begrenzt sind, lassen sich stets umkehrbar eindeutig und konform aufeinander abbilden. Die Abbildung ist vollkommen bestimmt durch die Forderung, daß einem vorgeschriebenen Richtungselement (Punkt und Richtung durch ihn) in dem einen Bereich ein vorgegebenes Richtungselement im Bildbereich entsprechen soll.

Wir haben bis jetzt stets nur von der Abbildung des Innern eines Bereichs auf das Innere des Bildbereichs gesprochen. Die Stetigkeits- und Monotonieeigenschaften der Konjugierten der Greenschen Funktion am Rande, die in 5 a), a') erwähnt wurden, zeigen jedoch, daß die Abbildung bis in den Rand hinein stetig ist und die Randlinien ebenfalls umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen sind. Doch braucht die Abbildung am Rande nicht mehr konform zu sein. Im Falle stetig gekrümmter Ränder ist dies jedoch der Fall, da dann die Abbildungsfunktion am Rande noch eine Ableitung besitzt, die wegen (17) von Null verschieden ist.

7. Unendliche Bereiche. Wir haben in den Entwicklungen, die sich an die Einführung des Dirichletschen Integrals anschließen, nur beschränkte Bereiche ins Auge gefaßt. Wir wollen nun zeigen, daß alle bisher gewonnenen Resultate sich sinngemäß auch auf solche Bereiche übertragen lassen, die den Punkt $z = \infty$ im Innern oder auf dem Rande enthalten, und zwar beruht dies im wesentlichen auf folgenden einfachen Tatsachen:

a) Das Dirichletsche Integral ist invariant gegenüber konformen Abbildungen. Das bedeutet folgendes: Wird ein Bereich $\mathfrak{B}$ der z-Ebene vermöge einer analytischen Funktion $\zeta = f(z)$ konform auf einen Bereich B der ζ-Ebene abgebildet und eine in $\mathfrak{B}$ definierte

[1] Dies soll natürlich bedeuten, daß den von z' in der vorgegebenen Richtung auslaufenden Kurven im Bilde Kurven entsprechen sollen, die $\zeta = 0$ in der Richtung der positiven reellen Achse verlassen.

stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$ vermöge der Abbildung nach B verpflanzt, so ist, wenn $u(x, y) = \omega(\xi, \eta)\,(\zeta = \xi + i\eta)$ gesetzt wird,

$$(23)\qquad \iint\limits_{(\mathfrak{B})} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \iint\limits_{(B)} \left\{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\,d\eta.$$

Eine einfache Rechnung unter Benutzung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil von $f(z)$ lehrt nämlich, daß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left\{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2\right\} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Dies im Verein mit der Transformationsregel für Doppelintegrale [1]) zeigt die Gültigkeit von Gl. (23). Hat man nun eine Funktion u in einem Bereich $\mathfrak{B}$ definiert, der $z = \infty$ im Innern enthält, etwa im Äußeren eines Kreises, so wird man sie als im Unendlichen stetig differenzierbar ansehen, wenn sie, auf die Variable $\zeta = \frac{1}{z}$ umgeschrieben, eine in der Umgebung von $\zeta = 0$ (mit Einschluß dieses Punktes) stetig differenzierbare Funktion liefert, und das Dirichletsche Integral von u über $\mathfrak{B}$ definitionsgemäß mit dem Dirichletschen Integral der verpflanzten Funktion über den Bildbereich gleichsetzen.

b) Auch die „Massenintegrale"

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})} \varrho(x, y)\,dx\,dy, \quad \int\limits_{(\mathfrak{k})} \sigma(s)\,ds \left(\varrho = -\frac{1}{2\pi}\Delta u, \quad \sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

sind gegenüber konformen Abbildungen invariant. Der Beweis kann ebenso wie oben geführt werden. (Darin ist als Spezialfall enthalten, daß die Gleichung $\Delta u = 0$ bei konformer Abbildung invariant bleibt.) Wir können dementsprechend von der Masse einer Funktion in einem Bereich sprechen, der $z = \infty$ im Innern oder auf dem Rande enthält, oder der Masse auf einem Kurvenstück, das durch ∞ hindurchgeht. Man darf auch von einer Funktion sprechen, deren Masse m in $z = \infty$ konzentriert ist. Das ist eine solche Funktion, die sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes als Summe von $m \log r$ $\left(\text{nicht } m \log \frac{1}{r}!\right)$ und einer regulären Potentialfunktion

---

[1]) Die Funktionaldeterminante $\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial \cdot\cdot} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$ ist positiv.

schreiben läßt. Man kann also auch von der Greenschen Funktion mit dem Aufpunkt im Unendlichen reden.

Der Leser wird sich leicht selbst überzeugen können, daß die fundamentalen Formeln (10) und (16′) und ebenso der Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Bereiche auch für unendlich ausgedehnte Bereiche ihre Gültigkeit behalten. Sehr häufig wird der folgende Spezialfall angewendet, den wir deshalb besonders hervorheben: Sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der $z = \infty$ im Innern enthält; dann ist es möglich, ihn so auf das Äußere des Einheitskreises $|\zeta| > 1$ abzubilden, daß aus $z = \infty$ der Punkt $\zeta = \infty$ hervorgeht. Die Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$ hat also im Unendlichen einen einfachen Pol, und ihre Reihenentwicklung im Unendlichen ist also von der Form

$$\zeta = b_{-1} z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \quad (b_{-1} \neq 0).$$

Sie ist bis auf eine multiplikative Konstante vom Betrag 1, die die Möglichkeit der Drehung des Einheitskreises in sich zum Ausdruck bringt, bestimmt.

§ 3. Beispiele

1. Die Greensche Funktion des Innern und des Äußern eines Kreises sowie einer Halbebene. Wir wollen zuerst die Greensche Funktion des Einheitskreises $|z| < 1$ der z-Ebene ermitteln. Nach Gl. (20) können wir sie unmittelbar hinschreiben, wenn es uns gelingt, den Kreis derart auf sich selbst konform abzubilden, daß der Aufpunkt z' $(|z'| < 1)$ in den Nullpunkt transformiert wird. Aus III, § 2, 2 wissen wir, daß lineare Funktionen $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$ $(ad - bc \neq 0)$ allgemein Kreise in Kreise überführen, und wir wollen zunächst sehen, ob es möglich ist, die Konstanten a, b, c, d derart zu bestimmen, daß unseren Forderungen Genüge geleistet wird. Soll z' in den Nullpunkt übergehen, so muß jedenfalls der Zähler der gesuchten linearen Funktion für $z = z'$ verschwinden. Die Nullstelle des Nenners ergibt sich folgendermaßen: Wir wissen, daß bei einer Kreisverwandtschaft Spiegelpunkte an einem Kreise in Spiegelpunkte am Bildkreis übergehen. Soll also der Einheitskreis in sich transformiert werden und $z = z'$ in 0, so muß aus $z = \frac{1}{\bar{z}'}$ [1] der Wert ∞ hervorgehen, d. h. die Nullstelle des Nenners ist $\frac{1}{\bar{z}'}$. Die lineare Funktion hat also jedenfalls

[1] Das Überstreichen bei komplexen Zahlen soll wie früher den Übergang zum konjugierten Wert bedeuten.

die Gestalt $A \frac{z - z'}{1 - \bar{z}' z}$ mit einem konstanten Faktor A. Nun ist für $|z| = 1$

$$\overline{\frac{z - z'}{1 - \bar{z}' z}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}'}{1 - z' \bar{z}} = \frac{\frac{1}{z} - \bar{z}'}{1 - \frac{z'}{z}} = \frac{1 - \bar{z}' z}{z - z'},$$

also $\left|\frac{z - z'}{1 - \bar{z}' z}\right| = 1$, und damit ist gezeigt, daß schon $\frac{z - z'}{1 - \bar{z}' z}$ die verlangte Abbildung leistet und $|A| = 1$ sein muß. Die allgemeinste konforme Abbildung eines Kreises in sich ist also durch

$$\zeta = e^{i\alpha} \frac{z - z'}{1 - \bar{z}' z} \quad (\alpha \text{ reell}, \ |z'| < 1) \tag{1}$$

gegeben.

Nach (20) lautet die Greensche Funktion des Einheitskreises für den Aufpunkt z'

$$G = \log \left| \frac{1 - \bar{z}' z}{z - z'} \right|. \tag{2}$$

Von der Formel (1) soll nun eine wichtige allgemeine Anwendung gemacht werden. Es sei für einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ irgendeine Abbildungsfunktion $f(z)$ auf das Innere des Einheitskreises bekannt, und wir stellen uns die Aufgabe, aus $f(z)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ für einen allgemeinen Aufpunkt z' zu konstruieren. Wir wissen, daß hierzu die Kenntnis einer Abbildung notwendig ist, die aus z' den Mittelpunkt des Einheitskreises hervorgehen läßt. Da $f(z)$ für z' den Bildpunkt $f(z')$ liefert, so müssen wir auf die Abbildung durch $f(z)$ eine Abbildung des Einheitskreises in sich folgen lassen, die $f(z')$ in den Nullpunkt hineinbringt, also nach (1) eine Abbildung $\zeta = e^{i\alpha} \frac{u - f(z')}{1 - \overline{f(z')} u}$. Die zusammengesetzte Abbildung lautet also

$$\zeta = e^{i\alpha} \frac{f(z) - f(z')}{1 - \overline{f(z')} f(z)},$$

und die Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ ist gegeben durch

$$G = \log \left| \frac{1 - \overline{f(z')} f(z)}{f(z) - f(z')} \right|. \tag{3}$$

Für die Greensche Funktion des Kreises $|z| \leqq R\,(R > 0)$ bekommt man so, da man $f(z) = \frac{z}{R}$ setzen kann,

$$(4') \qquad G = \log \left| \frac{R - \frac{\bar{z}' z}{R}}{z - z'} \right|$$

und für die Äußere des Kreises $|z| = R$ mit $f = \frac{R}{z}$

$$(4'') \qquad G = \log \left| \frac{R \frac{z'}{\bar{z}'} - \frac{z z'}{R}}{z - z'} \right|.$$

Setzt man (4') in die Formel (16) von § 2 ein, so erhält man, worauf bereits früher hingewiesen wurde und wie der Leser durch eine kleine Rechnung bestätigen wird, das Poissonsche Integral. Ebenso gibt (4'') als Poissonsches Integral für das Äußere des Kreises $|z| = R$

$$(5) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \left\{ \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \right\} u_\vartheta \, d\vartheta \; (z = x + i y, \;\; \zeta = R e^{i\vartheta})$$

oder nach Einführung von Polarkoordinaten $z = r e^{i\varphi}$

$$(5') \qquad u(r \cos\varphi, r \sin\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2 - 2 R r \cos(\varphi - \vartheta)} u_\vartheta \, d\vartheta.$$

Wir wollen jetzt die Greensche Funktion einer Halbebene, etwa der Halbebene rechts der imaginären Achse: $\Re z \geqq 0$, bestimmen. Soll die Funktion $f(z)$, die wir wieder versuchsweise als linear annehmen, die Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abbilden und den Punkt $z = z' \,(\Re z' > 0)$ in den Nullpunkt überführen, so muß dessen Spiegelpunkt an der imaginären Achse $-\bar{z}'$ in ∞ übergehen und die Funktion muß somit die Gestalt haben $\zeta = A \frac{z - z'}{z + \bar{z}'}$. Nun ist für Punkte z auf der imaginären Achse $z + \bar{z} = 0$, also

$$\overline{\frac{z - z'}{z + \bar{z}'}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}'}{\bar{z} + z'} = \frac{z + \bar{z}'}{z - z'}, \quad \text{also} \quad \left| \frac{z - z'}{z + \bar{z}'} \right| = 1.$$

Also liefert schon $\frac{z - z'}{z + \bar{z}'}$ eine Abbildung der verlangten Art, und es muß somit $|A| = 1$ sein. Die allgemeinste Abbildung der „rechten" Halbebene auf das Innere des Einheitskreises ist also durch

$$(6) \qquad \zeta = e^{i\alpha} \frac{z - z'}{z + \bar{z}'}$$

gegeben, und ihre Greensche Funktion lautet

$$G = \log \left| \frac{z + \overline{z'}}{z - z'} \right| . \tag{7}$$

Setzt man $z' = x' + i y'$, $z = x + i y$, so kann man (7) auch in der Form schreiben

$$G = \frac{1}{2} \log \frac{(x + x')^2 + (y - y')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} . \tag{7'}$$

2. Abbildungen eines Kreises auf polygonale Bereiche. Unter einem polygonalen Bereich wollen wir einen Bereich verstehen, der von endlich vielen Geradenstücken begrenzt ist, die auch Halbstrahlen oder sogar ganze Geraden sein dürfen. So sind eine Halbebene, ein

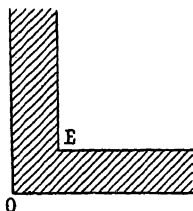



Fig. 68 Fig. 69 Fig. 70

Parallelstreifen, ein Winkelraum, der Querschnitt eines „Winkeleisens" (s. Fig. 68) und das Innere oder Äußere eines Quadrats sowie auch ein von einem Halbstrahl bzw. einer Strecke begrenzter Schlitzbereich (s. Fig. 69 und 70) polygonale Bereiche. H. A. Schwarz und Christoffel haben Formeln angegeben, die die allgemeinsten Abbildungen einer Halbebene oder eines Kreises auf einfach zusammenhängende polygonale Bereiche liefern.

Es sei t eine komplexe Variable, die in der oberen Halbebene, d. h. der Halbebene oberhalb der reellen Achse ($\mathfrak{J}(t) \geqq 0$) variiert, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ($t_1 < t_2 < \cdots < t_n$) ein System von n Punkten auf der reellen Achse selbst. Weiter sei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ein System von n reellen Zahlen, die zuerst keinerlei weiteren Bedingungen unterliegen sollen. Endlich sei t_0 ein willkürlicher Punkt oberhalb der reellen Achse. Es soll nun bewiesen werden, daß die Formel

$$z(t) = A \int_{t_0}^{t} (t - t_1)^{-\mu_1} (t - t_2)^{-\mu_2} \ldots (t - t_n)^{-\mu_n} dt + B \tag{8}$$

eine Abbildung der oberen Halbebene auf einen einfach zusammenhängenden polygonalen (Teile der Ebene eventuell mehrfach bedeckenden) Bereich der z-Ebene liefert, der $z = \infty$ nicht im Innern enthält. A und B sind willkürliche komplexe Konstanten, $A \neq 0$. Von

der Wahl dieser Konstanten hängt offenbar nur die Lage, nicht aber die Gestalt des Bildbereichs ab.

Zunächst eine Bemerkung über den Integranden von (8). Nach Definition einer Potenz ist $(t-t_\alpha)^{-\mu_\alpha} = e^{-\mu_\alpha \log(t-t_\alpha)}$ im allgemeinen unendlich vieldeutig, da $\mathfrak{I}\{\log(t-t_\alpha)\} = \varphi_\alpha$, der Arkus des von t_α nach t führenden Strahls, nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist. Wir treffen deshalb die Festsetzung, daß für Punkte $t \neq t_\alpha$ der oberen Halbebene $: 0 \leqq \varphi_\alpha \leqq \pi$ gesetzt werden soll, und erreichen damit, daß der Integrand in (8) eine für $\mathfrak{I}(t) > 0$ eindeutige analytische Funktion wird. Eine Änderung der Festsetzung würde nur auf den Arkus von A in (8) einen Einfluß haben.

Die Ausführung der Integration längs eines von t_0 ausgehenden ganz in der oberen Halbebene verlaufenden Weges führt nun zu einem nach dem Cauchyschen Fundamentalsatz nur vom Endpunkt abhängigen Wert $z(t)$, und die so entstehende analytische Funktion $z(t)$ gibt, wie jetzt gezeigt werden soll, tatsächlich eine Abbildung von den angegebenen Eigenschaften.

Die reelle t-Achse wird durch die Punkte t_α und $t = \infty$ in $n+1$ Stücke geteilt. Wir fassen eines davon, es heiße $\mathfrak{S}$, ins Auge. Die Endpunkte sollen nicht hinzugezählt werden. Da der Integrand von (8) über $\mathfrak{S}$ hinaus analytisch fortgesetzt werden kann und auch die Integrationswege über $\mathfrak{S}$ hinaus geführt werden können, so kann die Fortsetzbarkeit auch von $z(t)$ behauptet werden, und es ist auch auf $\mathfrak{S}$ selbst

$$(9) \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = A(t-t_1)^{-\mu_1}(t-t_2)^{-\mu_2}\dots(t-t_n)^{-\mu_n}.$$

Hier hat die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ eine unmittelbare geometrische Bedeutung, sie stellt, wie aus der ersten Gl. (9) hervorgeht, einen Tangentialvektor an das Bild von $\mathfrak{S}$ in der z-Ebene dar, und es wird bewiesen sein, daß das Bild der oberen Halbebene ein polygonaler Bereich ist, wenn gezeigt wird, daß

$$(9') \quad \operatorname{arc}\frac{dz}{dt} = \operatorname{arc} A - \mu_1 \operatorname{arc}(t-t_1) - \mu_2 \operatorname{arc}(t-t_2) - \cdots - \mu_n \operatorname{arc}(t-t_n)$$

auf $\mathfrak{S}$ konstant ist. Das ist aber tatsächlich der Fall, da hier $\operatorname{arc}(t-t_\alpha)$ konstant gleich 0 oder π ist, je nachdem t_α links oder rechts von $\mathfrak{S}$ liegt.

Wir wollen jetzt das Verhalten von $z(t)$ in den Punkten t_α selbst sowie für $t = \infty$ genauer untersuchen. In der Umgebung von $t = t_\alpha$ kann der Integrand in der Form geschrieben werden $(t-t_\alpha)^{-\mu_\alpha}\mathfrak{P}(t-t_\alpha)$, wo $\mathfrak{P}(t-t_\alpha)$ eine Potenzreihe in $t-t_\alpha$ mit einem von 0 verschiedenen

Anfangsglied bedeutet, und die gliedweise Integration liefert, falls μ_α keine positive ganze Zahl ist, $z(t)$ in der Form

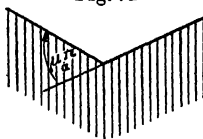
$$(8') \qquad z(t) = (t - t_\alpha)^{-\mu_\alpha + 1}\,\mathfrak{Q}(t - t_\alpha) + z_\alpha$$

mit einer Potenzreihe $\mathfrak{Q}$, deren Anfangsglied wieder von 0 verschieden ist. Hat μ_α einen positiven ganzzahligen Wert, so ergibt die $(\mu_\alpha - 1)$-te Potenz von $t - t_\alpha$ in $\mathfrak{P}(t - t_\alpha)$, falls ihr Koeffizient nicht Null ist, ein logarithmisches Glied; diese formale Abweichung spielt jedoch im folgenden keine Rolle. Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden:

I. $\mu_\alpha < 1$.

In diesem Falle ist, wie (8') lehrt, die Abbildung auch noch für $t = t_\alpha$ stetig, und die Umgebung von t_α, soweit sie in die obere Halbebene fällt, wird durch sie in ein Stück eines Winkelraums von

Fig. 71

Fig. 72

der Öffnung $(1 - \mu_\alpha)\pi$ übergeführt. Aus $t = t_\alpha$ entsteht die Ecke z_α des Winkelraums. Das alles folgt daraus, daß die Abbildungsfunktion sich in der Umgebung von $t = t_\alpha$ wie $(t - t_\alpha)^{-\mu_\alpha + 1}\,\mathfrak{Q}(0) + z_\alpha$ verhält (vgl. III, § 2, 3). Ist $\mu_\alpha > 0$, so erhält man eine konvexe (ausspringende) Ecke mit dem Außenwinkel $\mu_\alpha \pi$, ist $-1 < \mu_\alpha < 0$, eine konkave (einspringende) Ecke (s. Fig. 71 und 72). Ist $\mu_\alpha = -1$, so fallen die beiden Begrenzungsstücke der Ecke mit den beiden Seiten eines und desselben Geradenstücks zusammen (Fig. 69 und 70). Ist endlich $\mu_\alpha < -1$, so entstehen mehrfache Überdeckungen der z-Ebene. Wir wollen auch in den drei letzten Fällen von einer Ecke mit dem Außenwinkel $\mu_\alpha \pi$ reden.

II. $\mu_\alpha \geqq 1$.

In diesem Falle wird $z(t)$ für $t = t_\alpha$ unendlich, es entsteht, wie wir sagen wollen, eine Ecke im Unendlichen. Ist z. B. $\mu_\alpha = 1$, so verhält sich die Abbildungsfunktion an der betrachteten Stelle wie $C_1 \log(t - t_\alpha) + C_2$ mit Konstanten C_1, C_2 $(C_1 \neq 0)$, also wie eine Abbildungsfunktion der oberen Halbebene auf einen Parallelstreifen in der Umgebung eines der zwei Punkte der reellen Achse, die in die beiden unendlich fernen Randpunkte des Streifens transformiert werden. Ist $\mu_\alpha = 2$, so verhält sich $z(t)$ wie $\dfrac{C_1}{t - t_\alpha} + C_2$, also wie eine Abbildung

auf eine neue Halbebene in der Umgebung der Stelle, die ins Unendliche transformiert wird.

Auch im Falle II spricht man zweckmäßigerweise von einer Ecke mit dem Außenwinkel $\mu_\alpha \pi$. Z. B. hat ein Parallelstreifen zwei Ecken im Unendlichen mit dem Außenwinkel π, und in der Tat kann man sich eine solche Ecke aus einer im Endlichen gelegenen durch Grenzübergang entstanden denken, indem man den Eckpunkt in passender Weise ins Unendliche rücken und den Außenwinkel gegen π konvergieren läßt.

Um das Verhalten von $z(t)$ für $t = \infty$ kennenzulernen, machen wir in (8) die Substitution $t = -\frac{1}{t^*}$, durch die die obere Halbebene in sich transformiert wird, $t = \infty$ in $t^* = 0$. Wie eine kleine Rechnung lehrt, behält (8) seine Gestalt bei, an die Stelle der Linearfaktoren $t - t_\alpha$ treten die Linearfaktoren $t^* - t^*_\alpha \left(t_\alpha = -\frac{1}{t^*_\alpha}\right)$ und außerdem der Linearfaktor t^*, der letztere in der $\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha - 2\right)$-ten Potenz. Hieraus ersehen wir, daß bei der Abbildung $z = z(t)$, falls $\Sigma \mu_\alpha$ von 2 verschieden ist, aus $t = \infty$ ebenfalls eine Ecke hervorgeht, und zwar mit dem Außenwinkel $(2 - \Sigma \mu_\alpha)\pi$.

Wir fassen die bisherigen Resultate zusammen: Durch die „Schwarz-Christoffel"sche Formel (8) wird die obere Halbebene $\mathfrak{I}(t) \geqq 0$ auf einen einfach zusammenhängenden polygonalen Bereich abgebildet, der den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält. Aus den Punkten t_α sowie $t = \infty$ entstehen die Ecken desselben, $\mu_\alpha \pi$ und $(2 - \Sigma \mu_\alpha)\pi$ sind die zugehörigen Außenwinkel[1]). Eine weitergehende Analyse, auf die hier jedoch nicht eingegangen werden kann, zeigt, daß auch die Umkehrung gilt: Jede Funktion $z(t)$, die eine Abbildung der betrachteten Art vermittelt, wird erhalten, indem man in der Schwarz-Christoffelschen Formel die Konstanten passend wählt[2]).

Verbindet man dieses Resultat mit dem allgemeinen Abbildungssatz (s. § 2, **6**), so erkennt man, daß die Schwarz-Christoffelsche Formel überhaupt alle polygonalen Bereiche der betrachteten Art liefert[3]). Dies wird übrigens schon durch eine Abzählung der in der

---

[1]) Sobald eine dieser Größen Null wird, verschwindet natürlich die Ecke.

[2]) Vgl. E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 2. Heft. Teubner, 1913.

[3]) Eine elementare und einfache Behandlung des Abbildungssatzes für Polygone ohne Benutzung des Fundamentalsatzes gibt A. Weinstein, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 72—84.

Formel auftretenden Konstanten nahegelegt. Beseitigen wir der Einfachheit halber die Sonderstellung des unendlich fernen Punktes, indem wir $\sum \mu_\alpha = 2$ annehmen, betrachten wir also Abbildungen auf n-Ecke, bei denen nicht gerade dem unendlich fernen Punkt eine Ecke entspricht, so treten in der Formel im ganzen $2n + 3$ reelle Konstanten auf (n Werte t_α, $n - 1$ willkürliche μ_α, und außerdem liefern die komplexen Konstanten A und B vier willkürliche reelle Konstanten). Andererseits ist ein n-Eck durch die $2n$-Koordinaten der Eckpunkte bestimmt, und jedes dieser n-Ecke kann noch auf ∞^3 verschiedene Arten auf die Halbebene abgebildet werden, da man einem vorgegebenen Linienelement ein willkürliches Linienelement der Halbebene zuordnen kann und ein Linienelement durch drei reelle Größen bestimmt ist. Die Gesamtheit der Polygonalabbildungen hängt also von ebensoviel Konstanten ab, wie in der Schwarz-Christoffelschen Formel auftreten.

3. Sonderfälle polygonaler Bereiche. Als wichtige Spezialfälle unserer Formel erwähnen wir die folgenden:

1. Das elliptische Integral erster Gattung $\int \frac{dt}{\sqrt{F(t)}}$, wo $F(t)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades mit lauter reellen voneinander verschiedenen Wurzeln ist, bildet die obere Halbebene auf ein Rechteck ab.

2. Das „Euler"sche Integral erster Gattung $\int t^{-\mu_1}(1-t)^{-\mu_2}\,dt$ $(0 < \mu_1, \mu_2 < 1)$ bildet die obere Halbebene auf ein Dreieck mit den Außenwinkeln $\mu_1\pi$, $\mu_2\pi$, $(2 - \mu_1 - \mu_2)\,\pi$ ab.

Als Beispiel der Bestimmung der in der Formel auftretenden Konstanten möge folgende Aufgabe behandelt werden: Es soll der in Fig. 68 gezeichnete Bereich, der die Form eines beiderseits unendlich ausgedehnten rechteckigen „Winkeleisens" besitzt und als ein Viereck mit zwei unendlich fernen Ecken anzusehen ist, derart auf die obere Halbebene abgebildet werden, daß der Ecke 0 der Wert $t = 0$, der unendlich fernen Ecke in der Richtung der reellen Achse $t = 1$ und schließlich der mit E bezeichneten Ecke $t = \infty$ entspricht. Durch diese drei Bedingungen ist die Abbildungsfunktion eindeutig bestimmt, insbesondere auch der Wert $t = -a$, aus dem die unendlich ferne Ecke in der Richtung der imaginären Achse entspringt. Offenbar muß a positiv sein, da die Bildpunkte der Ecken auf der als im Unendlichen geschlossen gedachten reellen Achse der t-Ebene ebenso aufeinanderfolgen müssen wie die Ecken auf der Polygonperipherie. Da die Ecken 0 und E die Außenwinkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2}$ besitzen und die

unendlich fernen Ecken den Außenwinkel π, so hat die Abbildungsfunktion, wenn $t_0 = 0$ genommen wird, die Gestalt

$$(10) \qquad z(t) = A\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)(t+a)} + B.$$

Die erste Zuordnung ergibt sofort $B = 0$. Da weiter für $0 < t < 1$ $z(t)$ reell und positiv ausfallen muß und der Integrand in (10) ebenfalls diese Eigenschaft hat, so muß auch A reell und positiv sein. Die noch übrigbleibenden Konstanten A, a müssen sich aus den Breiten d_1, d_2 des rechten bzw. oberen Streifens bestimmen lassen. Das geschieht etwa in folgender Weise: Der Zuwachs, den $z(t)$ auf dem kleinen Halbkreis $t = 1 + \varrho e^{i\vartheta}$ um $t = 1$ ($\varrho > 0$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$) erfährt, ist gegeben durch das Integral über den Halbkreis

$$A\int \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)(t+a)} = -Ai\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+\varrho e^{i\vartheta}}(1+a+\varrho e^{i\vartheta})}$$

und liefert in der Grenze $\varrho \to 0$ den Wert $-\frac{Ai}{1+a}\pi$. Da aber beim Durchlaufen des Halbkreises im positiven Sinne z von der oberen zur unteren Begrenzung des rechten Halbstreifens gelangt, so ist $\frac{A\pi}{1+a} = d_1$.

In analoger Weise erhält man $\frac{A\pi}{\sqrt{a}(1+a)} = d_2$. Die Auflösung der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$(11) \qquad a = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2, \quad A = \left[1 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]\frac{d_1}{\pi}.$$

Die Ausrechnung des Integrals (9), das durch die Substitution $t = u^2$ in ein rationales Integral verwandelt wird, ergibt, wie der Leser bestätigen möge, das folgende Endresultat:

$$(10') \qquad z(t) = \frac{d_1}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} + \frac{2d_2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{d_2}{d_1}\sqrt{t}\right)$$

Unter den in (10') auftretenden transzendenten Funktionen sind die im 0-Punkt verschwindenden Zweige zu verstehen.

Die Bestimmung der Konstanten in (8), die hier in so einfacher Weise gelungen ist, ist im allgemeinen ein schwieriges Problem [1]).

[1]) Eine Methode zur Bestimmung dieser Konstanten aus den Abmessungen des Polygonalbereiches im allgemeinen Falle findet sich bei Stefan Bergmann: Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus

4. Umformung der Schwarz-Christoffelschen Formel. Unendliche Bereiche. Wir kehren zur allgemeinen Schwarz-Christoffelschen Formel zurück. Es ist oft zweckmäßig, an Stelle der oberen Halbebene den Einheitskreis $|\zeta| \leqq 1$ treten zu lassen. Dies geschieht etwa durch die Substitution $\zeta = \frac{t-i}{t+i}$, die eine Abbildung der oberen Halbebene auf den Einheitskreis gibt. Setzt man $\zeta_\alpha = \frac{t_\alpha - i}{t_\alpha + i}$ und nimmt wieder der Einfachheit halber $t = \infty$ als einen regulären Punkt, dem nicht gerade eine Ecke entspricht, an, also $\Sigma \mu_\alpha = 2$, so ergibt die Einführung von ζ in (8) nach kurzer Rechnung

$$(8^*) \qquad z = C \int\limits_0^\zeta \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\mu_1} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\mu_2} \cdots \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right)^{-\mu_n} d\zeta + D$$

$$[|\zeta_\alpha| = 1, \quad \Sigma \mu_\alpha = 2, \quad C \neq 0]^{1)}$$

mit gewissen neuen Konstanten C, D. Die Werte der Potenzen unter dem Integralzeichen seien etwa so gewählt, daß für $|\zeta| < 1$ der Arkus von $\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_\alpha}\right)^{-\mu_\alpha}$ zwischen $-\mu_\alpha \frac{\pi}{2}$ und $+\mu_\alpha \frac{\pi}{2}$ liegt.

Formel (8*) stellt die allgemeinste Abbildung des Einheitskreises auf einen einfach zusammenhängenden polygonalen Bereich dar, der $z = \infty$ nicht im Innern enthält und dessen Rand aus höchstens n Geradenstücken besteht. Den Punkten ζ_α am Einheitskreis entsprechen die Ecken, $\mu_\alpha \pi$ sind die zugehörigen Außenwinkel.

Wir haben jetzt nur Bereiche in Betracht gezogen, die den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthalten. In den Anwendungen spielen eine besondere Rolle Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises ($|\zeta| \geqq 1$) auf Bereiche, die $z = \infty$ im Innern enthalten, und zwar Abbildungen von solcher Beschaffenheit, daß aus $\zeta = \infty$ gerade $z = \infty$ entspringt, und es ist nützlich zu wissen, daß

---

seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators, Math. Zeitschr. **19** (1923), S. 8—25, ferner: Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. **5** (1925), S. 319—331.

1) Liefert $t = \infty$ eine Ecke, so ist in (8*) noch ein $\zeta_{n+1} = 1$ mit $\mu_{n+1} = 2 - \sum\limits_{\varrho=1}^{n} \mu_\varrho$ aufzunehmen.

speziell für polygonale Bereiche wieder eine explizite Formel angegeben werden kann:

$$(8^{**}) \qquad z = C\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\left(1-\frac{\zeta_1}{\zeta}\right)^{\mu_1}\left(1-\frac{\zeta_2}{\zeta}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1-\frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{\mu_n} d\zeta + D$$

$$(|\zeta_\alpha| = 1, \quad \Sigma\mu_\alpha = 2, \quad \Sigma\mu_\alpha\zeta_\alpha = 0, \quad C \neq 0).$$

Daß (8**) Abbildungen der verlangten Art leistet, beweist man wie oben. Die Bedingung $\Sigma\mu_\alpha\zeta_\alpha = 0$ ist notwendig, damit in der Reihenentwicklung von $z = z(\zeta)$ kein logarithmisches Glied auftritt. Daß (8**) die allgemeinste Abbildung der gewünschten Art liefert, kann man sich wieder durch Konstantenabzählung plausibel machen.

Die Bedeutung der Konstanten ζ_α, μ_α ist dieselbe wie in (8*).

§ 4. Fundamentalsatz der konformen Abbildung

Der zuerst von Riemann ausgesprochene Fundamentalsatz der konformen Abbildung besagt, daß man jeden von einer einfach geschlossenen Kurve begrenzten Bereich[1]) der Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises abbilden kann. In § 2 wurde gezeigt, daß die Auffindung einer solchen Abbildung und die Konstruktion der Greenschen Funktion des Bereichs völlig äquivalente Probleme sind. Durch den im folgenden gegebenen, von Koebe und Carathéodory herrührenden rein funktionentheoretischen Beweis des Fundamentalsatzes wird also gleichzeitig ein Existenzbeweis der Greenschen Funktion für einfach zusammenhängende Bereiche geliefert. Auf potentialtheoretischen Prinzipien aufgebaute und deshalb sowohl in der Ebene wie im Raume durchführbare Verfahren zur Herstellung der Greenschen Funktion findet der Leser in Kap. XVII.

Um mit Hilfe der Greenschen Funktion die Randwertprobleme der Potentialtheorie lösen zu können, mußte in § 2 vorausgesetzt werden, daß die Konjugierte der Greenschen Funktion, die zuerst nur im Innern des Bereichs erklärt ist, stetige Randwerte besitzt, die beim positiven Umlauf der Randlinie monoton abnehmen. Wie Formel [§ 2, (21')], die den Zusammenhang zwischen konformer Abbildung und der Greenschen Funktion gibt, lehrt, bedeutet dies, daß die Abbildung durch passende Ränderzuordnung zu einer auch noch am Rande stetigen und umkehrbar eindeutigen Abbildung des durch Hinzunahme der Randlinie abgeschlossenen Bereichs auf eine abgeschlossene Kreisscheibe ergänzt werden kann. Erst in neuerer

---

[1]) Die Randlinie wird hier nicht zum Bereich gerechnet.

Zeit ist bewiesen worden, daß dies bei beliebiger Randkurve tatsächlich stets möglich ist[1]).

Zum Beweis des Fundamentalsatzes benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen über analytische Funktionen mit beschränktem absoluten Betrage, die der Einfachheit halber vorangestellt werden sollen.

1. Einige Hilfssätze. Die Hilfssätze, die wir benötigen, fließen alle aus einem wichtigen, von H. A. Schwarz herrührenden Satz, der als Lemma von Schwarz bezeichnet zu werden pflegt: Es sei $f(z)$ eine im Kreise $|z| < R$ reguläre analytische Funktion von z, es sei daselbst

$$|f(z)| < 1, \tag{1}$$

und es sei außerdem

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Die Zusatzbedingung (2) hat zur Folge, daß mit $f(z)$ auch $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ eine im Kreise $|z| < R$ reguläre Funktion darstellt, falls $\varphi(0) = f'(0)$ gesetzt wird. Das Lemma von Schwarz behauptet nun, daß

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{R} \tag{3}$$

ist, und daß das Gleichheitszeichen nur eintreten kann, wenn $\frac{f(z)}{z}$ eine Konstante vom Betrage $\frac{1}{R}$ ist.

Beweis: Auf dem Kreise $|z| = R' < R$ ist

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{R'}. \tag{3'}$$

Da aber eine analytische Funktion ihren Größtbetrag am Rande annimmt, so gilt (3′) auch für $|z| < R'$. Der Grenzübergang $R' \to R$ in (3′) liefert die Formel (3) und damit den ersten Teil der Aussage des Schwarzschen Lemmas. Um den Zusatz zu erhalten, braucht man sich nur daran zu erinnern, daß eine analytische Funktion, die an einer inneren Bereichstelle ein Maximum ihres absoluten Betrages besitzt, sich notwendig auf eine Konstante reduzieren muß. (Vgl. III, § 3, **6.**)

---

[1]) Einfache Beweise finden sich bei P. Koebe, Journ. f. Math. **145** (1914) und E. Lindelöf, Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 46, Nr. 4 (1915).

Als wichtige Folgerung des Schwarzschen Lemmas heben wir hervor: Genügt $f(z)$ den Voraussetzungen des Lemmas von Schwarz, so ist

(4) $$|\varphi(0)| = |f'(0)| \leqq \frac{1}{R},$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur bei den Funktionen $f(z) = \frac{e^{i\vartheta}}{R} z$ (ϑ reell) ein.

Mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas läßt sich die bereits früher (s. § 2, 6) behandelte Frage nach der allgemeinsten konformen Abbildung des Kreises $|z| < R$ in sich ohne Benutzung der Greenschen Funktion in einfachster Weise beantworten. Jedenfalls gehören die linearen Abbildungen

(5) $$\zeta = e^{i\vartheta} \frac{z - a}{1 - \frac{\bar{a} z}{R^2}} \quad (|a| < R)$$

hierzu. Um zu zeigen, daß damit bereits alle gewonnen sind, kann man folgendermaßen verfahren: Bei den durch (5) gegebenen Abbildungen geht der Kreismittelpunkt $\zeta = 0$ aus dem (im Kreise willkürlich wählbaren) Punkt a hervor. Um also die allgemeinste Abbildung zu erhalten, die diese Zuordnung leistet, braucht man nur diejenigen Kreisabbildungen zu ermitteln, die den Nullpunkt fest lassen. Es sei $\zeta = \psi(z)$ eine Abbildung dieser Art. Dann genügt $f(z) = \frac{\psi(z)}{R}$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und es ist somit

(6′) $$\left|\frac{\zeta}{z}\right| \leqq 1.$$

Da aber auch die inverse Abbildung von derselben Natur ist, so schließt man ebenso

(6″) $$\left|\frac{z}{\zeta}\right| \leqq 1.$$

Es ist somit $\left|\frac{\zeta}{z}\right| = 1$ und $\frac{\zeta}{z}$ eine Konstante vom Betrage 1. Die Abbildung ist also eine Drehung um den Nullpunkt und unsere Behauptung ist erwiesen.

Wir lassen nun von den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas die Forderung (2) fallen. Um Aussagen über den Werteverlauf von $f(z)$ zu erhalten, bilden wir die Funktion

(7) $$f_1(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f}(0) f(z)}.$$

Sie entsteht aus $f(z)$ durch Zusammensetzung mit der Funktion $\frac{u - f(0)}{1 - \overline{f}(0)u}$, die das Innere des Einheitskreises derart in sich abbildet, daß $f(0)$ in den Nullpunkt transformiert wird, und genügt also allen Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas. Demnach ist bei der Voraussetzung (1) allein

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f}(0) f(z)}\right| \leqq \frac{|z|}{R}. \tag{8}$$

Aus (8) wollen wir weitere wichtige Folgerungen ziehen. Die erste gibt eine Abschätzung der Abweichung von $f(z)$ vom Werte der Funktion im Mittelpunkt, also eine Abschätzung von $|f(z) - f(0)|$. Um sie zu erhalten, multiplizieren wir (8) mit dem Nenner der linken Seite und erhalten so

$$|f(z) - f(0)| \leqq \frac{|z|}{R}\, |1 - \overline{f}(0) f(z)|. \tag{9}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |1 - \overline{f}(0) f(z)| &= |1 - f(0)\overline{f}(0) - \overline{f}(0)[f(z) - f(0)]| \\ &\leqq |1 - f(0)\overline{f}(0)| + |f(0)|\, |f(z) - f(0)|. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (9) ein, so erhält man nach einer einfachen Umformung

$$|f(z) - f(0)| \leqq \frac{\frac{|z|}{R}}{1 - |f(0)|\frac{|z|}{R}}\,[1 - |f(0)|^2] \tag{10'}$$

und wegen $|f(0)| < 1$

$$|f(z) - f(0)| \leqq \frac{\frac{|z|}{R}}{1 - \frac{|z|}{R}}\,[1 - |f(0)|^2]. \tag{10''}$$

Formel (10′) bzw. (10″) gibt eine Schranke für die Abweichung $|f(z) - f(0)|$, die nur von $|z|$ und dem Betrage des Funktionswertes im Nullpunkt abhängt. Man beachte, daß diese Schranke bei Beschränkung von z auf einen Teilkreis $|z| \leqq R' < R$ gleichmäßig gegen Null geht, wenn man $|f(0)|$ gegen 1 rücken läßt.

Wir wollen nun von den Formeln (10) eine wichtige Anwendung machen. Die Funktion $f(z)$ genüge wieder den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas (1) und (2). Setzt man dann $\varphi(z) = \frac{R f(z)}{z}$, so ist $|\varphi(z)| < 1$ für $|z| < R$, abgesehen von dem Grenzfall, wo

$\varphi(z)$ eine Konstante vom Betrag 1 ist, der ausgeschlossen bleiben soll. Insbesondere ist also $|\varphi(0)| = R|f'(0)| < 1$.

Wendet man nun die Ungleichung (10″) auf φ an, so erhält man

$$\left|\frac{R}{z} f(z) - R f'(0)\right| \leqq \frac{\frac{|z|}{R}}{1 - \frac{|z|}{R}} \{1 - [R|f'(0)|]^2\}$$

oder

$$|f(z) - f'(0) z| \leqq \frac{\left(\frac{|z|}{R}\right)^2}{1 - \frac{|z|}{R}} \{1 - [R|f'(0)|]^2\}. \tag{11}$$

Formel (11) gibt eine Schranke für die Abweichung der den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügenden Funktion $f(z)$ von ihrer linearen Approximation im Nullpunkt, eine Schranke, die, abgesehen von $|z|$, nur noch den Betrag der Ableitung der Funktion im Nullpunkt enthält. Man beachte, daß bei Beschränkung von z auf einen Teilkreis $|z| \leqq R' < R$ beim Grenzübergang $R|f'(0)| \to 1$ die Schranke gleichmäßig gegen 0 geht.

Wir kehren wieder zur Formel (8) zurück und wollen aus ihr eine weitere wichtige Abschätzung herleiten, die sich auf den Absolutbetrag von $f(z)$ selbst bezieht. Die Ungleichung (8) bedeutet geometrisch, daß die bei gegebenem $|z|$ möglichen Werte von $f(z)$ in einer Kreisscheibe liegen müssen, und zwar derjenigen, die bei der durch die Funktion $\dfrac{u - f(0)}{1 - \bar{f}(0) u}$ vermittelten Abbildung in den Kreis mit dem Radius $\dfrac{|z|}{R}$ um den Nullpunkt übergeht. Man erhält also eine obere Schranke für $|f(z)|$, indem man den am weitesten vom Nullpunkt entfernten Punkt dieser Kreisscheibe aufsucht.

Es ergibt sich so, wie der Leser bestätigen möge,

$$|f(z)| \leqq \frac{\frac{|z|}{R} + |f(0)|}{1 + |f(0)| \frac{|z|}{R}}. \tag{12}$$

Formel (12) lehrt, und das ist für uns das Wesentliche, daß bei Beschränkung von z auf einen Teilkreis $|z| \leqq R' < R$ der absolute Betrag von $f(z)$ unter einer nur von R' und $|f(0)|$ abhängigen Schranke bleiben muß, die kleiner ist als 1.

Im folgenden brauchen wir eine Verallgemeinerung dieser Tatsache, in der an Stelle des Kreises $|z| < R$ ein beliebig gestalteter Bereich tritt. Sie lautet: Im Bereich $\mathfrak{B}$ der z-Ebene, der den Nullpunkt enthalten möge, sei eine reguläre analytische Funktion $f(z)$ definiert, und es sei durchweg $|f(z)| < 1$. Dann gibt es zu jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich $\mathfrak{B}'$ des Innern von $\mathfrak{B}$ eine nur von $\mathfrak{B}'$ und dem Betrage von $f(0)$ abhängige Schranke

$$P[\mathfrak{B}', |f(0)|] < 1, \tag{13}$$

so daß in ganz $\mathfrak{B}'$

$$|f(z)| < P \tag{14}$$

ist.

Beweis: Der Satz gilt jedenfalls, wenn $\mathfrak{B}'$ eine Kreisscheibe $\mathfrak{K}'$ mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt darstellt; denn man kann auf $\mathfrak{K}'$ und eine etwas größere noch in $\mathfrak{B}$ hineinfallende zu $\mathfrak{K}'$ konzentrische Kreisscheibe den Satz in der speziellen Form anwenden. Adjungiert man nun zu $\mathfrak{K}'$ eine weitere in $\mathfrak{B}$ hineinfallende Kreisscheibe, deren Mittelpunkt in $\mathfrak{K}'$ hineinfällt, so gilt der Satz offenbar auch noch für den durch Vereinigung der beiden Kreisscheiben erhaltenen Bereich, und man kann den Prozeß der Adjunktion einer Kreisscheibe weiter fortsetzen. Da man aber auf diese Weise jeden Bereich $\mathfrak{B}'$ schließlich überdecken kann, so gilt der Satz allgemein.

2. Das Schmiegungsverfahren. Es sei $\mathfrak{B}$ ein von einer einzigen Kurve begrenzter Bereich der z-Ebene und in ihm sei ein Richtungselement (Punkt und Richtung in vereinigter Lage) markiert. Wir stellen uns die Aufgabe, den Bereich derart umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ abzubilden, daß hierbei das vorgegebene Richtungselement in das durch den Nullpunkt und die Richtung der positiven reellen Achse bestimmte transformiert wird. Wir wollen das letztere im folgenden kurz als das positive Richtungselement bezeichnen. Es ist von vornherein zu sehen, daß die Aufgabe nicht mehr als eine Lösung haben kann; denn eine Abbildung des Einheitskreises in sich, die das positive Richtungselement festhält, ist nach (5) notwendig die Identität.

Das hier durchgeführte Verfahren zur Herstellung der Abbildung, von Koebe treffend als Schmiegungsverfahren bezeichnet, beruht auf folgendem Grundgedanken: Zunächst ist zu bemerken, daß man ruhig annehmen kann, daß der Bereich in das Innere des Einheitskreises hineinfällt, und daß das ausgezeichnete Richtungselement mit dem positiven Richtungselement zusammenfällt; denn schon durch eine Ähnlichkeitstransformation läßt sich unser Bereich, den wir ja als beschränkt voraussetzen, in das Innere des Einheitskreises hinein-

bringen, und man kann die Abbildung außerdem so einrichten, daß ein beliebiges Richtungselement des Bereichs in das positive Richtungselement übergeht.

Das Schmiegungsverfahren besteht nun in der Ausführung gewisser elementarer Abbildungen, die alle das positive Richtungselement festhalten und aus $\mathfrak{B}$ der Reihe nach eine Folge von im Innern des Einheitskreises gelegenen Bereichen

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots \tag{15}$$

erzeugen, die sich mit ihrer Berandung immer mehr der Kreisperipherie anschmiegen und in der Grenze den vollen Kreis erfüllen. Die Möglichkeit der Konstruktion solcher Abbildungen wird durch das Schwarzsche Lemma nahegelegt. Ist nämlich $f(z)$ eine im Einheitskreis reguläre Funktion und $|f(z)| < 1$ und außerdem $f(0) = 0$, so ist, wenn man von den Funktionen $e^{i\vartheta} z$ absieht,

$$|f(z)| < |z| \quad (z \neq 0). \tag{16}$$

Bei der Abbildung $w = f(z)$ wird also jeder Punkt in eine größere Nähe des Nullpunkts gerückt und umgekehrt vergrößert sich bei der inversen Abbildung die Distanz vom Nullpunkt. Die Umkehrung von Funktionen, die im Einheitskreis den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügen, liefert uns also Abbildungen, wie wir sie zur Durchführung des Schmiegungsverfahrens wünschen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß die Umkehrfunktionen im allgemeinen mehrdeutig sein werden, und man muß die Funktion jedesmal so zu wählen versuchen, daß derjenige Zweig der Umkehrung, der im Nullpunkt verschwindet, eine in dem gerade betrachteten Bereich eindeutige reguläre Funktion liefert. Wir werden etwas später zeigen, daß man tatsächlich eine Folge derartiger Umkehrfunktionen

$$z_1 = \varphi_1(z), \quad z_2 = \varphi_2(z_1), \quad z_3 = \varphi_3(z_2), \ldots \tag{17}$$

wählen kann, die alle das positive Richtungselement festhalten, für die also

$$\varphi_\nu(0) = 0, \quad \varphi_\nu'(0) > 0, \tag{18}$$

und die so beschaffen sind, daß die Minimaldistanzen der Ränder der sukzessive gewonnenen Bereiche $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ vom Nullpunkt, die offenbar eine monotone Folge

$$R < R_1 < R_2 < \ldots \tag{19}$$

bilden, gegen 1 konvergieren:

$$\lim_{\nu \to \infty} R_\nu = 1. \tag{20}$$

Es wird sich zeigen, daß hieraus schon die Konvergenz des Verfahrens folgt und daß die Grenzabbildung die von uns gesuchte Fundamentalabbildung ist.

3. Konvergenzbeweis. Wir nehmen an, daß es uns gelungen wäre, die $\varphi_n(z)$ den Bedingungen in 2 gemäß zu wählen. Es handelt sich zunächst darum, festzustellen, daß die Approximationsfunktionen

$$(21) \qquad z_n = f_n(z) = \varphi_n\{\varphi_{n-1}[\dots\varphi_1(z)]\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergieren; zu dem Zwecke führen wir neben (17) noch die Funktionen

$$(22) \qquad z_{n+m} = \varphi_{n,m}(z_n) = \varphi_{n+m}\{\varphi_{n+m-1}[\dots\varphi_{n+1}(z_n)]\}$$

ein. φ_{n+m} bildet den durch die n-te Approximationsfunktion aus $\mathfrak{B}$ hervorgegangenen Bereich $\mathfrak{B}_n$ unter Festhaltung des positiven Richtungselements auf $\mathfrak{B}_{n+m}$ ab. Sie genügt also für $|z_n| < R_n$ den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und den aus ihm in 1 abgeleiteten Ungleichungen. So ergibt sich auf Grund von (11) die Abschätzung

$$(23) \quad |z_{n+m} - \varphi'_{n,m}(0)z_n| \leqq \frac{\left(\frac{|z_n|}{R_n}\right)^2}{1 - \frac{|z_n|}{R_n}}\{1 - [R_n\varphi'_{n,m}(0)]^2\} \quad (|z_n| < R_n).$$

Um zu einer Abschätzung von $|z_{n+m} - z_n|$ zu gelangen, müssen wir uns noch über die Größe von $\varphi'_{n,m}(0)$ orientieren. Da die Umkehrungsfunktionen der φ_n im ganzen Einheitskreis regulär sind und den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen, so ist allgemein $\varphi'_k(0) > 1$ und deshalb auch $\varphi'_{n,m}(0) > 1$. Andererseits gibt die Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf $\varphi_{n,m}(z_n)$ im Kreise $|z_n| < R_n$ die Ungleichung $\varphi'_{n,m}(0) \leqq \frac{1}{R_n}$. Es ist also

$$(24) \qquad 1 < \varphi'_{n,m}(0) \leqq \frac{1}{R_n}.$$

Nun ist

$$z_{n+m} - z_n = [z_{n+m} - \varphi'_{n,m}(0)z_n] + [\varphi'_{n,m}(0) - 1]z_n$$

und wegen $|z_n| < 1$

$$|z_{n+m} - z_n| \leqq |z_{n+m} - \varphi'_{n,m}(0)z_n| + |\varphi'_{n,m}(0) - 1|.$$

Gleichzeitige Anwendung von (23) und (24) ergibt somit

$$(25) \quad |z_{n+m} - z_n| \leqq \frac{\left(\frac{|z_n|}{R_n}\right)^2}{1 - \frac{|z_n|}{R_n}}(1 - R_n^2) + \left(\frac{1}{R_n} - 1\right) \quad (|z_n| < R_n).$$

Mit Hilfe von (25) ist es nun ein leichtes, die Konvergenz der $f_n(z)$ in $\mathfrak{B}$ festzustellen, wenn man noch den am Schluß von 1 be-

wiesenen Satz hinzufügt, der uns zeigt, daß die Bilder $\mathfrak{B}'_n$ eines festen abgeschlossenen Teilbereichs $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ alle einem von n unabhängigen Kreis

$$|z| < P < 1$$

angehören müssen. Da wegen der Voraussetzung $\lim_{n \to \infty} R_n = 1$ für genügend hohes n, etwa für $n > k$,

$$R_n > P \tag{26}$$

ist, so liefert (25), dessen rechte Seite bei festem R_n für $|z_n| < R_n$ mit $|z_n|$ monoton wächst, die Abschätzung

$$|f_{n+m}(z) - f_n(z)| \leq \frac{\left(\frac{P}{R_n}\right)^2}{1 - \frac{P}{R_n}} (1 - R_n^2) + \left(\frac{1}{R_n} - 1\right), \tag{27}$$

gültig in $\mathfrak{B}'$ und $n > k$ und beliebiges m.

Die Schranke in (27) konvergiert aber mit wachsendem n gegen 0 da R_n gegen 1 geht, und damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z)$ in $\mathfrak{B}'$ bewiesen. Nach einem fundamentalen Satze der Theorie der analytischen Funktionen[1]) ist die Grenzfunktion

$$\zeta = f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) \tag{28}$$

selbst eine analytische Funktion, und wir wollen nun zeigen, daß sie die gesuchte Fundamentalabbildung gibt. Wir müssen zeigen, daß sie jeden Wert aus dem Kreise $|\zeta| < 1$ einmal, aber auch nur einmal annimmt. Zunächst ist sofort zu sehen, daß der Wert $\zeta = 0$ genau einmal angenommen wird; denn es ist

$$f_n(0) = 0 \tag{29}$$

und, wie die Entstehungsgeschichte der $f_n(z)$ lehrt,

$$|f_{n+1}(z)| > |f_n(z)| \quad (z \neq 0). \tag{30}$$

(29) und (30) zusammen lehren, daß der Wert $\zeta = 0$ nur für $z = 0$ angenommen wird.

Nun ziehen wir einen an einer früheren Stelle[2]) bewiesenen Hilfssatz heran: Eine Funktion $f(z)$, die in $\mathfrak{B}$ dem Betrage nach kleiner ist als 1, deren Betrag aber bei Annäherung an den Bereichrand gegen 1 geht, nimmt jeden Wert aus dem Innern des Einheitskreises gleich oft an.

---

[1]) Vgl. III, § 3, **3**.

[2]) Siehe § 2, **6**.

Daß unsere Grenzfunktion $f(z)$ den Bedingungen des Hilfssatzes genügt, sieht man leicht folgendermaßen ein: Zunächst ist wegen $|f_n(z)| < 1$ jedenfalls

$$|f(z)| \leqq 1, \tag{31}$$

und da $f(z)$ den Wert 0 genau einmal annimmt, also sicher keine Konstante ist, so gilt in (31) allgemein das Ungleichheitszeichen.

Es sei nun ϱ ein beliebiger Wert aus dem Intervall $0 < \varrho < 1$. Dann ist für genügend hohes n, etwa von $n = n'$ angefangen,

$$R_n > \varrho \quad (n \geqq n').$$

Es sei weiter $\mathfrak{L}$ diejenige Kurve in $\mathfrak{B}$, die bei der Abbildung durch $z_{n'} = f_{n'}(z)$ den Kreis $|z_{n'}| = \varrho$ liefert. Außerhalb von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{B}$ ist also

$$|f_{n'}(z)| > \varrho,$$

und wegen (30) gilt diese Ungleichung auch für alle $f_n(z)$ mit höherem Index und auch für die Grenzfunktion $f(z)$ selbst. Zu jedem ϱ gehört also eine Kurve in $\mathfrak{B}$, außerhalb der $|f(z)| > \varrho$ ist; es ist somit auch die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes erfüllt, und wir können schließen, daß $f(z)$ tatsächlich eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises liefert.

Es bleibt nur noch festzustellen, daß das positive Richtungselement bei der Abbildung fest bleibt. Da $f(0) = 0$ ist, brauchen wir nur noch festzustellen, daß $f'(0)$ positiv ist. Das folgt aber unmittelbar aus (21) im Verein mit $\varphi_n'(0) > 1$. Es ist also

$$f_n'(0) = \varphi_1'(0)\,\varphi_2'(0) \ldots \varphi_n'(0) > 1$$

und monoton wachsend, also $f'(0) > 1$.

4. Abschluß des Existenzbeweises. Wir hatten in der vorangehenden Nummer hypothetisch angenommen, daß die Funktionen $\varphi_\nu(z)$ entsprechend den beiden Forderungen gewählt werden können:

1. Forderung: $\varphi_\nu(z)$ soll ein in $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ eindeutiger Zweig der Umkehrung einer im Einheitskreis regulären und daselbst den Forderungen des Schwarzschen Lemmas genügenden Funktion sein, und es sei $\varphi_\nu'(0) > 0$.

2. Forderung: Die φ_ν sind sukzessive so zu wählen, daß die Minimaldistanzen R_ν der Bereichsränder der $\mathfrak{B}_\nu$ vom Nullpunkt mit wachsendem Index gegen 1 konvergieren.

Im folgenden soll eine solche Folge konstruiert werden. Es ist bemerkenswert, daß man zum Aufbau der φ_ν bereits mit ganz ele-

mentaren Funktionen auskommt, nämlich mit linearen Funktionen, die den Einheitskreis in sich abbilden, und der Funktion $\sqrt{z}$[1]).

Zunächst eine kleine Vorbemerkung über die Funktion $\sqrt{z}$. $\sqrt{z}$ ist eine zweideutige Funktion. In einer genügend kleinen Umgebung eines von 0 verschiedenen Wertes läßt sie sich in zwei eindeutige reguläre Zweige spalten, die auseinander durch Multiplikation mit (-1) hervorgehen. Wir brauchen im folgenden die Tatsache, daß eine solche Spaltung überhaupt in jedem einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt nicht enthaltenden Bereich möglich ist[2]).

Nun sei $\mathfrak{E}$ ein einfach zusammenhängender, den Nullpunkt enthaltender Bereich im Innern des Einheitskreises mit einer Minimaldistanz $R < 1$ des Bereichsrandes vom Nullpunkt, und es sei a ein dem Innern des Einheitskreises, nicht aber $\mathfrak{E}$ angehörender Punkt. Wir unterwerfen nun $\mathfrak{E}$ der Reihe nach den Abbildungen

$$(32) \qquad z' = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}, \quad z'' = \sqrt{z'}, \quad z''' = \frac{\sqrt{a} - z''}{1 - \overline{\sqrt{a}}\, z''}.$$

Da die erste Abbildung den Einheitskreis in sich transformiert und speziell den Punkt a in den Nullpunkt wirft, so liefert sie von $\mathfrak{E}$ ein wieder dem Einheitskreis angehörendes, jedoch den Nullpunkt nicht enthaltenes Bild $\mathfrak{E}'$. Durch die folgende Wurzeloperation, die wir uns in $\mathfrak{E}'$ eindeutig fixiert denken, geht aus $\mathfrak{E}'$ ein neuer, dem Einheitskreis angehöriger Bereich $\mathfrak{E}''$ hervor. Die dritte Abbildung[3]) endlich, die wieder linear ist, ist so eingerichtet, daß durch Zusammensetzung der drei Funktionen eine Abbildung entsteht, bei der der Nullpunkt fest bleibt. Endlich drehen wir die z'''-Ebene um den Nullpunkt so, daß das positive Richtungselement in seine ursprüngliche Lage gelangt. Dies bedeutet, wie eine einfache Rechnung lehrt, die dem Leser überlassen werden kann, eine Multiplikation von z''' mit $e^{i \operatorname{arc} \sqrt{a}}$. Die zusammengesetzte Abbildung lautet also

$$(33) \qquad z^* = e^{i \operatorname{arc} \sqrt{a}} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\dfrac{a - z}{1 - \bar{a} z}}}{1 - \overline{\sqrt{a}} \sqrt{\dfrac{a - z}{1 - \bar{a} z}}}.$$

---

[1]) Die Umkehrungen dieser Funktionen genügen den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas.

[2]) Den Beweis findet der Leser, in einen allgemeineren Zusammenhang eingeordnet, etwa in Bieberbach, Funktionentheorie I als Spezialfall des Monodromiesatzes.

[3]) $\sqrt{a}$ bedeutet hierin den Wert des von uns gewählten Zweiges von $\sqrt{z'}$ für $z' = a$.

Bei der Abbildung (33) entsteht aus $\mathfrak{E}$ ein Bereich $\mathfrak{E}^*$ mit einer Randdistanz $R^* > R$.

Um über die Vergrößerung Aufschluß zu gewinnen, beachte man, daß R^* jedenfalls nicht kleiner ist als die Randdistanz S des Bildes von $|z| \leqq R$ bei der Abbildung (33). Die letztere ist aber für $0 < R < 1$, $R \leqq |a| < 1$ sicher eine stetige Funktion von R und $|a|$, und wir finden also in $\delta(R, |a|) = S(R, |a|) - R$ eine positive, stetige Schranke für die Vergrößerung:

$$R^* - R \geqq \delta(R, |a|). \tag{34}$$

Auf Grund von (34) kann nun leicht eingesehen werden, daß man eine Folge φ_ν der gewünschten Art erhält, falls man den Übergang von $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ zu $\mathfrak{B}_\nu$ vermöge einer Funktion φ_ν der Form (33) vollzieht und dabei $a = a_\nu$ jedesmal etwa so wählt, daß $|a_\nu| - R_\nu$ einen festen Bruchteil von $1 - R_\nu$, etwa $\frac{1 - R_\nu}{2}$, nicht übertrifft. Die Stetigkeit und Positivität der Schranke in (34) zeigt nämlich, daß nach einer endlichen Zahl von Schritten die R_ν über eine vorgegebene Zahl $\varrho\,(0 < \varrho < 1)$ hinauswachsen und daß sie somit gegen 1 konvergieren.

5. Praktische Berechnung der Abbildungsfunktion. Das Schmiegungsverfahren zur Herstellung der Fundamentalabbildung eines gegebenen Bereichs ist zwar konstruktiver Natur, jedoch ist die Konvergenz desselben eine sehr langsame. Man muß sich deshalb nach Näherungsmethoden umsehen, die rascher zum Ziele führen.

Das erste Verfahren, das wir besprechen wollen, ist zugeschnitten auf Bereiche, die wenig von einem Kreise abweichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß es der Einheitskreis $|z| < 1$ ist, auf den die Abbildung vorgenommen werden soll. Es werde angenommen, daß jeder Halbstrahl vom Nullpunkt aus den Bereichsrand genau in einem Punkt $\varrho(\vartheta)\,e^{i\vartheta}$ trifft. $\varrho(\vartheta)$ sei eine stetig differenzierbare Funktion des Arkus ϑ und es sei sowohl der radiale Abstand vom Einheitskreis $\nu(\vartheta) = \varrho(\vartheta) - 1$ wie auch dessen Ableitung $\nu'(\vartheta)$ absolut unter einer kleinen Schranke ε:

$$|\nu(\vartheta)| < \varepsilon, \quad |\nu'(\vartheta)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Die gesuchte Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$ soll wieder das positive Richtungselement festhalten:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \tag{36}$$

Um zu ihrer näherungsweisen Bestimmung zu gelangen, stellen wir folgende heuristische Betrachtung an: Es ist zu erwarten, daß die Differenz $\delta z = \zeta - z$ absolut genommen auf der Peripherie des Einheitskreises ebenfalls von der Größenordnung ε sein wird und daß

also die radiale Komponente des Vektors δz, der von z nach ζ führt, bis auf Größen höherer Ordnung als ε mit ν übereinstimmen wird. Diese ist aber gegeben durch $\Re \frac{\delta z}{z}$ und man hat also bis auf Größen höherer Ordnung auf $|z| = 1$

$$\Re \frac{\delta z}{z} = \nu(\vartheta). \tag{37}$$

Man beachte nun, daß wegen (36) der Quotient $\frac{\delta z}{z}$ im ganzen Innern des Einheitskreises regulär ist; man kann deshalb mit Hilfe des Poissonschen Integrals aus (37) schließen, daß im Innern des Einheitskreises [s. Formel (5)]

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(\vartheta) \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \, d\vartheta \tag{38}$$

ist. Die rein imaginäre Zusatzkonstante in (5) ist wegen der Realität von $f'(0)$ gleich Null.

Durch eine nähere Analyse der Formel (38), auf die wir nicht eingehen, kann gezeigt werden, daß sie, die Ungleichungen (35) vorausgesetzt, tatsächlich eine Abbildung ergibt, die die Peripherie des Einheitskreises in eine Kurve überführt, die von der gegebenen Randkurve von höherer Ordnung als ε abweicht.

Die zweite Näherungsmethode, zu deren Besprechung wir jetzt übergehen, geht darauf aus, die gesuchte Abbildungsfunktion durch Polynome in z zu approximieren. Sie stützt sich auf eine Extremumeigenschaft analytischer Funktionen und ordnet sich einem allgemeinen Verfahren der Variationsrechnung unter, das von W. Ritz herrührt und in XX, § 3, **3** besprochen werden wird.

Der Extremumsatz, auf dem das Verfahren beruht, der „Bieberbachsche Flächensatz", lautet so: Sei $z = \varphi(\zeta)$ eine in $|\zeta| < R$ reguläre analytische Funktion, $|\varphi'(0)| = 1$. Dann ist der Flächeninhalt des Bildes $\mathfrak{B}$, das die Funktion vom Kreis entwirft, stets mindestens ebenso groß wie der Inhalt des Kreises selbst. Das Gleichheitszeichen tritt nur bei Ähnlichkeitstransformationen ein: $\varphi(z) = \varphi(0) + \varphi'(0) z$. Bei der Inhaltsbestimmung sind, im Falle die Abbildung nicht umkehrbar ist, die mehrfach bedeckten Teile der Ebene so oft zu zählen, wie sie im Bilde auftreten, und falls der Inhalt nicht existiert, der innere Inhalt zu nehmen.

Beweis: Die Reihenentwicklung von $\varphi(\zeta)$ laute:

$$w = \varphi(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \cdots \qquad (|\alpha_1| = 1). \tag{39}$$

Der gesuchte Inhalt J_R ist, wenn $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$ gesetzt wird,

$$J_R = \iint\limits_{\mathfrak{B}} dx\,dy = \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<R^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\,d\eta = \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<R^2} \varphi'(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Setzt man hierin die Reihe (39) ein und beschränkt sich zunächst auf einen Teilkreis $|\zeta| < R_1 < R$, so ergibt die dann erlaubte gliedweise Ausmultiplikation unter dem Integralzeichen und gliedweise Integration

$$J_{R_1} = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \mu\nu\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu \iint\limits_{\xi^2+\eta^2 \leqq R_1^2} \zeta^{\mu-1}\bar{\zeta}^{\nu-1}\,d\xi\,d\eta.$$

Die Einführung von Polarkoordinaten $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$ ergibt

$$J_{\mu\nu} = \iint\limits_{\zeta^2+\eta^2 \leqq R_1^2} \zeta^{\mu-1}\bar{\zeta}^{\nu-1}\,d\xi\,d\eta = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_1} \varrho^{\mu+\nu-1} e^{i(\mu-\nu)}\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Da $\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)\vartheta}\,d\vartheta = 0$ ist, wenn $\mu \neq \nu$, und $= 2\pi$, falls μ mit ν übereinstimmt, so hat man $J_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$, und $J_{\mu\mu} = \frac{1}{\mu} R_1^{2\mu} \cdot \pi$ und

$$J_{R_1} = \pi \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\,|\alpha_\mu|^2 R_1^{2\mu};$$

hieraus folgt durch Gedankenübergang, dessen genaue Durchführung dem Leser überlassen bleibe, der innere Inhalt des Bildes

$$J_R = \pi \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\,|\alpha_\mu|^2 R^{2\mu}. \tag{40}$$

Aus dieser Formel folgt sofort der Bieberbachsche Extremumsatz; denn die Reihe besteht aus lauter nicht negativen Gliedern, und es ist somit J_R nicht kleiner als das erste Glied derselben

$$J_R \geqq \pi\,|\alpha_1|^2 R^2 = \pi R^2.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur eintreten, wenn alle folgenden Reihenglieder verschwinden:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0,$$

wenn sich also $\varphi(\zeta)$ auf eine ganze lineare Funktion reduziert.

Man kann dem Bieberbachschen Satz eine allgemeinere Fassung geben, wenn man den Fundamentalsatz der konformen Abbildung heranzieht: Sei $\mathfrak{B}$ ein den Nullpunkt enthaltender Bereich der z-Ebene und $f(z)$ die Funktion, die ihn unter Festhaltung des positiven Richtungselements auf den Einheitskreis abbildet. Statt $f(z)$ wollen wir jetzt lieber die Abbildung $\zeta = g(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$ verwenden, die $\mathfrak{B}$ unter der neuen Normierungsbedingung

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1 \tag{41}$$

auf einen Kreis um den Nullpunkt abbildet. (Dieser ist natürlich nicht mehr notwendig der Einheitskreis.) Die Funktion $g(z)$ ist offenbar durch die letztere Bedingung und Normierung (41) eindeutig bestimmt. Der Radius des Kreises $\frac{1}{f'(0)}$ heiße R. Jede Funktion $\psi(z)$ in $\mathfrak{B}$ verwandelt sich vermöge der Abbildung in eine Funktion $\varphi(\zeta)$ in $|\zeta| < R$, und es ist

$$\psi(z) = \varphi(g(z))$$

mit

$$\psi'(0) = \varphi'(0),$$

also $|\varphi'(0)| = |\psi'(0)|$.

Man kann folglich den Satz aussprechen: Unter allen in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $\psi(z)$, die der Normierung $|\psi'(0)| = 1$ genügen, erteilen die speziellen $\psi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 g(z)$ mit $|\alpha_1| = 1$ dem Inhalt des Bildes den kleinsten Wert.

Fordert man enger

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1, \tag{42}$$

so erhält man allein $g(z)$ selbst. Damit ist $g(z)$ als einzige Lösung eines Minimumproblems gekennzeichnet.

Man kann nun nach Bieberbach versuchen, die Minimumeigenschaft als Ausgangspunkt eines Rechenverfahrens zur Berechnung von $g(z)$ zu machen. Statt zunächst sämtliche in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen, die (42) genügen, als Vergleichsfunktionen zuzulassen, schränke man zunächst die Konkurrenzfunktionen auf die Mannigfaltigkeit der Polynome vom Höchstgrade n

$$P_n(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

ein und suche darunter eines zu bestimmen, das dem Bilde einen kleinstmöglichen Inhalt erteilt. Wir werden sofort beweisen, daß diese Minimumaufgabe genau eine Lösung hat, sie heiße

$$p_n(z) = z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n.$$

Es ist zu erwarten, daß mit wachsendem n die Folge $p_n(z)$ gegen die Abbildungsfunktion $g(z)$ konvergiert. Daß das für einfach zusammenhängende Bereiche, die von einfachen Kurven begrenzt sind, tatsächlich richtig ist, hat Bieberbach bewiesen. Betreffs des Beweises sei auf die Originalabhandlung[1]) verwiesen.

Wir gehen nun an die Bestimmung von $p_n(z)$.

Soll $p_n(z)$ eine Lösung des Minimumproblems sein, so muß für jedes Polynom $P_n = p_n + r_n(z)$ mit

$$r_n(z) = c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

$$\iint_{\mathfrak{B}} P'_n(z)\,\overline{P'_n}\,dx\,dy \geqq \iint_{\mathfrak{B}} p'_n\,\overline{p'_n}\,dx\,dy$$

sein. Das bedeutet für r_n

$$(43)\qquad \iint p'_n\overline{r'_n}\,dx\,dy + \iint \overline{p'_n}\,r'_n\,dx\,dy + \iint r'_n\overline{r'_n}\,dx\,dy \geqq 0.$$

Ersetzt man hierin r_n durch ϱr_n ($\varrho > 0$ und konstant) und läßt nach Division durch ϱ dieses gegen Null gehen, so ergibt sich

$$\iint p'_n\overline{r'_n}\,dx\,dy + \iint \overline{p'_n}\,r'_n\,dx\,dy \geqq 0.$$

Diese Ungleichung muß gültig bleiben, wenn man hierin r_n mit einer beliebigen reellen oder komplexen Zahl ε multipliziert:

$$\bar{\varepsilon}\iint p'_n\overline{r'_n}\,dx\,dy + \varepsilon\iint \overline{p'_n}\,r'_n\,dx\,dy \geqq 0.$$

Dies ist offenbar nur möglich, wenn beide Integrale in der Ungleichung verschwinden oder, da sie konjugierte Zahlen darstellen, wenn

$$(44)\qquad \iint p'_n\overline{r'_n}\,dx\,dy = 0.$$

Umgekehrt folgt aus (44) wegen $r'_n\overline{r'_n} \geqq 0$ die Ungleichung (43) zurück. Es stellt somit die Identität (44) eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Minimalpolynom p_n dar. Da weiter das letzte Integral in (43′) sicher positiv ist, wenn r_n nicht identisch 0 ist, so kann es höchstens ein Minimalpolynom geben, da jedes andere P_n einen größeren Bildinhalt liefert. Daraus kann man auf Grund bekannter Sätze über lineare Gleichungssysteme leicht schließen, daß es wirklich ein Minimalpolynom gibt; denn man kann (44), indem man r_n der Reihe nach gleich $z^2, z^3, \ldots, z^n$ setzt, in ein System von $n-1$ linearen Gleichungen für die $n-1$ unbekannten Koeffizienten von p_n auflösen. Da man weiß, daß das Gleichungssystem nicht mehr als eine Lösung besitzen kann, so ist ja seine Determinante gewiß von Null verschieden, also das System eindeutig lösbar.

[1]) Rend. del. Circ. Mat. di Palermo XXXVIII (1914), S. 98.

Explizit lauten die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten b_ν von p_n offenbar mit $\alpha_{\mu\nu} = \mu\nu \iint\limits_{\mathfrak{B}} \bar{z}^{\mu-1} z^{\nu-1}\, dx\, dy$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} b_\nu = 0 \quad (\mu = 2, 3, \ldots, n). \tag{45}$$

Darin ist $b_1 = 1$ zu setzen.

Zusammenfassend können wir sagen: Um die Abbildungsfunktion $g(z)$ zu erhalten, löse man für jedes n Gl. (45) auf und bilde das Polynom $p_n(z)$. Es ist dann

$$g(z) = \lim_{n \to \infty} p_n(z).$$

6. Ersetzung der Laplaceschen Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung. Die Näherungsmethode zur Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung, die jetzt geschildert werden soll, geht darauf aus, durch Ersetzung der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten die analytische Aufgabe auf eine algebraische zurückzuführen. Sie ist in neuerer Zeit auch für allgemeinere Gleichungen mit Erfolg benutzt worden [1]).

Der erste Differenzenquotient nach x für eine Funktion $u(x, y)$ lautet

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h},$$

und also der zweite

$$\left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}\right)\frac{1}{h}$$
$$= \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}.$$

Der Laplacesche Ausdruck lautet also näherungsweise:

$$\Delta u \sim \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} \tag{46}$$

und die Laplacesche Differentialgleichung kann näherungsweise ersetzt werden durch

$$u(x, y) = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)}{4}. \tag{47}$$

Sie fordert, daß der Wert in (x, y) das arithmetische Mittel sein soll der Werte in den vier benachbarten Punkten $(x+h, y)$, $(x-h, y)$, $(x, y+h)$, $(x, y-h)$.

[1]) Vgl. insbesondere eine Arbeit von R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy in Math. Ann., Bd. 100 (1928).

Um nun etwa die erste Randwertaufgabe näherungsweise zu lösen, wird man so verfahren: Man konstruiere ein möglichst engmaschiges quadratisches Punktgitter, etwa mit den Gitterpunkten $x = mh$, $y = nh$ mit $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und greife diejenigen heraus, die in den Bereich hineinfallen, für den die Randwertaufgabe gelöst werden soll. Das so gewonnene Punktsystem heiße $\mathfrak{g}$. Ein Punkt von $\mathfrak{g}$ heiße ein innerer Punkt von $\mathfrak{g}$, wenn die vier ihm benachbarten Gitterpunkte ebenfalls zu $\mathfrak{g}$ gehören, die übrigbleibenden Punkte mögen Randpunkte von $\mathfrak{g}$ genannt werden. In den letzteren denke man sich den Wert von u gleichgesetzt einem der gegebenen Randwerte in einer möglichst nahen Stelle des Randes des gegebenen Gebiets. Diese Operation ist zwar nicht eindeutig, die in Betracht kommenden Werte werden aber, wenn die Randfunktion als stetig vorausgesetzt wird, wenig voneinander abweichen. Man hat nun die Aufgabe, die Werte von $u(x, y)$ in den inneren Gitterpunkten von $\mathfrak{g}$ so festzusetzen, daß Gl. (47) identisch erfüllt ist. Das ist das Randwertproblem der Differenzengleichung (47). Wir werden zeigen, daß es ebenso wie das Randwertproblem der Differentialgleichung eine und nur eine Lösung hat und ein handliches iterierendes Verfahren zu ihrer Lösung angeben, das auf Liebmann zurückgeht. Nach Erledigung dieser rein algebraischen Aufgabe wäre zu untersuchen, ob beim Grenzübergang $h \to 0$ in der Grenze die Lösung der Laplacesche Differentialgleichung mit den vorgeschriebenen Randwerten herauskommt. Dies ist zu bejahen. Wegen des Beweises sei auf die oben zitierte Arbeit verwiesen.

Nun gehen wir an das algebraische Randwertproblem heran. Da wir es mit der Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen mit ebensoviel Gleichungen als Unbekannten zu tun haben — ihre Anzahl ist identisch mit der Anzahl der inneren Punkte von $\mathfrak{g}$ —, so wird Existenz und Eindeutigkeit bei willkürlichen Randwerten bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß das zugehörige reduzierte homogene Gleichungssystem — Randwerte gleich Null — nur die identisch verschwindende Lösung hat. Dies ist eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes: Eine Lösung von (47) in $\mathfrak{g}$ nimmt ihre größten und kleinsten Werte in Randpunkten von $\mathfrak{g}$ an. Dies wieder ergibt sich aus der Bedeutung von (47): Im einen inneren Punkte soll u ein Mittelwert der Werte in den benachbarten Punkten sein.

Eine exakte Auflösung unseres Gleichungssystems würde bei größerer Gitterpunktsanzahl zu langwierigen Rechnungen führen. Man bedient sich daher zweckmäßigerweise des Liebmannschen Näherungsverfahrens, das verhältnismäßig rasch ein gutes Resultat liefert. Man kann es als eine Übertragung des im folgenden Kapitel beschriebenen

Poincaréschen Balayage-Verfahrens zur Lösung des ersten Randwertproblems ins Algebraische bezeichnen. Es besteht in Folgendem: Man denke sich die inneren Punkte von $\mathfrak{g}$ in eine bestimmte Reihenfolge gebracht, am besten so, daß der erste Punkt P_1 mindestens einem Randpunkt von $\mathfrak{g}$ benachbart ist, dann P_2 in der Weise, daß P_2 in derselben Beziehung zu dem durch Hinzufügung von P_1 zu $\mathfrak{g}$ entstandenen System $\mathfrak{g}_1$ steht usw., bis ganz $\mathfrak{g}$ erschöpft ist. Nun bilde man zunächst eine Funktion $u_1(x, y)$ in $\mathfrak{g}$ mit den gegebenen Randwerten, indem man in willkürlicher Weise den inneren Punkten von $\mathfrak{g}$ Werte beilegt. Nun setzt das iterierende Verfahren ein. Man verbessere die Werte von u_1, indem man im Hinblick auf die zu erfüllende Gl. (47) in P_1 den Wert von u_1 daselbst mit Benutzung der gegebenen Randwerte durch das arithmetische Mittel der benachbarten Werte ersetzt, verfahre nach dieser Abänderung ebenso mit P_2 usw., bis $\mathfrak{g}$ völlig erschöpft ist. Die neugewonnene Funktion in $\mathfrak{g}$ heiße u_2. Nun verfahre man ebenso mit u_2. Die neuentstandene Funktion heiße u_3 usw. Ich behaupte: Es konvergiert $u_n(x, y)$ im Gitter und liefert als Limes die Lösung $u(x, y)$ der Randwertaufgabe in $\mathfrak{g}$.

Beweis: Wir studieren den Übergang von u_n zu u_{n+1} im Innern von $\mathfrak{g}$. Er besteht offenbar in einer linearen Transformation, die von den Werten von u_n im Innern von $\mathfrak{g}$ zu den Werten von u_{n+1} daselbst führt und die von n unabhängig ist. Die zugehörige homogene Transformation ist sogar von der Wahl der Randwerte unabhängig. Man erhält sie ja, indem man letztere gleich Null annimmt.

Wird jedem inneren Gitterpunkt P_ν eine Variable x_ν zugeordnet, so gelangen wir so zu einer Transformation

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu}\, x_\nu + c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N), \tag{48}$$

worin N die Anzahl der P_ν bedeutet. Die $c_{\mu\nu}$ hängen nur von $\mathfrak{g}$ ab. Die Konvergenz des Verfahrens beruht nun auf folgenden Eigenschaften der $c_{\mu\nu}$:

1. $c_{\mu\nu} \geqq 0,$

2. $\sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} < 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N).$

Um 1 zu beweisen, beachte man, daß (48) durch Zusammensetzung aus N einfacheren Substitutionen mit nicht negativen Koeffizienten entstanden ist. Der Beweis von 2 wird erbracht sein, wenn gezeigt wird, daß bei Annahme verschwindender Randwerte ($c_\mu = 0$) und Einsetzung von $x_\nu = 1$ in (48) für die x'_μ Zahlen < 1 heraus-

kommen. Das folgt aber daraus, daß beim ersten Schritt, der zu (48) führt, in P_1 ein Wert < 1 entsteht, beim zweiten Schritt ebenso in P_2 usw. (Man beachte die besondere Festsetzung über die Anordnung der P_ν.)

Sei nun q das Maximum der Summen $\sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu}$. Es ist $0 < q < 1$. Sei weiter u die exakte Lösung von (47). Werden die Werte von u und u_n in P_ν durch angehängten oberen Index ν bezeichnet, so hat man

$$u_{n+1}^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} u_n^{\nu} + c_\mu, \tag{48'}$$

$$u^{\mu} = \sum c_{\mu\nu} u^{\nu} + c_\mu$$

und nach Subtraktion

$$u^{\mu} - u_{n+1}^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} \left(u^{\nu} - u_n^{\nu}\right). \tag{49}$$

Wird das Maximum der Abweichung $\left|u^{\nu} - u_n^{\nu}\right|$ bei gegebenen n mit ω_n bezeichnet, so folgt aus (48)

$$\left|u^{\mu} - u_{n+1}^{\mu}\right| \leqq \sum_{\nu} c_{\mu\nu} \left|u^{\nu} - u_n^{\nu}\right| \leqq \omega_n \sum_{\nu} c_{\mu\nu} \leqq \omega_n q,$$

also

$$\omega_{n+1} \leqq q\, \omega_n \quad (0 < q < 1). \tag{50}$$

Aus (50) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{\nu} = u^{\nu}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y) \text{ in } \mathfrak{g}.$$

Literatur siehe S. 192 und 626.

Siebzehntes Kapitel

Die Potentialgleichung im Raume

Gegenstand dieses Kapitels ist die Behandlung der räumlichen Potentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

unter gewissen Randbedingungen. Wie im XVI. Kapitel, könnte auch hier das Dirichletsche Integral zum Ausgangspunkt der Darstellung dienen. Wir kommen darauf in § 4 im Zusammenhang mit einem Existenzbeweis zurück. Dem in XVI, § 1 behandelten speziellen Fall

des Kreises entspricht hier der Spezialfall der Kugel, dessen Untersuchung in § 2 auf allgemeine Sätze über die Darstellung der Lösungen der Potentialgleichung führt. § 1 enthält Vorbereitungen, § 3 Beispiele und Ergänzungen zu diesen Betrachtungen.

§ 1. Allgemeine Sätze

1. Folgerungen aus der Greenschen Formel. Es sei S eine geschlossene stetige Fläche im Raume, die sich in endlich viele stetig gekrümmte Stücke zerlegen läßt. Außerdem werde S von jeder zu einer Koordinatenachse parallelen Geraden in höchstens p Punkten geschnitten, wobei p eine feste Zahl ist. Wir bezeichnen das Innere von S mit T_i und das Äußere von S mit T_a.

Wir betrachten zwei Funktionen $u_1(p)$ und $u_2(p)$, die in T_i zweimal stetig differenzierbar sind und der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen. Wir nehmen an, daß u_1 und u_2, sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung bei der Annäherung an S stetigen Randwerten zustreben. Es gilt dann nach der in II, § 3 bewiesenen Greenschen Formel (34) [vgl. auch XIV, § 1, (9)]:

$$\int_S \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) d\sigma = 0; \tag{1}$$

hier bedeutet $d\sigma$ das Flächenelement von S, und die Normale ist in das Gebiet T_i gerichtet[1]).

Für $u_2 = 1$ folgt hieraus die bereits in XIV, § 3, (12) genannte Formel (wir schreiben $u_1 = u$)

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \tag{2}$$

Man kann, wie es in XIV, § 1, 3 gezeigt worden ist, den Wert von u in einem Punkte p von T_i durch die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ an der Begrenzung S darstellen. Bezeichnet $\varrho = (pq)$ den Abstand des auf S variablen Punktes q von dem festen Punkt („Aufpunkt") p, so hat man

$$u(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(u(q) \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u(q)}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{3}$$

wo q die Begrenzung S durchläuft. Die Normale ist in das Innere S gerichtet.

---

[1]) Dieser Satz gilt auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete; die Integration ist dann über sämtliche Randflächen zu erstrecken.

2. Regularität im Endlichen. Genügt die Funktion u den in 1 genannten Bedingungen, so heißt sie eine in T_i reguläre Potentialfunktion. Es gilt dann die Formel (3).

Bezeichnet man mit x, y, z bzw. ξ, η, ζ die rechtwinkligen Koordinaten von p und q, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \tag{4}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n} &= \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta}\cos\gamma \\ &= \frac{x-\xi}{\varrho^3}\cos\alpha + \frac{y-\eta}{\varrho^3}\cos\beta + \frac{z-\zeta}{\varrho^3}\cos\gamma, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wenn $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Normale in q bedeuten. Wir sehen also aus (3), daß eine in T_i reguläre Potentialfunktion $u(p)$ nach den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z von p beliebig oft differenzierbar ist; sie ist sogar in diesen Koordinaten analytisch in dem Sinne, daß man u in einer gewissen Umgebung eines beliebigen Punktes x_0, y_0, z_0 von T_i durch eine nach Potenzen von $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ fortschreitende konvergente Potenzreihe darstellen kann.

3. Regularität im Unendlichen. Wir wollen jetzt die vorigen Betrachtungen auf das Außengebiet T_a von S ausdehnen.

Es sei $u(p)$ eine in diesem Gebiete T_a definierte Funktion, welche in jedem endlichen Teile von T_a zweimal stetig differenzierbar ist und der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Außerdem mögen wie vorher u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei der Annäherung an S stetige Randwerte haben.

Es sei F irgendeine geschlossene Fläche, welche S ganz in ihrem Innern enthält. Das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = M, \tag{6}$$

wobei die Normale in das Innere von F gerichtet ist, wird dann von der Wahl von F unabhängig, wie man durch Anwendung von (2) auf das von zwei derartigen Flächen F begrenzte „Ringgebiet" ohne weiteres einsieht (vgl. die Bemerkung auf der vorigen Seite, Fußnote 1). Nach Plemelj[1]) heißt M die Gesamtmasse von u. Man kann natürlich in (6) für F auch die Fläche S wählen.

[1]) Potentialtheoretische Untersuchungen (Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig XL; Leipzig, B. G. Teubner, 1911), S. 4.

Als Beispiel erwähnen wir die Funktion $\frac{1}{(p q_0)}$, wo q_0 einen festen Punkt im Innern von S bedeutet; ihre Gesamtmasse ist gleich 1, wie unmittelbar folgt, wenn man für F eine S enthaltende Kugel mit q_0 als Mittelpunkt wählt.

Unsere Funktion $u(p)$ erfülle nun außer den obigen Bedingungen die Bedingung

1. $\lim\limits_{p \to \infty} u(p) = u(\infty)$ ist vorhanden. Wir zeigen dann zunächst, daß die Formel (3) noch immer richtig ist, wenn man auf der rechten Seite das additive Glied $u(\infty)$ hinzufügt; p ist dabei ein beliebiger endlicher Punkt von T_a.

Es genügt, dies für $u(\infty) = 0$ zu beweisen, denn wegen (2)

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Wir wenden (3) auf das „Ringgebiet" an, dessen Begrenzung aus S und einer S enthaltenden Kugel K besteht, und wählen dabei K so, daß ihr Mittelpunkt in p liegt. Wir beweisen, daß die Summe

$$\int\limits_K u(q) \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n} d\sigma - \int\limits_K \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u(q)}{\partial n} d\sigma$$

gegen 0 konvergiert, wenn der Radius R von K über alle Grenzen wächst. In der Tat gilt auf K

$$\left| \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n} \right| = \frac{1}{R^2}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R},$$

so daß das erste Glied absolut genommen kleiner ist als

$$\frac{1}{R^2} \operatorname*{Max}_K |u(q)| \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \operatorname*{Max}_K |u(q)| \to 4\pi |u(\infty)| = 0$$

für $R \to \infty$. Das zweite Glied ist gleich $\frac{4\pi M}{R}$, wenn M die Gesamtmasse bedeutet. Hieraus folgt die Behauptung.

Wir zeigen weiter, daß eine Funktion, welche die Bedingung 1 erfüllt, die folgende Eigenschaft besitzt:

2. Es sei R der Abstand des variablen Punktes p von irgendeinem festen im Endlichen liegenden Punkte q_0. Dann bleiben die Produkte

$$R^2 u_x, \quad R^2 u_y, \quad R^2 u_z$$

für $R \to \infty$, mithin auch $p \to \infty$, beschränkt.

Wir bemerken zunächst, daß nach (5)

$$R^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial n}$$

für $R \to \infty$ von der Ordnung R^{-1} ist. Wir haben also nach (3) nur die Beschränktheit von

$$R^2 \int_S \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = R^2 \int_S \frac{\xi - x}{\varrho^3} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = R^2 \int_S \frac{\xi}{\varrho^3} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - R^2 \int_S \frac{x}{\varrho^3} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

für $R \to \infty$ nachzuweisen. Das erste Glied ist hier von der Ordnung R^{-1}, während das zweite offenbar beschränkt bleibt, woraus die Behauptung für $R^2 u_x$ folgt. Ähnlich behandelt man die beiden anderen Produkte.

Ist die Gesamtmasse von u gleich 0, so ist das zweite Glied

$$R^2 x \int_S \frac{1}{\varrho^3} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = R^2 x \int_S \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{R^3}\right) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Da $\dfrac{1}{\varrho^3} - \dfrac{1}{R^3}$ die Ordnung R^{-4} hat, ist dieser Ausdruck von der Ordnung R^{-1}. Wenn also die Bedingung 1 erfüllt ist und außerdem die Gesamtmasse verschwindet, so gilt:

2'. Mit den gleichen Bezeichnungen wie unter 2 bleiben sogar die Produkte

$$R^3 u_x, \quad R^3 u_y, \quad R^3 u_z$$

für $R \to \infty$ beschränkt.

Eine Funktion $u(p)$, für welche $\lim\limits_{p \to \infty} u(p)$ existiert und deren Gesamtmasse gleich 0 ist, heißt im Unendlichen regulär. Für eine solche Funktion haben wir die Gültigkeit von 2' bewiesen. Umgekehrt folgt aber aus 2' das Verschwinden der Gesamtmasse, weil doch

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leq |u_x| + |u_y| + |u_z|$$

ist. Wir können folglich die Regularität im Unendlichen auch so ausdrücken, daß $\lim\limits_{p \to \infty} u(p)$ existiert und die Produkte $R^3 u_x$, $R^3 u_y$, $R^3 u_z$

für $R \to \infty$ beschränkt bleiben (oder auch so, daß $R^2 u_x$, $R^2 u_y$, $R^2 u_z$ für $R \to \infty$ gegen 0 konvergieren).

Existiert für eine Funktion $\mathfrak{u}(p)$ mit der Gesamtmasse M der Grenzwert $\lim\limits_{p \to \infty} u(p)$, so ist $u - \frac{M}{R}$ eine im Unendlichen reguläre Potentialfunktion.

4. Transformation durch reziproke Radien. Es sei $u(p) = u(r, \vartheta, \varphi)$ eine außerhalb einer Kugel S überall im Endlichen reguläre Potentialfunktion der räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ; außerdem möge der Grenzwert $\lim\limits_{p \to \infty} u(p) = u(\infty)$ existieren. Dann ist

$$\frac{1}{r} u\left(\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi\right) = U(r, \vartheta, \varphi) \tag{7}$$

eine für genügend kleine r $(r > 0)$ reguläre Potentialfunktion. Sie ist auch für $r = 0$ regulär, wenn $u(\infty) = 0$ ist und wenn man $U(0) = 0$ setzt.

Der erste Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn man U in die auf Polarkoordinaten umgeschriebene Laplacesche Differentialgleichung [II, § 3, (44)] einsetzt. Es gilt, wenn $\frac{1}{r} = R$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \varDelta U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) \\ &= R^5 \left\{\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial u}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Es sei nun $u(\infty) = 0$. Dann gilt (3), wenn p einen beliebigen Punkt außerhalb der Kugel S bedeutet. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes r, ϑ, φ; dann sind die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi$ gleich

$$\frac{x}{r^2} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = X, \quad \frac{y}{r^2} = Y, \quad \frac{z}{r^2} = Z \tag{8}$$

(Transformation durch reziproke Radien). Es gilt $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 = \frac{1}{r^2}$ und die Umkehrung von (8):

$$\frac{X}{R^2} = x, \quad \frac{Y}{R^2} = y, \quad \frac{Z}{R^2} = z. \tag{8'}$$

Wir wählen in (3) für p den Punkt X, Y, Z. Dann ist

$$\begin{aligned}\varrho &= \sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2}\\ &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{1+\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\xi X-2\eta Y-2\zeta Z}{X^2+Y^2+Z^2}}\\ &= R\sqrt{1+(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(x^2+y^2+z^2)-2\xi x-2\eta y-2\zeta z}\\ &= R\,\mathfrak{P}_1(x, y, z),\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{P}_1$ (sowie auch $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ im folgenden) eine Potenzreihe von x, y, z bedeutet, welche für genügend kleine Werte von $|x|, |y|, |z|$ konvergiert und das Absolutglied 1 besitzt. Man hat also

$$R\frac{1}{\varrho} = \mathfrak{P}_2(x, y, z).$$

Es ist ferner wegen (5)

$$\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial n} = \frac{X-\xi}{\varrho^3}\cos\alpha + \frac{Y-\eta}{\varrho^3}\cos\beta + \frac{Z-\zeta}{\varrho^3}\cos\gamma,$$

so daß

$$R\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial n} = \frac{R^2 x-\xi}{R^2}\cos\alpha\cdot\mathfrak{P}_3+\cdots = \{x-\xi(x^2+y^2+z^2)\}\cos\alpha\cdot\mathfrak{P}_3+\cdots$$

gilt.

Wegen (7) erhalten wir somit $U = R\,u(R, \vartheta, \varphi)$, dargestellt durch eine Potenzreihe von x, y, z, deren Absolutglied gleich

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial u(q)}{\partial n}\,d\sigma,$$

d. h. die Gesamtmasse M von u ist. Diese Potenzreihe konvergiert in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes und definiert dort eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Da wir mit Ausnahme des Nullpunktes die Gültigkeit der Gleichung $\Delta U = 0$ bereits bewiesen haben, so gilt dies ohne Ausnahme in der ganzen oben erwähnten Umgebung.

Allgemein ergibt sich so, wenn $u(\infty)$ beliebig ist, $U = \dfrac{u(\infty)}{r}$ + einer in der Umgebung des Nullpunktes regulären Potentialfunktion, deren Wert im Nullpunkt gleich der Gesamtmasse von u ist.

Dieser Satz ermöglicht es, bei vielen Aufgaben der Potentialtheorie die unendlichen Gebiete auf endliche zurückzuführen.

5. Maximum-Minimumprinzip. Die für eine Kugelfläche vom Radius R spezialisierte Formel (3) liefert mit Rücksicht auf (2) die Darstellung einer harmonischen Funktion u im Mittelpunkt p einer Kugel vom Radius R als Mittelwert der Werte auf der Begrenzung:

$$u(p) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S u(q)\,d\sigma. \tag{9}$$

Sie lehrt, daß der Wert von u im Mittelpunkt irgendeiner Kugel stets zwischen dem größten und dem kleinsten Werte liegt, den u an der Kugeloberfläche selbst annimmt. Daraus schließt man, daß eine harmonische Funktion, die keine Konstante ist, in jedem Bereich ihr Maximum und Minimum an der Begrenzung annimmt (vgl. XVI, § 1, 4). Dieser Satz gilt auch dann, wenn u auf der Begrenzung nicht stetig differenzierbar, wie bisher, sondern bloß stetig vorausgesetzt wird.

6. Erste Randwertaufgabe. Greensche Funktion. Die erste Randwertaufgabe (Dirichletsches Problem) besteht darin, im Gebiet $T = T_i$ eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ anzugeben, die bei Annäherung an den Rand S in eine auf S gegebene stetige Funktion übergeht. Aus der in 5 bewiesenen Eigenschaft der harmonischen Funktionen folgt, daß diese Aufgabe, wenn überhaupt, nur eine Lösung besitzen kann (vgl. XIV, § 3, 4). Wir wollen nun mit Hilfe der Formel (3) diese Aufgabe auf eine speziellere reduzieren, welche folgendermaßen lautet: Es sei p ein fester, q ein variabler Punkt des Gebietes T und (pq) bezeichne den Abstand der Punkte p und q. Es wird eine Funktion $G(p;q)$ gesucht, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. $G(p;q) - \dfrac{1}{(pq)}$ ist regulär harmonisch in T.
2. Auf der Begrenzung S ist $G = 0$.

Es handelt sich also um die Lösung der ersten Randwertaufgabe in dem speziellen Falle, wo die Randwerte $1/(pq)$ sind. Wir zeigen, daß man mit Hilfe dieser Funktion $G(p;q)$, welche die zum „Aufpunkt“ p gehörige Greensche Funktion des Gebietes T heißt, jede harmonische Funktion u durch ihre Randwerte selbst (ohne die Normalableitung) darstellen kann[1]). Trägt man nämlich $u_1 = u$, $u_2 = G(p;q) - \dfrac{1}{(pq)}$ in (1) ein, so folgt mit Beachtung von (3)

$$u(p) = \frac{1}{4\pi}\int_S u(q)\,\frac{\partial G(p;q)}{\partial n}\,d\sigma, \tag{10}$$

[1]) Dies gilt auch dann, wenn u auf der Begrenzung S bloß stetig ist.

wobei q die Begrenzung S durchläuft. Die Normale n ist dabei wie immer ins Innere von T gerichtet. Diese wichtige Formel lehrt uns wieder, daß eine harmonische Funktion durch ihre Randwerte bestimmt ist. Sie führt in recht allgemeinen Fällen zur Lösung der ersten Randwertaufgabe, indem sich zeigen läßt, daß das mit Hilfe der Randwerte $u(q)$ gebildete Integral rechts in (10), das offensichtlich eine harmonische Funktion von p darstellt, bei stetiger Annäherung an die Begrenzungsfläche in $u(q)$ übergeht. Wir wollen dies in § 2 speziell für die Kugel darlegen.

Aus der Eindeutigkeit der ersten Randwertaufgabe folgt, daß die Greensche Funktion $G(p;q)$ eines Gebietes T, wenn sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt ist; es gilt ferner die Symmetriebeziehung

$$G(p;q) = G(q;p), \tag{11}$$

die man ganz analog beweist wie die entsprechende Eigenschaft der Greenschen Funktion der ebenen Potentialtheorie (vgl. auch XIII, § 3, **3**).

Diese Betrachtungen bleiben auch dann gültig, wenn das zugrunde gelegte Gebiet T den unendlich fernen Punkt enthält, d. h. für das Äußere T_a der Fläche S. Die Fassung der ersten Randwertaufgabe ist dann entsprechend der Definition der im Unendlichen regulären harmonischen Funktion zu modifizieren: es wird nämlich in diesem Falle als besondere Forderung gestellt, daß die gesuchte Funktion u im Unendlichen die Form habe: $u = \frac{M}{r} +$ einer regulären harmonischen Funktion. Außer den Randwerten von u ist also in diesem Falle auch die Gesamtmasse M vorzugeben. Ähnlich ist die Greensche Funktion $G(p;q)$ des Außengebietes in bezug auf einen darin liegenden endlichen Punkt p zu erklären. Sie konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn q ins Unendliche geht, und die partiellen Ableitungen, multipliziert mit dem Quadrat des Abstandes (p, q), bleiben beschränkt. Die einfache Bemerkung, die wir oben in **4** ausgeführt haben, macht jedoch diese ganze Betrachtung in vielen Fällen entbehrlich, indem man die erste Randwertaufgabe bezüglich eines unendlichen Gebietes auf dieselbe Aufgabe bezüglich eines passend definierten endlichen Gebietes zurückführen kann.

7. Zweite Randwertaufgabe. In vielen Problemen der mathematischen Physik, insbesondere in der Theorie der Strömungen, begegnet man der Aufgabe (XIV, § 3, **1**), die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ in einem Gebiet T mit der Randbedingung zu integrieren, daß u auf der Begrenzung S von T eine gegebene stetige Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ besitzt. Nach (2) muß diese die notwendige Bedingung erfüllen, daß

ihr Flächenintegral über S den Wert 0 besitzt. Diese zweite Randwertaufgabe (Neumannsches Problem) läßt sich auch, wie die erste, auf eine speziellere zurückführen, indem man eine zur Greenschen analoge Funktion, die charakteristische Funktion $H(p;q)$ einführt, wobei p ein fester, q ein veränderlicher Punkt unseres Gebietes T ist [1]). Sie hat die folgenden Eigenschaften:

1. $H(p;q) - \dfrac{1}{(pq)}$ ist regulär harmonisch in T.
2. Auf der Begrenzung S ist $\dfrac{\partial H}{\partial n} = c$ (konstant).

Die Konstante c in 2 ist nicht beliebig, sondern ergibt sich folgendermaßen. Setzt man $u = H(p;q) - \dfrac{1}{(pq)}$ in Gl. (2) ein, so folgt, wenn man den Inhalt von S mit F bezeichnet,

$$cF - \int\limits_S \frac{\partial \frac{1}{(pq)}}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Das zweite Integral behält nach (2) seinen Wert, wenn man es anstatt S über eine beliebig kleine Kugelfläche um p erstreckt. Dann folgt

$$c = \frac{4\pi}{F}. \tag{12}$$

Setzt man ferner in (1): $u_1 = u(q)$ und $u_2 = H(p;q) - \dfrac{1}{(pq)}$ wobei u harmonisch ist, so erhält man bei Beachtung von (3)

$$4\pi u(p) = -\int\limits_S H(p;q)\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + c\int\limits_S u(q)\, d\sigma. \tag{13}$$

Diese Formel führt in recht allgemeinen Fällen zur Auffindung einer harmonischen Funktion $u(p)$, die auf der Begrenzung eine gegebene Normalableitung besitzt. Die gesuchte Funktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. In der Tat, wenn $u_1(p)$ und $u_2(p)$ zwei Lösungen sind, so folgt aus (13): $4\pi(u_1(p) - u_2(p)) =$ konst. Über diese additive Konstante kann so verfügt werden, daß das zweite Integral in (13) überhaupt fortfällt. Hieraus folgt,

---

[1]) F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme. Herausgegeben von K. von der Mühll, Leipzig 1884.

daß auch die charakteristische Funktion $H(p; q)$ (p fest, q veränderlich) bis auf eine additive Konstante, die jedoch zunächst von p abhängen kann, eindeutig festgelegt ist.

Man zeigt, ähnlich wie in 6 angedeutet wurde, die Symmetrieeigenschaft der charakteristischen Funktion

$$H(p; q) = H(q; p). \tag{14}$$

Hieraus schließt man endlich, daß $H(p, q)$ bis auf eine von p und q unabhängige Konstante eindeutig bestimmt ist.

§ 2. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen

Für den Fall einer Kugel lassen sich die beiden Randwertaufgaben direkt behandeln. In diesem speziellen Falle gelingt es nämlich, sowohl die Greensche als auch die charakteristische Funktion explizite anzugeben. Auf diese Weise ergeben sich Sätze von allgemeinem Interesse bezüglich der Darstellung harmonischer Funktionen durch unendliche Reihen.

1. Die Greensche Funktion. Es sei O der Mittelpunkt, R der Radius einer Kugel K, p ein fester, q ein veränderlicher Punkt im Innern von K. Zu jedem Punkte p, der von O verschieden ist, definieren wir den (in bezug auf K) konjugierten Punkt p^* folgendermaßen: p^* ist der Spiegelpunkt von p in bezug auf irgendeinen Hauptkreis von K, dessen Ebene p enthält. Da durch jeden Punkt M der Kugeloberfläche sich ein solcher Hauptkreis legen läßt, so folgt aus der in III, § 2, 1 bewiesenen Eigenschaft der Spiegelpunkte: Ist M ein beliebiger Punkt der Kugeloberfläche K, so ist das Verhältnis

$$(Mp):(Mp^*) = (Op):R, \tag{1}$$

d. h. unabhängig vom Punkte M. Es ist ferner $(Op)(Op^*) = R^2$

Mit Hilfe dieser elementaren Beziehung ist es leicht, die Greensche Funktion $G(p; q)$ des Kugelinnern anzugeben. Es ist

$$G(p; q) = \frac{1}{(pq)} - \frac{R}{(Op)(p^*q)}. \tag{2}$$

G ist als Potential des Systems zu deuten, das aus den beiden, in p und p^* angebrachten Massen von der Größe 1 bzw. $-R(Op)^{-1}$ besteht. Daß $G - \frac{1}{(pq)}$ im Innern von K harmonisch ist, folgt daraus, daß $\frac{1}{(p^*q)}$ diese Eigenschaft besitzt. Aus (1) ergibt sich ferner $G = 0$, wenn q an die Kugeloberfläche heranrückt.

Derselbe Ausdruck liefert auch die Greensche Funktion des Kugeläußern, wenn p und q außerhalb von K liegen und p^* wieder den konjugierten Punkt von p in bezug auf K bezeichnet.

2. Lösung der ersten Randwertaufgabe. Es ist zweckmäßig, die Punkte p und q durch räumliche Polarkoordinaten darzustellen. Es seien r, ϑ, φ die Koordinaten von p und r', ϑ', φ' die von q. Außerdem sei auf der Kugelfläche K eine stetige Funktion $f(\vartheta', \varphi')$ gegeben. Die Formel § 1, (10) führt auf

$$(3) \qquad u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_K f(\vartheta', \varphi') \frac{\partial G}{\partial n} \, d\sigma.$$

Die Integration erstreckt sich über die Kugeloberfläche K, die Normalenrichtung ist der Richtung der wachsenden Radien entgegengesetzt, d. h. $\partial n = -\partial r'$. Wir haben somit, wenn

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$$

gesetzt wird (γ ist der Winkel zwischen Op und Oq),

$$(2') \quad G(p; q) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + r^2 r'^2 - 2R^2 rr'\cos\gamma}},$$

und hieraus

$$\left(\frac{\partial G(p; q)}{\partial n}\right)_{r'=R} = \frac{1}{R} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}}.$$

Die Normalableitung der Greenschen Funktion in einem Punkte q der Kugeloberfläche ist demnach umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des Punktes q vom Aufpunkt p. Die Formel (3) lautet also ausführlicher:

$$(3') \left\{ \begin{aligned} u(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi R} \iint_K f(\vartheta', \varphi') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}} \, d\sigma \\ &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}} \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'. \end{aligned} \right.$$

Dieses Integral spielt in der räumlichen Potentialtheorie dieselbe Rolle wie das Poissonsche in der Ebene (vgl. XVI, § 1, 1). Man nennt es darum das räumliche Poissonsche Integral. Man zeigt ganz ähnlich wie in XVI, § 1, 2, daß $u(r, \vartheta, \varphi)$ für $r \to R$ in die gegebene Randfunktion $f(\vartheta, \varphi)$ übergeht, und zwar gleichmäßig für alle ϑ und φ. Allgemeiner gilt $\lim\limits_{r \to R} u(r, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi)$ in jedem Punkte (ϑ, φ) der Kugeloberfläche, wo f stetig ist, vorausgesetzt, daß f auf der ganzen Kugel beschränkt und integrabel ist. Eine

vorsichtige Übertragung des a. a. O. dargelegten Beweises auf diesen räumlichen Fall zeigt sogar, daß der Grenzwert von u auch dann existiert, wenn f in dem betreffenden Punkte (ϑ, φ) der Kugel unstetig ist, wenn jedoch die Mittelwerte von f längs der Parallelkreise um (ϑ, φ) existieren und einen Grenzwert haben, sobald die Radien dieser Parallelkreise gegen 0 gehen. Der Grenzwert des Integrals (3′) ist dann gleich dem auf diese Weise definierten „Mittelwert" von f in dem Punkte (ϑ, φ)[1].

Ganz analog läßt sich die erste Randwertaufgabe für das Außengebiet der Kugel behandeln. Vgl. jedoch die Bemerkung am Schluß von § 1, 6.

3. Entwicklung nach Kugelfunktionen. Das Poissonsche Integral führt auf eine wichtige Darstellung der harmonischen Funktionen, die in naher Beziehung zu der in VIII, § 2, 2 formal hergeleiteten Laplaceschen Reihe steht.

Aus der Formel (6) in VIII, § 2, wo T durch die dortige Formel (4) definiert ist, und ihrer Ableitung nach r erhält man, wenn man r' durch R ersetzt:

$$\frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2rR\cos\gamma + r^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\frac{r^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma),$$

worin $P_n(\cos\gamma)$ die in VIII, § 2, 1 definierte Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung [$P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom] bezeichnet.

Setzt man die letzte Entwicklung in (3′) ein, so ergibt sich, daß man jede im Innern einer Kugel K vom Radius R harmonische, auf der Kugeloberfläche K selbst stetige Funktion $u(r, \vartheta, \varphi)$ nach Kugelfunktionen entwickeln kann. Es ist nämlich

$$(4)\quad \begin{cases} u(r,\vartheta,\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n+1}{4\pi}\dfrac{r^n}{R^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta',\varphi')\, P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' \\ (\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi');\ r < R). \end{cases}$$

Diese Reihe, welche für $r = R$ formal in die Laplacesche übergeht. ist konvergent für $r < R$. Das n-te Glied $\frac{r^n}{R^n} Y_n(\vartheta, \varphi)$ ist eine Kugelfunktion n-ter Ordnung. [Vgl. VIII, § 2, (9).]

---

[1] Bezüglich des Grenzwertes des Poissonschen Integrals bei nicht radialer Annäherung an die Kugeloberfläche vgl. man G. Julia, Bull. sc. math. **42** (1918), S. 214—220, S. 224—231.

Liegt eine beliebige Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung $Y_n(\vartheta, \varphi)$ vor, so kann man die harmonische Funktion $u(r, \vartheta, \varphi) = r^n Y_n(\vartheta, \varphi)$, deren Werte auf der Kugeloberfläche $r = R = 1$ mit $f(\vartheta, \varphi) = Y_n(\vartheta, \varphi)$ übereinstimmen, wie oben nach Potenzen von r entwickeln. Durch Vergleichung der Koeffizienten ergibt sich:

$$(5) \qquad Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi',$$

eine Formel, die deutlich zeigt, daß die durch die Formel (9) in VIII, § 2 definierten Kugelfunktionen die allgemeinsten Kugelfunktionen n-ter Ordnung sind. Hieraus folgt auch ein neuer Beweis der Laplaceschen Formel (49) in VIII, § 2.

Ersetzt man in der Gl. (4) $P_n(\cos\gamma)$ durch die Summe in Gl. (44) von VIII, § 2, so folgt der wichtige Satz:

Jede im Innern einer Kugel K vom Radius R reguläre harmonische, auf K selbst stetige Funktion $u(r, \vartheta, \varphi)$ läßt sich im Innern von K, d.h. für $r < R$, folgendermaßen entwickeln

$$(6) \quad u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(a_n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{\nu=1}^{n} (a_n^{(\nu)} \cos\nu\varphi + b_n^{(\nu)} \sin\nu\varphi) P_n^{\nu}(\cos\vartheta)\Big):$$

Die Koeffizienten a_n, $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$ ergeben sich vermöge der Integralformeln:

$$(7) \quad \left.\begin{matrix} a_n^{(\nu)} \\ b_n^{(\nu)} \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1}{2\pi R^n} \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n^{\nu}(\cos\vartheta') \begin{matrix} \cos\nu\varphi' \\ \sin\nu\varphi' \end{matrix} \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad a_n = \tfrac{1}{2} a_n^{(0)}; \quad f(\vartheta, \varphi) = u(R, \vartheta, \varphi)).$$

4. Andere Darstellungen harmonischer Funktionen. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten, r, ϑ, φ die räumlichen Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes. Aus den Formeln (47) und (48) von VIII, § 2 erhalten wir

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos\vartheta + i \sin\vartheta \cos(\varphi - t))^n \begin{matrix} \cos\nu t \\ \sin\nu t \end{matrix} dt = i^{\nu} \dfrac{n!}{(n+\nu)!} P_n^{\nu}(\cos\vartheta) \begin{matrix} \cos\nu\varphi \\ \sin\nu\varphi \end{matrix} \\ \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die ebenda in 6 bewiesene Darstellung einer beliebigen Kugelflächenfunktion durch die zugeordneten Funktionen

folgt hieraus, daß man eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung stets in der Form

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - t))^n g_n(t)\,dt$$

schreiben kann, wobei $g_n(t)$ ein trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung bezeichnet. Hieraus folgt für eine Kugelfunktion n-ter Ordnung ($n \geqq 0$) die Darstellung

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z + i x\cos t + i y\sin t)^n g_n(t)\,dt.$$

Durchläuft hier $g_n(t)$ sämtliche trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung, so erhält man die Gesamtheit der Kugelfunktionen n-ter Ordnung.

Daraus ergibt sich der folgende allgemeine Satz: Jede in einer Umgebung des Koordinatenanfangspunktes reguläre harmonische Funktion u kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$(10)\qquad \begin{cases} u = \displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(z + i x\cos t + i y\sin t)^n g_n(t)\Big)\,dt \\ \quad = \displaystyle\int_0^{2\pi} F(z + i x\cos t + i y\sin t, t)\,dt, \end{cases}$$

wo $F(v,t)$ eine für genügend kleine Werte von $|v|$ und für alle Werte von t definierte, in t nach 2π periodische analytische Funktion bezeichnet. Umgekehrt liefert das letzte Integral, wie man sofort sieht, eine reguläre harmonische Funktion u, wenn F so gewählt wird, daß zweimalige Differentiation nach allen Variablen x, y, z unter dem Integralzeichen erlaubt ist[1]).

Durch Spezialisierung von F erhält man z. B., daß

$$(11)\qquad \int_0^{2\pi} e^{\alpha(z + i x\cos t + i y\sin t)}\cos\nu t\,dt$$

(α eine beliebige Konstante, ν ganz) eine reguläre harmonische Funktion ist. Dies kann natürlich auch direkt gezeigt werden. Führt man hier zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten ein: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so kann man (11) in der Form schreiben:

$$e^{\alpha z}\int_0^{2\pi} e^{i\alpha r\cos(t-\varphi)}\cos\nu t\,dt = e^{\alpha z}\cos\nu\varphi\int_0^{2\pi} e^{i\alpha r\cos t}\cos\nu t\,dt.$$

---

[1]) Vgl. E. T. Whittaker, Math. Ann. **57**, S. 333 (1902).

Benutzt man die Gl. (13') von VIII, § 3, so erhält man hieraus den oft gebrauchten Satz: Es sei α eine beliebige Konstante, ν ganz, und J_ν die ν-te Besselsche Funktion. Dann ist

(12) $$e^{\alpha z} \cos \nu \varphi \, J_\nu(\alpha r)$$

eine reguläre harmonische Funktion von x, y, z, wenn r, φ, z die Zylinderkoordinaten des Punktes bezeichnen, dessen kartesische Koordinaten x, y, z sind.

5. Andere Darstellungen der Kugelfunktionen. Die Formel (8) von **4** läßt sich (nach Multiplikation mit r^n) auch folgendermaßen interpretieren. Die Funktion $(z + i x \cos t + i y \sin t)^n$ stellt ein trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung von t dar, dessen $2n + 1$ Koeffizienten Kugelfunktionen n-ter Ordnung sind; ihre lineare Kombination mit beliebigen konstanten Koeffizienten liefert die Gesamtheit aller Kugelfunktionen n-ter Ordnung.

Ein solches System von $2n + 1$ Funktionen (Basis) läßt sich natürlich auf unendlich viele Arten angeben. Man erhält ein besonders einfaches, wenn man in der genannten Formel die aus der Integralrechnung bekannte Substitution $\operatorname{tg} t/2 = \alpha$ anwendet. Nach I, § 2, **3** g) ergibt sich dann nach Multiplikation mit $(1 + \alpha^2)^n$ die ganze rationale Funktion $2n$-ten Grades von α:

(13) $$((z - i x)\alpha^2 + 2 i y \alpha + z + i x)^n.$$

Ihre Koeffizienten sind linear ausdrückbar durch die des obigen trigonometrischen Polynoms, sind also Kugelfunktionen n-ter Ordnung, wie man dies übrigens auch direkt bestätigt. Umgekehrt können aber, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms durch die von (13) linear mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden. Sie liefern also eine Basis für die Kugelfunktionen n-ter Ordnung [1]).

Eine andere wichtige Darstellung der Kugelfunktionen rührt von Maxwell her. Sie geht von der Bemerkung aus, daß die Funktion

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{r},$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist und a, b, c Konstanten sind, harmonisch ist [2]). Der Klammerausdruck ist hier als eine „lineare Differential-

[1]) Weitergehendes vgl. bei E. Waelsch, Monatshefte für Math. u. Phys. **20** (1909), S. 289—320.

[2]) Sind a, b, c reell und wird der Einfachheit halber $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ angenommen, so hat dieser Ausdruck eine einfache hydrodynamische Bedeutung: Er stellt das Geschwindigkeitspotential im Punkte (x, y, z) dar, das von einer im Nullpunkt angebrachten Doppelquelle herrührt, deren Achse die Richtungskosinus a, b, c hat und deren Ergiebigkeit 4π beträgt.

operation“ aufzufassen. Die sukzessive Anwendung von n solchen Operationen

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z}, \ldots, a_n \frac{\partial}{\partial x} + b_n \frac{\partial}{\partial y} + c_n \frac{\partial}{\partial z}$$

führt nun, wie eine leichte Rechnung zeigt, auf einen Ausdruck von der Form

$$U_n(x, y, z)\, r^{-2n-1},$$

wobei U_n ein homogenes Polynom n-ten Grades ist, das der Gleichung $\Delta U_n = 0$ genügt. Der Satz von Maxwell besagt, daß U_n das allgemeinste derartige Polynom ist[1]).

6. Elliptische Koordinaten. Lamésche Funktionen. a) Es seien a, b, c drei positive Zahlen, $a > b > c$. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho} + \frac{y^2}{b^2+\varrho} + \frac{z^2}{c^2+\varrho} - 1 = 0 \tag{14}$$

stellt eine Fläche zweiter Ordnung dar; sie ist ein

Ellipsoid für	$-c^2 < \varrho$,
einschaliges Hyperboloid für	$-b^2 < \varrho < -c^2$,
zweischaliges Hyperboloid für	$-a^2 < \varrho < -b^2$.

Diese Flächen haben für alle Werte von ϱ die gleichen Brennpunkte: (14) stellt eine homofokale Schar von Flächen zweiter Ordnung dar.

Bedeuten x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P, so hat die obige Gleichung genau drei reelle Wurzeln λ, μ, ν, welche den Ungleichungen

$$-a^2 \leqq \nu \leqq -b^2 \leqq \mu \leqq -c^2 \leqq \lambda$$

genügen. Man nennt die Zahlen λ, μ, ν die elliptischen Koordinaten von P. Die entsprechenden Flächen zweiter Ordnung $\lambda =$ konst., $\mu =$ konst., $\nu =$ konst. gehen durch den Punkt P und stehen aufeinander orthogonal.

Man erkennt leicht die Richtigkeit der Identität

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho} + \frac{y^2}{b^2+\varrho} + \frac{z^2}{c^2+\varrho} - 1 = -\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(a^2+\varrho)(b^2+\varrho)(c^2+\varrho)} = -\frac{(\varrho-\lambda)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{f(\varrho)}. \tag{15}$$

---

[1]) Bezüglich Literatur und Beweis dieses Satzes vgl. Hilbert-Courant, Methoden der mathematischen Physik, Berlin (J. Springer), 1924, S. 423.

Multipliziert man hier mit $a^2 + \varrho$ und setzt nachher $\varrho = -a^2$, so folgt

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Entsprechend

$$y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Wir wollen den Laplaceschen Differentialausdruck Δu in elliptischen Koordinaten berechnen. Nach II, § 3, 4 ermittelt man zu diesem Zwecke zuerst die Größen h_1, h_2, h_3, am besten aus der dort mit (38) bezeichneten Formel. Man erhält nach einer leichten Rechnung

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{x}{a^2+\lambda}; \quad \text{ähnlich} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{y}{b^2+\lambda}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\frac{z}{c^2+\lambda}.$$

Es ist daher

$$\frac{1}{h_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)$$

Der letzte Ausdruck ist gleich

$$\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)},$$

wie man aus der Identität (15) durch Differenzieren nach ϱ für $\varrho = \lambda$ erhält. D. h.

$$h_1^2 = \frac{4 f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}.$$

Wegen II, § 3, (42) erhalten wir also nach einer leichten Rechnung

$$\frac{1}{4}\Delta u = \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right) + \frac{\sqrt{f(\mu)}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial u}{\partial \mu}\right) + \frac{\sqrt{f(\nu)}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right). \tag{16}$$

b) Setzt man

$$t_1 = \int^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad t_2 = \int^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, \quad t_3 = \int^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}, \tag{17}$$

wobei die unteren Integrationsgrenzen beliebig gewählt sind, so werden λ, μ, ν elliptische Funktionen von t_1, t_2, t_3 (III, § 5). Der Laplacesche Differentialausdruck (16) gestaltet sich zu

$$\tag{16'} \frac{1}{4}\Delta u = \frac{1}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)} \left((\nu-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + (\lambda-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + (\mu-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}\right).$$

Wir suchen nun harmonische Funktionen u von der Form $U(t_1)V(t_2)W(t_3)$. Setzt man dies in (16′) ein, so nimmt die Gleichung $\Delta u = 0$ die folgende Form an:

$$\tag{18} \frac{\nu-\mu}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} + \frac{\lambda-\nu}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial t_2^2} + \frac{\mu-\lambda}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial t_3^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$(\nu-\mu)\varphi(\lambda) + (\lambda-\nu)\varphi(\mu) + (\mu-\lambda)\varphi(\nu) = 0,$$

so daß $\varphi(x)$ eine lineare Funktion $-gx-h$ sein muß. D. h. aber

$$\tag{19} \frac{d^2 U}{dt_1^2} + (g\lambda+h)U = 0, \quad \frac{d^2 V}{dt_2^2} + (g\mu+h)V = 0.$$
$$\frac{d^2 W}{dt_3^2} + (g\nu+h)W = 0.$$

Man nennt die Gleichung

$$\tag{20} \frac{d^2 U}{dt^2} + (g\lambda+h)U = 0,$$

wobei zwischen λ und t die Beziehung

$$\tag{21} \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = f(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

besteht, die Lamésche Differentialgleichung. Führt man λ statt t als unabhängige Variable ein, so erhält sie die Gestalt

$$\tag{20'} \frac{d^2 U}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{dU}{d\lambda} + \frac{g\lambda+h}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}U = 0.$$

Man stellt jetzt die Aufgabe, die beiden Konstanten g und h so zu bestimmen, daß diese Gleichung Lösungen von einem der folgenden vier Typen hat:

I: $P(\lambda)$;

II: $\sqrt{a^2+\lambda}\,P(\lambda)$, $\sqrt{b^2+\lambda}\,P(\lambda)$, $\sqrt{c^2+\lambda}\,P(\lambda)$;

III: $\sqrt{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,P(\lambda)$, $\sqrt{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}\,P(\lambda)$, $\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\,P(\lambda)$;

IV: $\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,P(\lambda)$,

wobei $P(\lambda)$ ein Polynom in λ ist. Man nennt diese Funktionen die Laméschen Funktionen. Es sei p der Grad von $P(\lambda)$ in λ. Unter dem Grad n der Laméschen Funktion wird $2p$, $2p+1$, $2p+2$, $2p+3$ verstanden, je nachdem der Typus I, II, III bzw. IV vorliegt. Es gibt $2n+1$ Lamésche Funktionen n-ten Grades; und zwar ist dabei

$$g = -\frac{n(n+1)}{4}$$

zu setzen und für h ergeben sich $2n+1$ voneinander verschiedene Werte. Ist n gerade, so gibt es $\frac{n}{2}+1$ Funktionen vom Typus I und $\frac{n}{2}$ Funktionen von jedem einzelnen Typus III, im ganzen also $\frac{n}{2}+1+3\frac{n}{2} = 2n+1$ Funktionen. Ist n ungerade, so gibt es $\frac{n+1}{2}$ Funktionen von jedem einzelnen Typus II und $\frac{n-1}{2}$ Funktionen vom Typus IV, im ganzen wieder $3\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2} = 2n+1$ Funktionen.

Setzt man

$$\lambda = 4\wp - \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

so erhält (21) die Form

$$\left(\frac{d\wp(t)}{dt}\right)^2 = 4[\wp(t)]^3 - g_2\wp(t) - g_3, \tag{21'}$$

so daß $\wp(t)$ mit der in III, § 5, **6** definierten Weierstrassschen $\wp$-Funktion übereinstimmt. Die Lamésche Differentialgleichung lautet alsdann

$$\frac{d^2U}{dt^2} - (n(n+1)\wp(t)+h)U = 0. \tag{20''}$$

Die aus den Laméschen Funktionen $U(t)$ gebildeten Produkte $U(t_1)U(t_2)U(t_3)$ spielen eine ähnliche Rolle wie die Kugelfunktionen. Eine in elliptischen Koordinaten gegebene harmonische Funktion kann nach diesen Funktionen entwickelt werden[1]).

7. Elliptische Ringkoordinaten. Mathieusche Funktionen. Es sei c eine positive Zahl. Die Gesamtheit der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $(-c, 0)$, $(c, 0)$ (vgl. III, § 2, **4**)

[1]) Bezüglich einer zusammenfassenden Darstellung vgl. das auf S. 428 zitierte Werk von Whittaker und Watson, Kapitel XXIII.

definiert ein ebenes krummliniges Koordinatensystem (ξ, η), das mit den rechtwinkligen Koordinaten (x, y) durch die Gleichungen

$$(22)\qquad \begin{cases} x = c \operatorname{Cof} \xi \cos \eta, \\ y = c \operatorname{Sin} \xi \sin \eta \end{cases}$$

verbunden ist (III, § 2, **6**). Hierbei gilt $\xi \geqq 0$, $-\pi < \eta \leqq \pi$. Man nennt (ξ, η) die ebenen elliptischen Koordinaten. Wir fügen zu den beiden Gleichungen (22) noch die dritte

$$(22')\qquad z = \zeta$$

hinzu und nennen (ξ, η, ζ) die elliptischen Ringkoordinaten.

Man kann den Differentialausdruck Δu in elliptischen Ringkoordinaten nach der Methode von II, § 3, **4** ausdrücken. Es ist mit den dortigen Bezeichnungen, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} = c\sqrt{\operatorname{Cof}^2 \xi - \cos^2 \eta}, \quad \frac{1}{h_3} = 1.$$

Man hat also nach Formel (42) in II, § 3

$$(23)\qquad \Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\operatorname{Cof}^2 \xi - \cos^2 \eta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Geht man in die auf diese Weise transformierte Gleichung $\Delta u = 0$ mit dem Ansatz

$$(24)\qquad u = F(\xi)\, G(\eta)\, H(\zeta)$$

ein, so folgt

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \xi - \cos^2 \eta} \left(\frac{F''(\xi)}{F(\xi)} + \frac{G''(\eta)}{G(\eta)} \right) + \frac{H''(\zeta)}{H(\zeta)} = 0.$$

Es muß also zunächst

$$\frac{H''(\zeta)}{H(\zeta)} = \alpha, \quad H(\zeta) = e^{\pm\sqrt{\alpha}\,\zeta}$$

sein; α bedeutet eine Konstante[1]). Man hat daher

$$\frac{F''(\xi)}{F(\xi)} + \alpha c^2 \operatorname{Cos}^2 \xi + \frac{G''(\eta)}{G(\eta)} - \alpha c^2 \cos^2 \eta = 0,$$

so daß

$$(25')\qquad F''(\xi) + (\alpha c^2 \operatorname{Cos}^2 \xi - \beta) F(\xi) = 0,$$

$$(25'')\qquad G''(\eta) - (\alpha c^2 \cos^2 \eta - \beta)\, G(\eta) = 0$$

sein muß. Hierbei ist β eine Konstante.

---

[1]) Für $\alpha = 0$ sind diese beiden Lösungen durch 1 und ζ zu ersetzen.

Beide Differentialgleichungen (25') und (25'') können nach einer einfachen Transformation auf die Form

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + (\lambda + q \cos 2t) u = 0 \tag{26}$$

gebracht werden. Hier ist q eine gegebene Konstante. Diese Differentialgleichung hat im Endlichen gar keine singulären Punkte. Ihre Lösungen sind daher ganze Funktionen von t. Wegen der geometrischen Bedeutung von t fragt man nun nach solchen Werten des Parameters λ, für welche diese Gleichung periodische Lösungen hat, und zwar mit der Periode 2π. Es kann z. B. mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen gezeigt werden, daß eine abzählbar unendliche Folge von derartigen λ-Werten existiert. Die zugehörigen periodischen Lösungen, wenn sie noch gerade oder ungerade Funktionen sind, nennt man die Mathieuschen Funktionen[1]). Sie hängen außer von t noch von q ab und reduzieren sich für $q \to 0$ auf die trigonometrischen Funktionen $\cos nt$, $\sin nt$. Sie erfüllen als Eigenfunktionen ähnliche Orthogonalitätsgleichungen wie die trigonometrischen Funktionen und eignen sich zur Entwicklung einer willkürlichen Funktion. Es sind ferner auch die nicht periodischen Lösungen von Interesse.

Die Differentialgleichung (26) bildet bloß einen Spezialfall der in der Hillschen Mondtheorie vorkommenden Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + \varphi(t) u = 0, \tag{26'}$$

wo $\varphi(t)$ eine gerade periodische Funktion mit der Periode π bezeichnet[2]).

8. Die zweite Randwertaufgabe. Um die charakteristische Funktion $H(p; q) = H(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi')$ des Kugelinnern vom Radius R und mit dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt zu ermitteln, setzen wir diese in der Form an:

$$\begin{aligned} H(p; q) &= \frac{1}{(pq)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n r'^n P_n(\cos\gamma) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n r'^n P_n(\cos\gamma), \end{aligned}$$

---

[1]) Ist $u(t)$ eine Lösung von (26), so ist auch $u(-t)$ eine solche, also auch

$$\frac{u(t) + u(-t)}{2}, \quad \frac{u(t) - u(-t)}{2}.$$

Die beiden letzten Funktionen sind gerade bzw. ungerade.

[2]) Bezüglich einer zusammenfassenden Darstellung vgl. das auf S. 428 zitierte Werk von Whittaker und Watson, Kapitel XIX.

wo die Konstanten a_n von p und q unabhängig sind. Hierbei sei r fest, $r < R$, r' veränderlich; wir versuchen die a_n so zu bestimmen, daß die obige Reihe, auch nach Differentiation nach r', für $r' \leqq R$ konvergiert, daß ferner

$$\left(\frac{\partial H}{\partial r'}\right)_{r'=R} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{R^{n+2}}P_n(\cos\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n r^n R^{n-1} P_n(\cos\gamma) = -c$$

wird. Nach § 1, (12) ist $c = \frac{1}{R^2}$ zu setzen. Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn sie für alle $r < R$ erfüllt wird:

$$a_n = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{R^{2n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned}H(p;q) = {} & \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\gamma}} + \frac{R}{\sqrt{R^4 + r^2 r'^2 - 2R^2 r r'\cos\gamma}} - \frac{1}{R} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{r^n r'^n}{R^{2n+1}}\,P_n(\cos\gamma).\end{aligned} \tag{27}$$

Die letzte Reihe läßt sich in geschlossener Form darstellen. Man erhält ihren Wert aus der Definitionsgleichung der Legendreschen Polynome durch Integration. Also

$$\begin{aligned}H(p;q) = {} & \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\gamma}} + \frac{R}{\sqrt{R^4 + r'^2 r^2 - 2R^2 r' r\cos\gamma}} \\ & - \frac{1}{R}\log\left(R^2 - r'r\cos\gamma + \sqrt{R^4 + r'^2 r^2 - 2R^2 r' r\cos\gamma}\right) \\ & - \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\log(2R^2).\end{aligned} \tag{27'}$$

9. Die Randwertaufgaben für das Äußere einer Kugel. Ähnliche Betrachtungen wie in **3** gelten für das Äußere einer Kugel. Man beweist z. B. den Satz: Jede außerhalb einer Kugel K vom Radius R reguläre harmonische, auf der Kugeloberfläche K selbst stetige Funktion $\bar{u}(r, \vartheta, \varphi)$ läßt sich nach Kugelfunktionen entwickeln. Es ist

$$\left\{\begin{aligned}&\bar{u}(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta',\varphi')\,P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi' \\ &\left(\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi');\ r > R\right)\text{[1]}.\end{aligned}\right. \tag{28}$$

[1]) Diese Formel gilt offenbar auch dann, wenn die Gesamtmasse von $\bar{u}$ nicht 0 ist (vgl. § 1, **1**).

Diese Reihe leitet man ähnlich wie in **3** aus dem Poissonschen Integral (3') ab, das jedoch jetzt mit -1 zu multiplizieren ist, da in diesem Falle die positive Normalenrichtung mit jener der wachsenden r' übereinstimmt. Unter $f(\vartheta, \varphi)$ ist die Randfunktion $\bar{u}(R, \vartheta, \varphi)$ zu verstehen. Die Reihe konvergiert für $r > R$ und geht für $r = R$ formal in die Laplacesche Reihe über, ebenso wie (4). Das n-te Glied von (28) ist eine Kugelfunktion n-ter Ordnung. Hieraus ergeben sich auch die weiteren, zu denen von **4** analogen Entwicklungen.

10. Der Harnacksche Satz. Von den zahlreichen Anwendungen des Poissonschen Integrals, die größtenteils denen der ebenen Potentialtheorie ähnlich sind, sei der Harnacksche Satz hervorgehoben:

Die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ seien im Innern einer Kugel K regulär harmonisch, auf K selbst stetig, es sei ferner

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots$$

Konvergiert diese Folge in einem einzigen Punkt im Innern von K, so konvergiert sie überall im Innern von K, und zwar gleichmäßig in jeder kleineren Kugel; sie stellt dort eine reguläre harmonische Funktion dar. Bezüglich des Beweises verweisen wir auf die analogen Betrachtungen in XVI, § 1, **5**.

11. Approximation harmonischer Funktionen durch harmonische Polynome. Eine weitere Anwendung des Poissonschen Integrals ist der folgende Satz: Es sei u eine innerhalb der Fläche S mit Einschluß des Randes reguläre harmonische Funktion. Sie kann in S gleichmäßig und mit beliebiger Genauigkeit durch harmonische Polynome approximiert werden.

Dieser Satz erinnert an die in IV, § 6 behandelten Weierstrassschen Sätze über die Approximation stetiger Funktionen durch Polynome. Man kann ihn analog wie dort auch in der folgenden Form aussprechen: Jede innerhalb einer Fläche reguläre harmonische Funktion läßt sich durch eine gleichmäßig konvergente Reihe von harmonischen Polynomen darstellen.

Der entsprechende Satz für zweidimensionale harmonische Funktionen ist bekannt und bildet eine Folge eines wichtigen Satzes von Runge[1]) über die Approximation regulärer analytischer Funktionen durch Polynome. Ein ähnlicher Gedankengang wie der Rungesche führt nun auch im Falle von räumlichen harmonischen Funktionen (obzwar hier die Beziehung zur Funktionentheorie fehlt) zum Ziele.

---

[1]) Vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, dritte Auflage (Leipzig, Teubner, 1930), S. 298.

Ist die Funktion u innerhalb der Fläche S mit Einschluß des Randes regulär-harmonisch, so gilt das gleiche für eine S ganz im Innern enthaltende benachbarte Fläche S'. Wendet man auf diese letztere die Formel § 1, (3) an und ersetzt darin das Flächenintegral durch Näherungssummen, so folgt unmittelbar, daß u sich innerhalb von S gleichmäßig durch endliche lineare Aggregate von Funktionen der beiden Typen

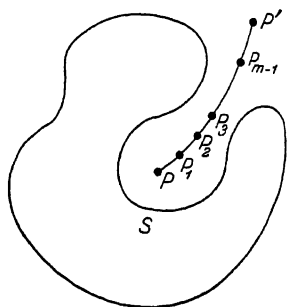
$$\frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial l} \tag{29}$$

approximieren läßt. Hier bedeutet r den Abstand eines innerhalb S variierenden Punktes von einem festen Punkte P außerhalb von S und l eine feste Richtung. Beide Funktionen (29) sind von derselben Art wie u; es genügt also, den Approximationssatz für diese speziellen Funktionen nachzuweisen.

Ist die Fläche S konvex, so ist die Behauptung durch diese Bemerkung bereits bewiesen. In der Tat läßt sich dann eine S enthaltende Kugel K angeben, die P außerhalb läßt. Nach dem in § 2, 3 bewiesenen Satze kann aber die in K reguläre harmonische Funktion $\frac{1}{r}$ in eine nach harmonischen Polynomen fortschreitende Reihe entwickelt werden, die in jedem im Innern von K gelegenen Bereiche (also auch in S) gleichmäßig konvergiert. Diese Reihe kann übrigens, wie man mittels des Poissonschen Integrals leicht erkennt, in jedem solchen Bereiche beliebig oft differenziert werden, wodurch auch die Entwickelbarkeit der zweiten Funktion in (29) sichergestellt ist. Die gleiche Schlußweise läßt sich überhaupt anwenden, wenn man den Punkt P und die Fläche S mittels einer Kugel voneinander trennen kann[1]), insbesondere wenn P genügend weit von S entfernt liegt.

Fig. 73

Es liege nun P beliebig außerhalb von S. Wir zeichnen eine ganz außerhalb von S verlaufende Kurve, die von P ausgehend zu einem Punkte P' führt, den man mittels einer Kugel von S trennen kann (Fig. 73). Wir markieren auf dieser Kurve die Punkte

$$P, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m = P'$$

[1]) Dies bedeutet, daß P außerhalb der konvexen Hülle von S liegt.

derart, daß der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Punkten kleiner sei als der Minimalabstand der Kurve von der Fläche S. Wir bezeichnen den Abstand eines innerhalb S variablen Punktes von P_ν mit r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$.

Man kann um P_1 als Mittelpunkt eine Kugel angeben, die P im Innern enthält, aber ganz außerhalb von S liegt. Die Funktion $\frac{1}{r}$ ist regulär-harmonisch außerhalb dieser Kugel und kann dort nach **9** durch endliche lineare Aggregate von Funktionen der Form

$$\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{r_1^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{30}$$

approximiert werden. Hier bedeutet $Y_n(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung. Die Approximation ist eine gleichmäßige in jedem Bereiche, der ganz außerhalb der Kugel liegt, insbesondere also in S. Dasselbe gilt auch für die Ableitungen, also für die zweite Funktion (29). Damit haben wir die Aufgabe auf die Approximation einer Funktion von der Form (30) zurückgeführt.

Wir konstruieren jetzt um P_2 eine P_1 enthaltende und ganz außerhalb von S gelegene Kugel. Die gleiche Überlegung wie oben liefert die Approximation von $\frac{1}{r_1}$ durch lineare Aggregate von Funktionen der Form

$$\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{r_2^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Dasselbe gilt aber auch für die Ableitungen von $\frac{1}{r_1}$, also wegen der Maxwellschen Darstellung der Kugelfunktionen (5) für irgendeine Funktion der Form (30). Damit ist die Approximationsaufgabe auf die Funktionen (31) zurückgeführt.

So weiterfahrend gelangen wir schließlich zu der Funktion $\frac{1}{r_m}$ bzw. zu den entsprechenden Kugelfunktionen $\frac{Y_n(\theta, \varphi)}{r_m^{n+1}}$, deren Approximation nach der obigen Bemerkung ohne weiteres möglich ist.

Damit ist die Behauptung bewiesen[1]).

---

[1]) Während der Drucklegung der vorliegenden zweiten Auflage erschien eine Arbeit des Herrn J. L. Walsh [Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1929), S. 499—544, vgl. insbes. S. 535—541], in welcher der gleiche Satz bewiesen wird. Auch der Beweis stimmt im wesentlichen mit dem des Textes überein.

§ 3. Beispiele

1. Die erste Randwertaufgabe für das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kugeln. Die Sätze in **3** des vorigen Paragraphen gestatten, die erste Randwertaufgabe in dem Falle zu lösen, wenn das Gebiet von zwei konzentrischen Kugeln K_1, K_2 begrenzt wird. Es sei O der gemeinsame Mittelpunkt der Kugeln K_1 und K_2, R_1 und R_2 ihre Radien, $R_1 < R_2$. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf den Fall, daß die beiden Randfunktionen $f^{(1)}(\vartheta, \varphi)$ und $f^{(2)}(\vartheta, \varphi)$ sich in gleichmäßig konvergente Laplacesche Reihen entwickeln lassen:

$$f^{(1)}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(1)}(\vartheta, \varphi), \quad f^{(2)}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(2)}(\vartheta, \varphi)\,[1].$$

Dann ist, wie wir zeigen werden, die gesuchte harmonische Funktion u in der folgenden Form darstellbar:

$$\begin{aligned} u = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} \frac{R_2^{2n+1} - r^{2n+1}}{R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}} Y_n^{(1)}(\vartheta, \varphi) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_2}{r}\right)^{n+1} \frac{r^{2n+1} - R_1^{2n+1}}{R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}} Y_n^{(2)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Reihen konvergieren nämlich für $R_1 \leqq r \leqq R_2$, und zwar gleichmäßig in ϑ und φ. Sie stellen für $R_1 < r < R_2$ eine harmonische Funktion dar. Endlich geht u für $r \to R_1$ bzw. $r \to R_2$ in die Laplacesche Reihe von $f^{(1)}(\vartheta, \varphi)$ bzw. $f^{(2)}(\vartheta, \varphi)$ über. Man betrachte nämlich z. B. die erste Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n+1}} Y_n^{(1)}(\vartheta, \varphi).$$

Konvergiert r gegen R_2, so wird das n-te Glied kleiner als $A\alpha^n$, wobei A und α positiv, von n und r frei sind und $\alpha < 1$ ist. Wird also N genügend groß gewählt, so kann die von $n = N$ bis $n = \infty$ erstreckte Summe gleichmäßig in r beliebig klein gemacht werden. In der Summe von 0 bis N kann man aber r gegen R_2 konvergieren lassen, wodurch sämtliche Glieder in 0 übergehen. Konvergiert andererseits r gegen R_1, so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} Y_n^{(1)}(\vartheta, \varphi)$$

---

[1]) Das Resultat bleibt jedoch für beliebige stetige Randwerte gültig.

gegen $f^{(1)}(\vartheta, \varphi)$, wie der Abelsche Satz (vgl. S. 203) lehrt. Hieraus folgt aber die Behauptung, daß die Differenz zwischen den im n-ten Gliede der beiden Reihen auftretenden Faktoren von $(R_1/r)^{n+1} Y_n^{(1)}$, nämlich

$$1 - \frac{1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n+1}},$$

kleiner ist als das n-te Glied einer (von r unabhängigen) konvergenten geometrischen Reihe.

2. Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit. Bewegt sich eine Kugel in vorgeschriebener Weise in einer unbegrenzten, idealen Flüssigkeit, deren Bewegung selbst als wirbelfrei angenommen wird, so ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit in jedem Punkte der Kugeloberfläche bekannt. Das Geschwindigkeitspotential u wird dann durch folgende Bedingungen bestimmt:

1. u ist eine außerhalb der Kugel mit Einschluß des unendlich fernen Punktes (vgl. § 1, **3**) reguläre Potentialfunktion.

2. Auf der Oberfläche der Kugel ist $\frac{\partial u}{\partial r}$ vorgeschrieben.

Man kann nun u entweder auf Grund der Formel § 1, (13) mit Benutzung des in § 3, 8 berechneten Ausdrucks der charakteristischen Funktion gewinnen, oder aber direkt, indem man die gegebenen Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial r}$ in eine Laplacesche Reihe entwickelt. Fällt der Mittelpunkt der Kugel mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen und ist ihr Radius gleich R, so setze man also

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

(Das Glied $n = 0$ ist wegen § 1, (2) weggelassen worden.)

Man schließt daraus für $r > R$ (bis auf eine additive Konstante):

$$u = -R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Der einfachste Spezialfall dieser Formel rührt von Stokes her[1]). Dies ist der Fall einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit, in der

---

[1]) George Gabriel Stokes, Math. and Phys. Papers 1, Cambridge (University Press), 1880, S. 17.

sich eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt. Wenn die Bewegung in der Richtung senkrecht zum Äquator stattfindet, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} = -c \cos \vartheta.$$

Nach dem Vorhergehenden ergibt sich also

$$u = \frac{c}{2} \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta.$$

Man sieht, daß u gleich dem Geschwindigkeitspotential einer im Mittelpunkt der Kugel angebrachten Doppelquelle ist (vgl. § 2, 5), deren Achse mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt und deren Ergiebigkeit durch die Geschwindigkeit c und durch den Kugelradius R bebestimmt ist.

3. Lösung für eine kreisförmige Platte. Es seien jetzt statt auf der Oberfläche einer Kugel die Werte des Potentials bzw. der Normalableitung in den Punkten einer Kreisscheibe gegeben. Dann kann das Potential aus Funktionen von der Form § 2, (12) zusammengesetzt werden. Die Kreisscheibe liege in der x, y-Ebene, ihr Mittelpunkt falle mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen, ihr Radius sei R.

Sind die Randwerte von u für $z = 0$ unabhängig von φ, d. h. $u(x, y, 0) = f(r), r \leqq R$, so kann $f(r)$ nach IX, § 3, 4 nach Besselschen Funktionen entwickelt werden:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\xi_n \frac{r}{R}\right),$$

wo die ξ_n die wachsend geordneten positiven Nullstellen von $J_0(x)$ bezeichnen. Hieraus schließt man für den oberen Halbraum

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\xi_n z} J_0\left(\xi_n \frac{r}{R}\right).$$

Die Koeffizienten a_n ergeben sich nach der Integralformel in IX, § 3, (25). Ähnlich löst man die zweite Randwertaufgabe, wo also $-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = f(r)$ vorgeschrieben ist. Das allgemeine Glied der letzten Entwicklung wird dann durch ξ_n dividiert. Etwas komplizierter gestaltet sich die Lösung, wenn die Randfunktion nicht „kreissymmetrisch" ist. Auf Konvergenzfragen soll hier nicht eingegangen werden.

§ 4. Bemerkungen zur ersten Randwertaufgabe

1. Vorbemerkungen. Noch vor der Entstehung der Theorie der Integralgleichungen ist eine Anzahl von direkten Methoden zur Lösung der ersten Randwertaufgabe entwickelt worden, die ihr Interesse auch später behalten haben, teilweise wegen ihrer Beziehung zu anderen wichtigen Gebieten (wie z. B. der Variationsrechnung), teils weil sie in vielen Fällen weittragender sind als die Integralgleichungsmethode.

Das berühmte Dirichletsche Prinzip, welches von Riemann in seiner Inauguraldissertation niedergelegt wurde, galt lange Zeit als alleiniger Existenzbeweis für die erste Randwertaufgabe. Dieses ging von dem Dirichletschen Integral

$$D(u) = \int_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\,V,$$

erstreckt über ein Volumen T, aus. Das Integral $D(u)$ besitzt, wenn u die Gesamtheit sämtlicher zweimal stetig differenzierbaren Funktionen u durchläuft, die auf der Begrenzung S von T in eine vorgeschriebene stetige Funktion f übergehen, eine untere Grenze D. Wenn D für eine Funktion u_0 der genannten Art erreicht wird, d. h. D das Minimum von $D(u)$ darstellt, so kann man leicht zeigen, daß u_0 harmonisch ist, womit das Dirichletsche Problem gelöst ist. (Vgl. XVI, § 2, **2.**) Es ist aber, wie dies zuerst von Weierstrass bemerkt wurde, a priori keineswegs sicher, ob D wirklich erreicht wird. Es gibt vielmehr sehr einfache derartige oder ähnliche Minimumprobleme, bei welchen dies nicht der Fall ist[1]). Darum kann das Dirichletsche Prinzip in seiner alten Gestalt nicht als beweiskräftig betrachtet werden[2]).

2. Existenzbeweis von Poincaré. Von den zahlreichen Existenzbeweisen, die später angegeben worden sind, möge hier ein einziger wenigstens dem Gedankengang nach skizziert werden. Dies ist die von Poincaré in seiner klassischen Abhandlung über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik [American Journal

---

[1]) Man denke z. B. an die folgende Aufgabe: Zwei Punkte sind durch eine stetige, rektifizierbare Kurve mit stetig variierender Tangente derart zu verbinden, daß dabei eine vorgegebene Gerade, welche nicht durch die beiden Punkte geht, berührt wird und die Länge der Kurve ein Minimum ist.

[2]) Hilbert hat später [Journ. f. Math. **129** (1905), S. 63—67; Math. Ann. **59** (1905), S. 161—186] gezeigt, daß das Dirichletsche Prinzip sich trotzdem zu einem vollständigen Existenzbeweis ausbauen läßt. Die von ihm begründete und von seinen Schülern weitergeführte „Variationsmethode" ist seitdem ein wichtiges Hilfsmittel der Analysis geworden.

12 (1890), S. 211—294, vgl. insbesondere S. 218—237] dargelegte „Ausfegemethode“ (méthode de balayage). Poincaré gewinnt die in T harmonische Funktion, welche auf der Begrenzung S von T gegebene stetige Werte f annimmt, durch Grenzübergang aus einer monotonen Folge von Potentialfunktionen. Um die für diese Funktionen charakteristischen Belegungen zu definieren, erinnern wir an einige Eigenschaften des Newtonschen Potentials, die teils aus XIV, teils aus § 2 bekannt sind oder leicht geschlossen werden können.

Es sei in einem inneren Punkt p einer Kugel K die Masseneinheit angebracht. Wir ersetzen diese durch eine längs der Kugeloberfläche ausgebreitete stetige Belegung von der Gesamtmasse 1, deren Dichte in jedem Punkt der dritten Potenz des Abstandes vom Punkte p umgekehrt proportional ist. Dies entspricht der in dem Poissonschen Integral auftretenden Normalableitung der Greenschen Funktion der Kugel K (vgl. § 2, 2), wenn $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n}$ als Dichtigkeitsfunktion gedeutet wird. Da die Funktion $u(q) = 1/(Aq)$, wo (Aq) die Entfernung des variablen Punktes q von einem festen, außerhalb von K liegenden Punkt A bezeichnet, in den Koordinaten des Punktes q harmonisch ist, lehrt uns das Poissonsche Integral, daß bei der angegebenen Ersetzung des Massenpunktes p durch eine stetige Verteilung auf der Oberfläche von K das Potential in jedem Punkt A außerhalb von K unverändert bleibt. Im Innern von K erfährt es hingegen überall eine Verminderung. In der Tat hat man, wenn jetzt A einen vom Mittelpunkt verschiedenen inneren Punkt, A^* den konjugierten in bezug auf K bezeichnet, $(Aq):(A^*q) = c$, d. h. konstant für sämtliche Punkte q der Kugeloberfläche, und zwar ist diese Konstante größer als $(Ap):(A^*p)$. Aus dem Poissonschen Integral ergibt sich also für das Potential der neuen Massenbelegung im Punkte A:

$$\frac{1}{c}\frac{1}{(A^*p)} < \frac{1}{(Ap)}.$$

Ähnlich kann man eine beliebige endliche oder unendliche Anzahl von Massenpunkten, sogar eine stetige Massenverteilung aus dem Innern einer Kugel K bei Erhaltung der Masse auf die Kugeloberfläche übertragen, wobei das Potential außerhalb von K unverändert bleibt, während es im Innern von K vermindert wird. Poincaré nennt diesen Vorgang das „Ausfegen“ („balayage“) des Kugelinnern K.

Weiter erinnern wir an die bekannte Eigenschaft des Potentials v beliebig verteilter positiver Massen, daß nämlich v in keinem inneren Punkte p der Massenbelegung ein Minimum haben kann, es sei denn, daß es sich auf eine Konstante reduziert. Die Entwicklung von v in

eine Taylorsche Reihe lehrt nämlich, daß der Mittelwert von v über einer genügend kleinen Kugel um p dem Vorzeichen nach mit $-\Delta v = 4\pi\mu > 0$ übereinstimmt [μ die Dichte, vgl. XIV, § 1, (15)], woraus sich das weitere wie in § 1, 5 ergibt. Daraus folgt: Ist h eine harmonische Funktion, welche auf der Begrenzung S von T die gleichen Werte wie v annimmt, dann ist im ganzen Gebiet T

$$v > h. \tag{1}$$

In der Tat ist auf der Begrenzung $v - h = 0$, also muß im Innern $v - h > 0$ gelten.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zur Konstruktion der erwähnten Folge von Potentialfunktionen über. Wir machen hierbei die folgende unwesentliche Einschränkung: Die Randwerte f seien so beschaffen, daß eine im ganzen Raume zweimal stetig differenzierbare Funktion φ angegeben werden kann, die auf S die Werte von f annimmt. [Man kann sich sogar, wie man leicht zeigt, auf Randwerte beschränken, die durch Polynome φ gegeben sind [1]).] Wir fassen ferner das ganze Gebiet T samt seiner Begrenzung S in eine Kugel $\mathfrak{K}$ ein (über deren Größe noch später verfügt wird) und definieren im Kugelinnern eine stetige Massenverteilung, deren Dichte ϱ in jedem Punkte durch $\varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi$ gegeben ist. Wir nehmen zunächst der Einfachheit halber an, daß ϱ überall in $\mathfrak{K}$ positiv ist. Wie diese Einschränkung beseitigt werden kann, darauf kommen wir später zurück. Bezeichnet v_0 das Potential der so definierten Belegung, so ist

$$\Delta v_0 = -4\pi\varrho = \Delta\varphi, \text{ d. h. } \Delta(\varphi - v_0) = 0. \tag{2}$$

Die Funktion $\varphi - v_0$ ist somit harmonisch, ihre Werte auf der Fläche S sind $f - v_0$.

Danach setzt das Poincarésche Verfahren folgenderweise ein. Eine elementare Betrachtung lehrt, daß eine abzählbare Menge von Kugeln $K_1, K_2, K_3, \ldots$ existiert, welche alle in T liegen und zusammen das ganze Gebiet T ausschöpfen, d. h. jeder Punkt von T gehört mindestens einer Kugel an. (Es können natürlich verschiedene der Kugeln gemeinsame Punkte haben.) Wir fegen jetzt der Reihe nach

---

[1]) Man kann nämlich φ durch Polynome $f_n = f_n(x, y, z)$ approximieren. Es sei u_n die zu den Randwerten f_n gehörige Lösung der ersten Randwertaufgabe. Dann folgt aus dem in § 1, 5 erwähnten Maximumsatz, daß die u_n in $T + S$ gleichmäßig konvergieren. Mit Hilfe des Poissonschen Integrals schließt man nun, daß die Grenzfunktion harmonisch ist, ferner durch wiederholte Anwendung des genannten Maximumsatzes, daß sie auf S in f übergeht.

sämtliche Kugeln aus, und zwar derart, daß das Verfahren auf jede einzelne Kugel unendlich oft angewandt wird. Etwa so:

$$K_1, K_2;\; K_1, K_2, K_3;\; K_1, K_2, K_3, K_4;\; K_1, \ldots$$

Hierbei wird die Belegung so abgeändert, daß bei Erhaltung der Randwerte auf S die Massen aus dem Innengebiet T der Begrenzung S immer näher gebracht werden. Wir bezeichnen der Reihe nach mit $v_1, v_2, v_3, \ldots$ das Potential der so entstandenen Massenbelegungen. Jede Funktion v_n ist Potential von positiven Massen in $\mathfrak{K}$ und nimmt auf S und außerhalb von S die nämlichen Werte wie v_0 an. Wird ferner beim n-ten Schritte eine Kugel K ausgefegt, so ist $v_n = v_{n-1}$ in allen Punkten von $\mathfrak{K}$ außerhalb oder auf K, hingegen $v_n < v_{n-1}$ im Innern von K. Jedenfalls hat man also $v_n \leqq v_{n-1}$ im ganzen Kugelinnern $\mathfrak{K}$. Andererseits sind nach (1) sämtliche v_n größer als die harmonische Funktion, welche auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ dieselben Werte wie v_n, d. h. wie v_0 annimmt. Die Existenz dieser Funktion folgt aus dem Poissonschen Integral.) Daraus folgt, daß im ganzen Kugelinnern $\mathfrak{K}$, jedenfalls also im Gebiet T und auf der Begrenzung S

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v \tag{3}$$

existiert. Wir wollen nun zweierlei zeigen:

a) v ist harmonisch in T;

b) bei Annäherung an S konvergiert v gegen v_0.

Danach ist $v + (\varphi - v_0)$ eine harmonische Funktion in T, welche auf der Begrenzung in f übergeht, also die gesuchte Lösung der ersten Randwertaufgabe liefert.

Um a) zu zeigen, betrachten wir irgendeinen Punkt von T, der einer gewissen Kugel K angehört. Wird diese beim α_1-ten, α_2-ten, ..., α_ν-ten, ... Schritt ausgefegt, so sind die entsprechenden Potentiale $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_\nu}, \ldots$ harmonisch im Innern von K. Da sie ferner monoton abnehmen, so ist der Harnacksche Satz (§ 2, **10**) anwendbar, woraus alles weitere folgt.

Beim Beweis der Eigenschaft b) müssen über die Begrenzung ewisse Regularitätsvoraussetzungen gemacht werden. Wir wollen annehmen, daß in dem betrachteten Punkt der Begrenzung S eine von außen berührende Kugel k_1 angebracht werden kann, die, abgesehen von diesem Berührungspunkt, ganz außerhalb von T und S liegt. Man wähle dann eine zu k_1 konzentrische Kugel k_2, welche so groß ist, daß sie das gesamte Gebiet T in ihrem Innern enthält. ihrerseits aber in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. (Zu dem Zwecke wähle man $\mathfrak{K}$

von vornherein genügend groß.) Bezeichnet h die harmonische Funktion im Gebiet zwischen k_1 und k_2, welche auf k_1 und k_2 dieselben Werte wie v_0 annimmt, so ist nach (1)

$$v_n > v \geqq h \tag{4}$$

im ganzen Gebiet, insbesondere in T. Konvergiert nun ein in T variabler Punkt gegen den betreffenden Punkt der Begrenzung S, so konvergieren sowohl v_n wie auch h gegen den Wert von v_0 in diesem Punkt, womit auch b) bewiesen ist [1]).

Nun noch einige Worte darüber, wie man die Voraussetzung, daß $4\pi\varrho = -\Delta\varphi$ ständig positiv ist, beseitigen kann. Wäre ϱ in gewissen Punkten von $\mathfrak{K}$ negativ, so ließe es sich jedenfalls in der Form $\varrho = \varrho^{(1)} - \varrho^{(2)}$ schreiben, mit positivem $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$. Diese beiden Funktionen, ebenso wie oben ϱ, geben Anlaß zur Definition von zwei Funktionenfolgen:

$$v_0^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}, \ldots; \quad v_0^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}, \ldots, \tag{5}$$

die ganz analoge Eigenschaften besitzen wie vorher v_n. Es existieren dann insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} v_n^{(1)} = v^{(1)}, \quad \lim_{n\to\infty} v_n^{(2)} = v^{(2)}, \tag{6}$$

und die harmonische Funktion

$$v^{(1)} - v^{(2)} + \varphi - v_0^{(1)} + v_0^{(2)} \tag{7}$$

liefert die Lösung des Dirichletschen Problems [2]).

3. Das Kondensatorproblem. Der eben geschilderte Existenzbeweis führt auch bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen zum Ziele. Betrachten wir insbesondere die folgende Randwertaufgabe.

Es seien S_0 und S_1 zwei geschlossene Flächen, S_1 liege ganz im Innern von S_0. Gesucht wird eine zwischen S_0 und S_1 harmonische Funktion u, welche auf S_0 den Wert 0 und auf S_1 den Wert 1 annimmt.

Der Poincarésche Existenzbeweis liefert in der Tat eine solche Funktion, die überdies eindeutig bestimmt ist (§ 1, 6). Diese Aufgabe ritt bekanntlich in der Elektrostatik in Verbindung mit dem soge-

---

[1]) Es wird also vorausgesetzt, daß das Dirichletsche Problem für einen Kugelring bereits gelöst ist. Vgl. § 3, 1.

[2]) Einen mit dem Poincaréschen verwandten, aber viel einfacheren Beweis gaben neuerdings O. Perron und R. Remak [Math. Zeitschr. **18** (1923); **20** (1924)]. Bezüglich weiterer Literatur sei außer den am Ende des VIII. Kapitels angeführten Lehrbüchern auf den Enzyklopädieartikel von L. Lichtenstein [Neuere Entwicklungen der Potentialtheorie — konforme Abbildung, Leipzig (B. G. Teubner) 1919] verwiesen.

nannten Kondensatorproblem auf (vgl. Bd. II, S. 273). Aus der Formel § 1, (2) schließt man, daß das Integral

$$K = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma, \tag{8}$$

erstreckt über eine beliebige, S_1 enthaltende und ganz innerhalb von S_0 gelegene geschlossene Fläche, von der Wahl dieser Fläche unabhängig ist. Man richtet hierbei die Normale stets nach innen, d. h. in der Richtung der wachsenden Werte von u. Die so definierte positive Zahl K heißt die **Kapazität** des Kondensators mit den Belegungsflächen S_0 und S_1 [1]). Es ist übrigens, wie man durch Anwendung der **Greenschen** Formel [vgl. XIV, § 3, (10)] leicht zeigt,

$$K = \frac{1}{4\pi}\int |\operatorname{grad} u|^2\, d\tau = \frac{1}{4\pi}\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \tag{8'}$$

wo die Integration über den ringförmigen Bereich (Isolator) zwischen den Flächen S_0 und S_1 zu erstrecken ist.

Zwei Grenzfälle seien besonders hervorgehoben:

1. Unter der Kapazität k einer geschlossenen Fläche S verstehen wir die Kapazität des Kondensators, dessen Innenfläche S ist und dessen Außenfläche in eine unendliche große Kugel ausartet. Die entsprechende Funktion u hat dann für große Werte von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Form

$$u = \frac{k}{r} + \frac{Y_1(\theta, \varphi)}{r^2} + \frac{Y_2(\theta, \varphi)}{r^3} + \cdots, \tag{9}$$

wobei $Y_m(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion m-ter Ordnung ist ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Aus § 1, (3) folgt ferner, wenn q außerhalb von S liegt und p die Fläche S durchläuft,

$$u(q) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{r_{pq}}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p d\sigma_p, \tag{10}$$

wobei die Normale ins Innere von S zeigt. Die Funktion

$$\frac{1}{k}\, u(q) = v(q) \tag{11}$$

kann somit als das Potential einer über S ausgebreiteten einfachen Flächenbelegung von der Dichte

$$\frac{1}{4\pi k}\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial v}{\partial n} \tag{12}$$

---

[1]) Man setzt voraus, daß die Dielektrizitätskonstante des Isolators zwischen den Belegungsflächen gleich 1 ist.

und von der Gesamtmasse 1 aufgefaßt werden; dieses Potential ist auf der Fläche S selbst, also auch im Innern derselben konstant und gleich $1/k$. Man nennt die Belegung (12) die natürliche Belegung von S. Sie liefert die Verteilung der Elektrizität von der Gesamtmasse 1 auf der Belegungsfläche S, wenn elektrostatisches Gleichgewicht herrscht.

2. Es sei andererseits S_0 eine gegebene geschlossene Fläche, und S_1 möge in einen Punkt P im Innern von S_0 ausarten. Betrachtet man eine Folge von Flächen S_1, die sich auf den Punkt P zusammenziehen, so konvergieren die entsprechenden Funktionen u (nach Division durch die jeweilige Kapazität) gegen die Greensche Funktion des von S_0 begrenzten Bereiches in bezug auf P.

4. Eine Minimaleigenschaft der natürlichen Belegung. 1. Es sei $\mu(p)$ eine beliebige, auf der geschlossenen Fläche S definierte nichtnegative stückweise stetige Funktion, für welche das Flächenintegral

$$\int_S \mu(p)\, d\sigma_p = 1$$

wird. Man kann $\mu(p)$ als die Dichte einer über S ausgebreiteten einfachen Flächenbelegung von der Gesamtmasse 1 deuten. Zu jeder solchen Belegung gehört ein wohlbestimmter Integralwert

$$J = \int_S \int_S \frac{\mu(p)\,\mu(q)}{r_{pq}}\, d\sigma_p\, d\sigma_q, \tag{13}$$

wenn r_{pq} den Abstand der beiden, die Fläche S durchlaufenden Punkte p und q bedeutet. Das Integral J läßt sich als die doppelte potentielle Energie der Verteilung $\mu(p)$ deuten.

Unter allen Belegungen der Fläche S von der Gesamtmasse 1 erhält das Integral J für die natürliche Belegung den kleinsten Wert; es gilt also die Ungleichung

$$J \geqq \frac{1}{k}, \tag{14}$$

wobei das Gleichheitszeichen für die Belegung (12) eintritt. Im Verein mit der obigen Deutung des Integrals J besagt diese Minimaleigenschaft der natürlichen Belegung, daß sie eine stabile Gleichgewichtslage der auf S verteilten Einheitsmasse liefert [1]).

Zum Beweis führen wir das Potential $V = V(q)$ der Flächenbelegung $\mu(p)$ ein:

$$V(q) = \int_S \frac{\mu(p)}{r_{pq}}\, d\sigma_p.$$

---

[1]) Vgl. Gauß' Werke, Bd. 5, S. 234.

Es gilt dann offenbar

$$J = \int_S \mu(q)\, V(q)\, d\sigma_q.$$

Nun ist auf S (vgl. XIV, § 1, 6), wenn n_a und n_i die äußere bzw. innere Normalenrichtung bezeichnen,

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\pi\mu,$$

so daß

$$4\pi J = -\int_S V\left(\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right) d\sigma_q.$$

Wir wenden jetzt die Greensche Formel in der in XIV, § 3, (10) angegebenen Form auf die Funktion $V - v$ außerhalb der Fläche S an, wo v das Potential der natürlichen Belegung (12) ist. Man erhält

$$(15) \qquad -\int_S (V - v)\frac{\partial (V - v)}{\partial n_a}\, d\sigma \geqq 0.$$

Weiter liefert die Greensche Formel

$$-\int_S \left(v\frac{\partial V}{\partial n_a} - V\frac{\partial v}{\partial n_a}\right) d\sigma = 0,$$

so daß (15) mit der folgenden Ungleichung gleichwertig ist:

$$-\int_S V\frac{\partial V}{\partial n_a}\, d\sigma - \int_S v\frac{\partial v}{\partial n_a}\, d\sigma + 2\int_S v\frac{\partial V}{\partial n_a}\, d\sigma \geqq 0.$$

Wegen $v = \frac{1}{k}$ auf S wird das zweite und dritte Glied gleich

$$-\frac{1}{k}\int_S \frac{\partial v}{\partial n_a}\, d\sigma + \frac{2}{k}\int_S \frac{\partial V}{\partial n_a}\, d\sigma = \frac{1}{k}\cdot 4\pi - \frac{2}{k}\cdot 4\pi = -\frac{4\pi}{k},$$

so daß

$$(16') \qquad -\int_S V\frac{\partial V}{\partial n_a}\, d\sigma \geqq \frac{4\pi}{k}$$

gilt. Weiter liefert XIV, § 3, (10):

$$(16'') \qquad -\int_S V\frac{\partial V}{\partial n_i}\, d\sigma \geqq 0.$$

Man hat somit

$$-\int_S V\left(\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right) d\sigma \geqq \frac{4\pi}{k};$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt.

2. Es sei $\varrho(p)$ eine in dem von der Fläche S begrenzten Bereiche T definierte nichtnegative, stückweise stetige Funktion. Es sei ferner das Raumintegral

$$\int_T \varrho(p)\, d\tau_p = 1.$$

Man kann $\varrho(p)$ als die Dichte einer in T angebrachten räumlichen Massenbelegung von der Gesamtmasse 1 denken. Zu jeder solchen Belegung gehört ein wohlbestimmter Integralwert

$$J = \int_T \int_T \frac{\varrho(p)\,\varrho(q)}{r_{pq}}\, d\tau_p\, d\tau_q. \tag{17}$$

[Dieses Integral läßt eine entsprechende Deutung zu wie oben (13).] Wir beweisen die Ungleichung

$$J > \frac{1}{k}, \tag{18}$$

wo k, wie oben, die Kapazität von S bedeutet.

Wir führen wieder das Potential

$$V(q) = \int_T \frac{\varrho(p)}{r_{pq}}\, d\tau_p$$

ein, so daß

$$J = \int_T \varrho(q)\, V(q)\, d\tau_q$$

gilt. Wegen der Poissonschen Gleichung (XIV, § 1, 4)

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

kann

$$4\pi J = -\int_T V \Delta V\, d\tau_q$$

geschrieben werden. Nach der Greenschen Formel ist aber

$$-\int_T V \Delta V\, d\tau_q = \int_T |\operatorname{grad} V|^2\, d\tau_q + \int_S V \frac{\partial V}{\partial n_i}\, d\sigma_q,$$

so daß mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ auf S

$$4\pi J = \int_T |\operatorname{grad} V|^2\, d\tau_q - \int_S V \frac{\partial V}{\partial n_a}\, d\sigma_q \tag{19}$$

folgt.

Die weiteren Überlegungen verlaufen analog wie oben. Durch Anwendung der Greenschen Formel auf die Funktion $V - v$ außer-

halb von S erhält man (15) und daraus durch dieselbe Umformung wie oben (16'), so daß aus (19) in der Tat

$$4\pi J > \frac{4\pi}{k}$$

folgt.

3. Der Beweis der Ungleichung (18) kann auch auf (14) zurückgeführt werden. Man kann nämlich eine beliebige räumliche Belegung $\varrho(p)$ des Innern von S durch eine einfache Belegung $\sigma(p)$ der Fläche S ersetzen, so daß die Gesamtmasse unverändert bleibt und der entsprechende Integralwert (13) kleiner als (17) wird.

Es sei $G = G(p, q)$ die Greensche Funktion des von S begrenzten Bereiches und man setze

$$G(p,q) = \frac{1}{r_{pq}} - H(p,q),$$

wo H in dem ganzen Innern von S regulär-harmonisch ist. Da G auf S verschwindet, so muß im Innern von S

$$G(p,q) > 0, \quad \text{d. h.} \quad H(p,q) < \frac{1}{r_{pq}}$$

gelten. Wir „fegen" nun die in p angebrachte Einheitsmasse aus (vgl. 2), indem wir sie durch die über S ausgebreitete einfache Belegung von der Dichte

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_i} G(p, q')$$

ersetzen, wobei q' die Fläche S durchläuft. Das Integral dieser (nichtnegativen) Funktion über S ist tatsächlich gleich 1. Wir setzen entsprechend

$$\sigma(q') = \frac{1}{4\pi} \int_T \varrho(p) \frac{\partial}{\partial n_i} G(p, q')\, d\tau_p.$$

Man hat dann

$$\int_S \int_S \frac{\sigma(q')\,\sigma(q'')}{r_{q'q''}}\, d\sigma_{q'}\, d\sigma_{q''} \tag{20}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int_T \int_T \int_S \int_S \frac{\varrho(p')\,\varrho(p'')}{r_{q'q''}} \frac{\partial}{\partial n_i} G(p', q') \frac{\partial}{\partial n_i} G(p'', q'')\, d\tau_{p'}\, d\tau_{p''}\, d\sigma_{q'}\, d\sigma_{q''}.$$

Es ist aber wegen § 1, (10)

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_i} G(p', q') \frac{d\sigma_{q'}}{r_{q'q''}} = \frac{1}{r_{p'q''}}$$

und

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n_i} G(p'',q'')\frac{d\sigma_{q''}}{r_{p'q''}} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n_i} G(p'',q'') H(p',q'')\, d\sigma_{q''}$$

$$= H(p',p'') < \frac{1}{r_{p'p''}},$$

so daß (20) tatsächlich kleiner ist als

$$\int_T\int_T \frac{\varrho(p')\varrho(p'')}{r_{p'p''}} d\tau_{p'} d\tau_{p''}.$$

5. Eine Minimaleigenschaft des Kugelkondensators. Wir kehren wieder zu den in **3** eingeführten Kondensatoren zurück. Sind die Belegungsflächen S_0 und S_1 konzentrische Kugeln vom Radius R_0 bzw. R_1 (Kugelkondensator), so wird die in **3** definierte Funktion u, wenn r den Abstand von dem gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Kugeln bedeutet,

$$u = \frac{r^{-1} - R_0^{-1}}{R_1^{-1} - R_0^{-1}},$$

so daß die Kapazität den Wert

$$K = \frac{1}{R_1^{-1} - R_0^{-1}} \tag{21}$$

hat. (Vgl. Bd. II, S. 273.)

I. Unter allen Kondensatoren, deren Außen- und Innenflächen gegebene Volumina besitzen, hat derjenige die kleinste Kapazität, welcher aus zwei konzentrischen Kugeln besteht.

In dem in **3** erwähnten Grenzfall 1., wo S_0 in eine unendlich große Kugel ausartet, erhält man also:

II'. Unter allen geschlossenen Flächen mit gegebenen Volumina hat die Kugel die kleinste Kapazität[1]).

In dem in **3** erwähnten Grenzfall 2. ergibt sich der folgende Satz:

II''. Es sei S eine den Nullpunkt enthaltende Fläche und die Greensche Funktion in bezug auf den Nullpunkt

$$G = \frac{1}{r} - H.$$

---

[1]) Vgl. zu diesem Satze: H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide (Paris 1903), S. 17. Ferner auch: G. Faber, Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitzungsber. der Bayerischen Akad. der Wiss. 1923, S. 169—172. — Der im Texte gegebene Beweis [vgl. G. Szegö, Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 583—593] dürfte einfacher sein als der Fabersche und liefert zugleich den etwas allgemeineren Satz I.

Den Wert von H im Nullpunkte bezeichnen wir mit $\frac{1}{c}$ $(c > 0)$. Unter allen den Nullpunkt enthaltenden geschlossenen Flächen, für welche c einen gegebenen Wert hat, besitzt die Kugel vom Radius c um den Nullpunkt das kleinste Volumen.

Entsprechende Sätze gelten in der Ebene; nur bei der Definition der Kapazität ist der Faktor 4π in (8) durch 2π zu ersetzen. Außerdem tritt natürlich das logarithmische Potential an die Stelle des Newtonschen. Das zweidimensionale Analogon von I ist mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln von T. Carleman bewiesen worden[1]. Die Sätze II' und II'' sind in der Ebene mit den sogenannten Bieberbachschen Flächensätzen[2] der Funktionentheorie gleichwertig.

Bezeichnen V_0 und V_1 die Volumina der von S_0 bzw. S_1 begrenzten Bereiche, so besagt der Satz I, daß die Ungleichung

$$K \geqq \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{V_1^{-\frac{1}{3}} - V_0^{-\frac{1}{3}}} \tag{22}$$

gilt; das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn S_0 und S_1 konzentrische Kugelflächen sind.

Zum Beweise führe man das Volumen $V(\varrho)$ des von der Niveaufläche $u = \varrho$ umschlossenen Bereiches ein, $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Es ist

$$V(0) = V_0, \quad V(1) = V_1.$$

Es sei $0 < \varrho < 1$. Das Normalenstück zwischen den beiden Niveauflächen $u = \varrho$ und $u = \varrho + \varepsilon$ ist näherungsweise gleich

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}},$$

so daß das Volumen zwischen diesen beiden Flächen

$$\varepsilon \int\limits_{u=\varrho} \frac{d\sigma}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

wird. Hieraus folgt

$$V'(\varrho) = \int\limits_{u=\varrho} \frac{d\sigma}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}. \tag{23}$$

---

[1] Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 208—212.

[2] Vgl. L. Bieberbach, Rendiconti del Circolo Mat. Palermo 38 (1914), S. 98—112; Sitzungsber. der Preußischen Akad. 1916, S. 940—955.

Ferner wird die Normalableitung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Man hat also nach (8)

$$4\pi K = \int_{u=\varrho} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\, d\sigma. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt mit Hilfe der sogenannten Schwarzschen Ungleichung (I, § 5, **3**, Fußnote auf S. 42)

$$4\pi K V'(\varrho) \geqq \Big\{\int_{u=\varrho} d\sigma\Big\}^2 = (F(\varrho))^2, \tag{25}$$

wenn $F(\varrho)$ den Flächeninhalt der Niveaufläche $u = \varrho$ bedeutet.

Es ist nun bekannt, daß unter allen geschlossenen Flächen gegebenen Inhaltes die Kugel das größte Volumen besitzt (isoperimetrische Eigenschaft der Kugel)[1]. Es gilt somit, wie man leicht nachrechnet,

$$(F(\varrho))^3 \geqq 36\pi (V(\varrho))^2, \tag{26}$$

so daß wegen (25)

$$4\pi K V'(\varrho) \geqq (36\pi)^{\frac{2}{3}} (V(\varrho))^{\frac{4}{3}}$$

oder

$$\frac{K}{3} (V(\varrho))^{-\frac{4}{3}} V'(\varrho) \geqq \frac{(36\pi)^{\frac{2}{3}}}{12\pi} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Durch Integration dieser Ungleichung zwischen den Grenzen 0 und 1 folgt die Behauptung (22). Das Gleichheitszeichen kann nur dann eintreten, wenn es in der isoperimetrischen Ungleichung (26) für jeden Wert von ϱ gilt, d. h. wenn sämtliche Niveauflächen (S_0 und S_1 einbegriffen) Kugeln sind. Darüber hinaus muß auch in der Schwarzschen Ungleichung das Gleichheitszeichen gelten, was bekanntlich nur dann der Fall ist, wenn $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ auf der Fläche $u = \varrho$ einen konstanten Wert hat. Da schließlich diese Quadratwurzel dem Abstand der benachbarten Niveauflächen umgekehrt proportional ist, so folgt, daß diese konzentrische Kugeln sein müssen.

Dieser Beweis gilt natürlich auch für solche Kondensatoren, deren innere oder äußere Belegung aus mehreren geschlossenen Flächen besteht.

---

[1] Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 44.

Achtzehntes Kapitel

Randwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

§ 1. Einteilung in Typen und allgemeine Hilfssätze

1. Einteilung in Typen. In den beiden vorhergehenden Kapiteln sind für die Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Delta u = 0$ „Randwertprobleme" gelöst worden. Die hier auftretenden Aufgaben sowohl wie die Lösungsmethoden sind von wesentlich anderer Art als diejenigen des Kapitels über Anfangswertprobleme. Von der Lösung eines Anfangswertproblems ließ sich immer nur behaupten, daß sie in hinreichend kleiner Umgebung der gegebenen Kurve regulär ist, während die Lösung eines Randwertproblems die Regularität in einem von vornherein gegebenen Bereich verlangt. Bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung speziell konnte bei den Anfangswertproblemen nicht nur eine auf der Integralfläche liegende Kurve, sondern sogar ein „Streifen" gegeben werden. Den höheren Anforderungen an die Regularität, die man bei Randwertproblemen zu stellen hat, entspricht die Tatsache, daß die Integralfläche schon durch die geschlossene Kurve, durch die sie hindurchgehen und in deren Innerm sie regulär sein soll, im allgemeinen völlig eindeutig bestimmt ist.

Bei dem Versuch, die aus der Potentialtheorie gewonnenen Resultate auf allgemeinere Differentialgleichungen zu übertragen, stellt es sich heraus, daß die Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu drei ganz verschiedenen Typen gehören, von denen nur einer sich als mit der Gleichung $\Delta u = 0$ verwandt erweist. Die in XV, § 9 eingeführte Unterscheidung der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Typen nämlich gewinnt hier erst ihre hauptsächliche Bedeutung. Da die Gleichung $\Delta u = 0$ elliptisch ist, so ist eine Analogie zu ihr auch nur bei den elliptischen Differentialgleichungen zu erwarten. Die Unterscheidung der Typen beruhte auf der Beschaffenheit der Charakteristiken, je nachdem beide Scharen imaginär, reell oder zusammenfallend sind. Da die Charakteristiken auf der Integralfläche liegen, so wird sich dieser Unterschied darin bemerkbar machen, daß sich das Verhalten der Lösungen auf dem Rande im Falle reeller Charakteristiken längs diesen in das Innere fortpflanzt,

während dagegen bei imaginären Charakteristiken die Lösungen im Innern stets analytisch ausfallen, wie wenig regulär auch die Randwerte beschaffen sein mögen. Die parabolischen Differentialgleichungen nehmen in mancher Hinsicht eine Mittelstellung zwischen den beiden anderen Typen ein.

2. Verallgemeinerte Greensche Formel. Für das Folgende brauchen wir eine Verallgemeinerung der Greenschen Formeln, von denen wir in den beiden vorigen Kapiteln wiederholt Gebrauch gemacht haben.

Unter einem linearen Differentialausdruck verstehen wir eine Bildung folgender Art:

$$(1)\qquad L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu.$$

wobei $A, B, \ldots, F$ als in einem Gebiete T und auf seinem Rande zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x und y anzusehen sind. Die Gleichung

$$(2)\qquad L(u) = 0$$

ist die dem Differentialausdruck zugeordnete Differentialgleichung. Der Ausdruck $v \,.\, L(u)$, wo v gleichfalls eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, soll nun einer wiederholten partiellen Integration unterzogen werden, derart, daß die Differentiationsordnung für u sukzessive erniedrigt wird. Wir schreiben die Formeln der partiellen Integration jedoch als Differentialformeln:

$$\begin{aligned}
vA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[vA\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(vA)}{\partial x}u\right] + u\frac{\partial^2(vA)}{\partial x^2},\\
vB\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[vB\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(vB)}{\partial x}u\right] + u\frac{\partial^2(vB)}{\partial x\partial y},\\
vB\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[vB\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(vB)}{\partial y}u\right] + u\frac{\partial^2(vB)}{\partial x\partial y},\\
vC\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[vC\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(vC)}{\partial y}u\right] + u\frac{\partial^2(vC)}{\partial y^2},\\
vD\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[vDu\right] - \frac{\partial(vD)}{\partial x}u,\\
vE\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[vEu\right] - \frac{\partial(vE)}{\partial y}u.
\end{aligned}$$

Also:

$$(3)\qquad vL(u) - uM(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

worin

$$\text{(4a)} \quad M(v) = \frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv,$$

$$\text{(4b)} \quad P = v\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial (Av)}{\partial x} + \frac{\partial (Bv)}{\partial y}\right) + Duv,$$

$$\text{(4c)} \quad Q = v\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial (Bv)}{\partial x} + \frac{\partial (Cv)}{\partial y}\right) + Euv$$

gesetzt ist.

Das Gebiet T werde von der bis auf endlich viele Ecken stetig differenzierbaren Randkurve S begrenzt. Dann ist nach der Gaußschen Formel

$$\iint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{(S)} (P\,dy - Q\,dx),$$

worin das letztere Integral im positiven Sinne um das Gebiet herum zu erstrecken ist. Die Anwendung dieser Formel auf (3) ergibt die verallgemeinerte Greensche Formel:

$$\text{(5)} \quad \iint\limits_{(T)} [v L(u) - u M(v)]\, dx\,dy = \oint\limits_{(S)} (P\,dy - Q\,dx).$$

3. Sich selbst adjungierte Differentialausdrücke. Den Differentialausdruck $M(v)$ nennt man den zu $L(u)$ adjungierten. Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Differentialausdrücke, für die $L(u) \equiv M(u)$ ist; ein solcher Differentialausdruck heißt sich selbst adjungiert Aus (4a) liest man leicht ab, daß die Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung in $L(u)$ und $M(u)$ ohne weiteres übereinstimmen. Die Übereinstimmung der Koeffizienten der ersten Ableitungen kommt zustande durch

$$\text{(6)} \quad D = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}; \quad E = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y},$$

was, wie man leicht nachrechnet, auch die Übereinstimmung des Gliedes mit u selbst zur Folge hat. Daher ist

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + Fu$$

oder

$$\text{(7)} \quad L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Fu$$

der allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialausdruck.

Für einen solchen vereinfachen sich wegen (6) die Formeln (4b) und (4c), so daß aus (5) hervorgeht:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{(T)} [v L^*(u) - u L^*(v)]\,dx\,dy\\ (8)\qquad &= \oint\limits_{(S)} \Big\{\Big[v\Big(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\Big) - u\Big(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]dy\\ &\quad - \Big[v\Big(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\Big) - u\Big(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]dx\Big\}.\end{aligned}$$

4. Sich selbst adjungierter Differentialausdruck als erste Variation eines Doppelintegrals. Einen sich selbst adjungierten Differentialausdruck erhält man bei der Behandlung gewisser Probleme der Variationsrechnung, nämlich als erste Variation eines Doppelintegrals, dessen Integrand eine quadratische Form von u und seinen ersten Ableitungen ist:

$$(9)\qquad \iint\limits_{(T)} \Big[A\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 - F u^2\Big]dx\,dy.$$

Die erste Variation[1]) hiervon lautet, abgesehen von einem Faktor 2,

$$(7)\qquad L^*(u) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + F u.$$

Verschwindet die erste Variation des Doppelintegrals für die Funktion $u(x, y)$, so verschwindet sie auch nach einer Substitution $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ für die Funktion $u_1(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)]$. Die Substitution sei durch ihre Inverse gegeben in den Formeln

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y);$$

dann geht durch die Transformation das Doppelintegral (9) über in:

$$(10)\quad \iint\limits_{(T_1)} \Big[A_1\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\Big)^2 + 2B_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + C_1\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\Big)^2 - F_1 u_1^2\Big]\Big|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\Big|\,d\xi\,d\eta,$$

worin

$$(11)\left\{\begin{aligned} A_1 &= A\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2,\\ B_1 &= A\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + B\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big) + C\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y},\\ C_1 &= A\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)^2 + 2B\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + C\Big(\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big)^2,\\ F_1 &= F\end{aligned}\right.$$

[1]) Vgl. XX, § 1, 2 d).

gesetzt sind und als Funktionen von ξ und η aufzufassen sind. Die erste Variation von (10) ist also wieder ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck und lautet (bis auf einen Faktor 2)

$$(12)\qquad \begin{aligned} L_1^*(u_1) = {} & \frac{\partial}{\partial \xi}\left(A_1 \Omega \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + B_1 \Omega \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(B_1 \Omega \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + C_1 \Omega \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right) + F_1 \Omega u_1 \end{aligned}$$

mit

$$\Omega = \left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}\right|.$$

Wir haben also den Satz: Erfüllt eine Funktion $u(x, y)$ die sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung $L^*(u) = 0$, so erfüllt die durch die Transformation $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ aus $u(x, y)$ hervorgehende Funktion $u_1(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ die sich selbst adjungierte Differentialgleichung $L_1^*(u_1) = 0$. (Diesen Satz hätte man auch ohne Heranziehung der Variationsrechnung durch direktes Nachrechnen verifizieren können.)

5. Transformation elliptischer Differentialgleichungen mit Hilfe der Charakteristiken. Wichtig sind unter den sich selbst adjungierten Differentialgleichungen vor allem die elliptischen, die also durch $AC - B^2 > 0$ gekennzeichnet sind. Für diesen Fall haben wir in XV, § 9, 4 gesehen, daß man die Transformation $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ so wählen kann (durch Integration der charakteristischen Differentialgleichung und Trennung des Reellen vom Imaginären), daß die in (11) ausgerechneten Koeffizienten des transformierten Differentialausdrucks die Forderungen $A_1 = C_1 \neq 0$ und $B_1 = 0$ erfüllen. Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A > 0$ annehmen können, so ist A_1 eine positiv definite quadratische Form von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, also auch $A_1 > 0$. Setzen wir noch $A_1 \Omega = C_1 \Omega = H^2(\xi, \eta)$, $F_1 \Omega = K(\xi, \eta)$, so erhält man also die Gleichung $L_1^*(u_1) = 0$ in der einfachen Form

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(H^2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(H^2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right) + K u_1 = 0.$$

Führt man noch

$$u_2(\xi, \eta) = H(\xi, \eta) \cdot u_1(\xi, \eta)$$

als neue abhängige Variable ein, so wird

$$H^2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = H \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - u_2 \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad H^2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = H \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - u_2 \frac{\partial H}{\partial \eta},$$

und (13) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \frac{\frac{K}{H} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}}{H} u_2 = 0$$

oder

$$\Delta u_2 + p(\xi, \eta) u_2 = 0. \tag{14}$$

Auf diese Form läßt sich also die allgemeinste sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung bringen.

§ 2. Das erste Randwertproblem bei elliptischen Differentialgleichungen. Eindeutigkeitssätze und Abschätzungen

1. Eindeutigkeit der Lösungen. Wir untersuchen eine Differentialgleichung von noch etwas allgemeinerem Typus als § 1, (14), nämlich

$$\Delta u = F(u, x, y), \tag{1}$$

in der u nicht linear aufzutreten braucht. Wir wollen $F(u, x, y)$ als nach allen drei Variablen stetig differenzierbar voraussetzen, ferner möge die erste Ableitung nach u einer Lipschitzbedingung in bezug auf u genügen.

Um die Eindeutigkeitsbeweise zu führen, gehen wir aber wieder von der linearen Gleichung

$$\Delta u = f(x, y) u \tag{2}$$

aus. Angenommen, für das Gebiet T seien zwei Lösungen u_1 und u_2 mit den gleichen Randwerten vorhanden, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Dann ist $v = u_1 - u_2$ auch eine Lösung von (2), und zwar mit verschwindenden Randwerten:

$$\Delta v = f(x, y) v. \tag{2'}$$

Wir zeigen zunächst: Ist $f(x, y) \geqq 0$ in T, so muß v identisch verschwinden. Sonst müßte v an einer Stelle x_0, y_0 im Innern von T etwa ein positives Maximum (bzw. ein negatives Minimum) besitzen und es müßte in T einen Punkt x_1, y_1 geben, in dem $v(x_1, y_1) > 0$ und $\Delta v(x_1, y_1) < 0$ ausfällt[1]). Da aber $f(x_1, y_1) v(x_1, y_1) \geqq 0$ ist, so

[1]) Das kann man etwa so einsehen: Sicher kann man den Punkt x_0, y_0 so wählen, daß in jedem noch so kleinen Kreise um x_0, y_0 ein Punkt x', y' liegt, für den $v(x', y') < v(x_0, y_0)$ ausfällt. Ist nun $\Delta v(x_0, y_0) < 0$, so wählen wir $x_1, y_1 = x_0, y_0$. Ist dies nicht erfüllt, so ist $\Delta v(x_0, y_0) = 0$. Dann führen wir um x_0, y_0 als Anfangspunkt Polarkoordinaten r, φ ein; nach II, § 3, (43) wird dann $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \varphi^2}$. Nun überlegt man sich leicht, daß es wegen der Stetigkeit

liefert das einen Widerspruch gegen (2). Man hat demnach folgenden Eindeutigkeitssatz: Ist $f(x,y) \geqq 0$ in T, so kann es in T nur eine einzige Lösung von (2) mit vorgeschriebenen Randwerten geben.

Nimmt $f(x,y)$ in T auch negative Werte an, so kann man die Eindeutigkeit nicht mehr für beliebige Gebiete feststellen. Denn unter Benutzung der in XVI, § 2, 3 eingeführten Greenschen Funktion[1]) geht (2′) über in:

$$v(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(T)} G(x,y;\,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,v(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0. \tag{3}$$

Setzt man jetzt $f(x,y) = -\lambda^2$, so kann man $-\lambda^2$ so wählen, daß Gl. (3) gerade einen Eigenwert besitzt (vgl. hierzu Kap. XII). In hinreichend kleinen Gebieten kann man jedoch auch hier den Eindeutigkeitsbeweis liefern. Sei etwa in T $f(x,y) > -m^2$ und bezeichne V das positive Maximum der als existierend vorausgesetzten Lösung von (3). Dann hat man, wenn man

$$\operatorname{Max} \frac{1}{2\pi}\int G(x,y;\,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = P$$

setzt, wegen (3)

$$V \leqq m^2 PV \quad \text{oder} \quad 1 \leqq m^2 P. \tag{4}$$

Zu einer Abschätzung von P kann man etwa so gelangen: $G(x,y;\,\xi,\eta)$ läßt sich in folgender Form darstellen:

$$G(x,y;\,\xi,\eta) = \log\frac{1}{r} + g\,(x,y;\,\xi,\eta) \tag{5}$$

mit

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

---

von $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ eine von Null verschiedene Zahl R gibt, derart, daß für $r \leqq R$ stets $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \leqq 0$ ausfällt und ebenso $\frac{\partial v}{\partial r} \leqq 0$. Nun betrachte man einen Kreis $r = r_1 < R$, der durch einen Punkt x'', y'' geht, in dem etwa $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$ ausfällt; einen solchen muß es nach der Voraussetzung über x_0, y_0 geben. Entweder ist auf diesem Kreise $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \equiv 0$; dann setze man $x_1, y_1 = x'', y''$. Oder es ist $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \not\equiv 0$. Dann gibt es sicher auf dem Kreise $r = r_1$ einen Punkt x''', y''', in dem $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} < 0$ ausfällt, da ja $v(r_1, 2\pi) = v(r_1, 0)$ werden muß; in diesem Falle setze man $x_1, y_1 = x''', y'''$.

[1]) Vgl. dazu auch XIII, § 3, 1. Die dort angegebene Greensche Funktion unterscheidet sich von der hier benutzten um den Faktor $\frac{1}{2\pi}$.

Nun hat in (5) $g(x, y; \xi, \eta)$ die Randwerte $\log r$ wegen des Verschwindens der Greenschen Funktion am Rande. Ist daher D die größte Entfernung je zweier Randpunkte von T (der „Durchmesser" von T), so ist wegen XVI, § 1, **4** überall in T

$$g(x, y; \xi, \eta) \leqq \log D. \tag{6}$$

T habe den Inhalt J und K sei ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Inhalt J, also dem Radius $R = \sqrt{\frac{J}{\pi}}$. Dann ist, da durch Überführung von K in T nur Flächenelemente vom Anfangspunkt entfernt werden[1]),

$$\int\limits_{(T)} \log \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta \leqq \int\limits_{(K)} \log \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} r \log \frac{1}{r}\, dr\, d\vartheta = \frac{J}{2}\left(\log \frac{\pi}{J} + 1\right). \tag{7}$$

Mit Benutzung von (5), (6) und (7) folgt nun aus (4)

$$1 \leqq m^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot J\left[\frac{1}{2}\left(\log \frac{\pi}{J} + 1\right) + \log D\right],$$

und daraus schließt man, daß (3) nur die identisch verschwindende Lösung besitzen kann, wenn

$$J\left[\frac{1}{2}\left(\log \frac{\pi}{J} + 1\right) + \log D\right] < \frac{2\pi}{m^2} \tag{8}$$

ist, was durch Verkleinerung von J bei beschränktem D erreicht werden kann. Man kann natürlich noch mannigfache ähnliche solche Abschätzungen finden[2]). In einem genügend kleinen Gebiete gibt es also höchstens eine Lösung des Randwertproblems (2).

Kehren wir nun zu der allgemeineren Gl. (1) zurück. Nehmen wir an, daß u_1 und u_2 zwei Lösungen von (1) mit den gleichen Randwerten sind. Dann ist mit $u_1 - u_2 = v$

$$\Delta v = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y) = \frac{\partial F}{\partial u}(\tilde{u}(x, y), x, y)\, v, \tag{9}$$

wo $\tilde{u}(x, y)$ zwischen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ liegt. Jetzt hat (9) die Form von (2') angenommen; durch Anwendung unserer Kenntnisse über (2') auf (9) erhalten wir daher das Resultat:

Ist $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ im Gebiet T, so kann die Gl. (1) höchstens eine Lösung haben, die vorgeschriebene Randwerte an-

---

[1]) Vgl. hierzu XIV, § 1, **4**.

[2]) Eine weniger rohe Schranke findet sich z. B. bei E. Picard, Journ. de math. (4) **6** (1890), S. 151—153.

nimmt, wie auch T beschaffen sein mag. Ist dagegen nur $\frac{\partial F}{\partial u} > -m^2$, so ist die Eindeutigkeit jedenfalls gewährleistet, sobald für das Gebiet T die Abschätzung (8) erfüllt ist.

2. Verlauf der Lösungen bei $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$. Unter der Voraussetzung $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ seien jetzt noch einige Größenbeziehungen für die Lösungen von (1) (falls sie existieren, was in § 3 gezeigt werden wird) angegeben, die zum Teil in Kap. XIX, § 2 Verwendung finden werden.

a) Es seien u_1 und u_2 zwei Lösungen von (1), für die auf dem Rande von T $|u_1 - u_2| \leqq d$ gilt. Dann ist auch im Innern von T $|u_1 - u_2| \leqq d$.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß die Funktion $u_1 - u_2$, die am Rande von T dem absoluten Betrage nach kleiner als d ist, kein Maximum größer als d (bzw. Minimum kleiner als $-d$) besitzen kann. Wir schließen ähnlich wie früher: Sonst gäbe es nämlich in T einen Punkt x_1, y_1, so daß $u_1(x_1, y_1) - u_2(x_1, y_1) > d > 0$ wäre und

$$F(u_1(x_1, y_1), x_1, y_1) - F(u_2(x_1, y_1), x_1 y_1)$$
$$= \Delta(u_1(x_1, y_1) - u_2(x_1, y_1)) < 0,$$

was einen Widerspruch gegen die Voraussetzung $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ einschließt.

b) Gilt für zwei Lösungen u_1 und u_2 von (1) auf dem Rande von T $u_1 \geqq u_2$, so ist im Innern von T überall $0 \leqq u_1 - u_2 \leqq v_1 - v_2$, wenn v_1 bzw. v_2 diejenigen Potentialfunktionen sind, die die gleichen Randwerte wie u_1 bzw. u_2 besitzen.

Der Beweis des ersten Teiles der Behauptung $0 \leqq u_1 - u_2$ ist im Beweisgang unter a) enthalten. Der zweite Teil folgt aus der mit $\Delta[(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)] = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y)$ — die Randwerte der Funktion in der eckigen Klammer sind Null — gleichbedeutenden Integralbeziehung

$$(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(T)} G(x, y; \xi, \eta)[F(u_1, \xi, \eta) - F(u_2, \xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta,$$

da der Integrand auf der rechten Seite wegen $u_1 \geqq u_2$ und $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ stets größer oder gleich Null ausfällt; also $(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) \leqq 0$.

c) Ist $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ eine Folge von Lösungen von (1), die auf dem Rande gleichmäßig konvergieren, so konvergieren sie auch im Innern gleichmäßig, und zwar gegen eine Lösung von (1).

Die gleichmäßige Konvergenz im Innern folgt unmittelbar aus a). Sei v_n diejenige Potentialfunktion in T, die mit u_n die gleichen Randwerte besitzt, so gilt

$$(10)\qquad u_n - v_n = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(T)} G(x, y;\, \xi, \eta) F(u_n, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F in u geht nun $F(u_n, \xi, \eta)$ gleichmäßig gegen $F(u, \xi, \eta)$, ferner streben nach XVI, § 1, 5 die v_n gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion v. Führt man den Grenzübergang zu $n \to \infty$ in (10) aus, wobei man auf der rechten Seite Limes- und Integralzeichen vertauschen darf, so folgt, daß u diejenige Lösung von (1) ist, die die gleichen Randwerte wie die Potentialfunktion v besitzt.

§ 3. Lösung des ersten Randwertproblems von $\Delta u = F(u, x, y)$ mit $\dfrac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$[1])

1. Zurückführung des Problems auf eine nichtlineare Integralgleichung. Wir betrachten jetzt die Gleichung (1) aus § 2 unter der Zusatzvoraussetzung $\dfrac{\partial F(u, x, y)}{\partial u} \geqq 0$. Der Kürze halber wollen wir die Punkte x, y bzw. ξ, η durch s bzw. t bezeichnen. Sei $v(s)$ diejenige eindeutig bestimmte Potentialfunktion, die am Rande von T die für u vorgegebenen Randwerte annimmt. Dann überzeugt man sich leicht, daß das Randwertproblem der Differentialgleichung (1) aus § 2 identisch ist mit der Auflösung der folgenden nichtlinearen Integralgleichung:

$$(1)\qquad u(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(T)} G(s, t) F\big(u(t), t\big)\, dt = v(s)\,^{2}),$$

wo $v(s)$ die durch die gegebenen Randwerte bestimmte Potentialfunktion bedeutet. Die Beschränkung, daß $v(s)$ Potentialfunktion sein soll, wollen wir zunächst fallen lassen, so daß ein allgemeineres Problem entsteht.

2. Lösungen in der Nachbarschaft einer bekannten Lösung. Verfahren der sukzessiven Approximation. Wir gehen aus von irgendeiner Lösung $u_0(s)$ der Integralgleichung (1); man kann etwa ein

---

[1]) Nach R. Iglisch, Aufbau der Theorie der ersten Randwertaufgabe von $\Delta u = F(u, x, y)$ bei $\dfrac{\partial F(u, x, y)}{\partial u} \geqq 0$ mit Hilfe linearer Integralgleichungen. Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 39 (1930), S. 159.

[2]) Alle folgenden Integrale sind über den Bereich T zu erstrecken.

beliebiges $u_0(s)$ in die linke Seite von (1) eintragen und die zugehörige rechte Seite $v_0(s)$ ausrechnen. Sei also

$$u_0(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\,F(u_0(t),t)\,dt = v_0(s). \tag{2}$$

Wir betrachten dann eine Funktion $v(s)$, die von $v_0(s)$ genügend wenig verschieden ist. Man kann nun eine zu $u_0(s)$ benachbarte Lösung $u(s)$ von (1) durch folgendes Verfahren der sukzessiven Approximation bestimmen:

Man berechne $u_1(s)$ aus der linearen Integralgleichung

$$\begin{aligned} u_1(s) - u_0(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)F_u(u_0(t),t)\,(u_1(t) - u_0(t))\,dt \\ = v(s) - v_0(s). \end{aligned} \tag{3a}$$

Dann wird gelten:

$$F(u_1(t),t) - F(u_0(t),t) = F_u(\bar{u}_1(t),t)\,(u_1(t) - u_0(t)), \tag{3b}$$

wo die nicht notwendig eindeutig bestimmte Funktion $\bar{u}_1(t)$ zwischen $u_1(t)$ und $u_0(t)$ liegt.

Man fahre fort:

$$\left\{\begin{aligned} u_2(s) - u_0(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)F_u(\bar{u}_1(t),t)\,(u_2(t) - u_0(t))\,dt \\ = v(s) - v_0(s). \end{aligned}\right. \tag{4a}$$

$$F(u_2(t),t) - F(u_0(t),t) = F_u(\bar{u}_2(t),t)\,(u_2(t) - u_0(t)) \tag{4b}$$

usw.

Zunächst zeigen wir, daß man $\bar{u}_\nu(t)$ stets so wählen kann, daß $F_u(\bar{u}_\nu(t),t)$ stetig von t abhängt. Es ist

$$\begin{aligned} &\left[F(u_\nu(t_1),t_1) - F(u_0(t_1),t_1) - \left(F(u_\nu(t_2),t_2) - F(u_0(t_2),t_2)\right)\right] \\ &\quad = \{F_u(\bar{u}_\nu(t_1),t_1) - F_u(\bar{u}_\nu(t_2),t_2)\}\,(u_\nu(t_1) - u_0(t_1)) \\ &\quad + F_u(\bar{u}_\nu(t_2),t_2)\,[u_\nu(t_1) - u_0(t_1) - u_\nu(t_2) + u_0(t_2)]. \end{aligned}$$

Wir wollen die Stetigkeit von $F_u(\bar{u}_\nu(t),t)$ zeigen an der Stelle t_1. — Wegen der Stetigkeit von $u_0(t)$ und $u_\nu(t)$ gehen die beiden eckigen Klammern gegen Null. Nehmen wir zunächst an: $u_\nu(t_1) - u_0(t_1) \neq 0$, so muß also auch die geschweifte Klammer gegen Null gehen, was die Stetigkeit beweist. Ist dagegen $u_\nu(t_1) - u_0(t_1) = 0$, so ist $F_u(\bar{u}_\nu(t_1), t_1) = F_u(u_0(t_1), t_1)$. Rückt nun $t_2 \to t_1$, so geht $u_\nu(t_2) \to u_0(t_1)$, also erst recht $\bar{u}_\nu(t_2) \to u_0(t_1)$. Daher geht $F_u(\bar{u}_\nu(t_2), t_2) \to F_u(u_0(t_1), t_1)$. Es ist also auch in diesem Falle die Stetigkeit bewiesen.

Damit ist gezeigt, daß auf unsere linearen Integralgleichungen (3a), (4a) usw. die Sätze von Kap. XII anwendbar sind. Da außerdem nach Voraussetzung $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ sein soll, sind alle aufgestellten Integralgleichungen lösbar, da nach § 2, 1 die homogenen Integralgleichungen nur die identisch verschwindende Lösung besitzen.

Nimmt man zunächst an, daß für alle ν gilt:

$$|u_\nu(t) - u_0(t)| < \varepsilon, \tag{5}$$

wo ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, so gilt für sämtliche lösenden Kerne $\Gamma_\nu(s,t)$ unserer linearen Integralgleichungen:

$$\int |\Gamma_\nu(s,t)|\, dt < A, \tag{6}$$

wo A eine von ν unabhängige Konstante bedeutet. Wählt man dann

$$|v(s) - v_0(s)| < \frac{\varepsilon}{1+A}, \tag{7}$$

so folgt aus unserem Schema der sukzessiven Approximation durch Induktion leicht, daß tatsächlich $|u_\nu(s) - u_0(s)| < \varepsilon$ erfüllt ist. wenn $v(s)$ der Bedingung (7) genügt.

3. Konvergenzbeweis. Aus (3a) und (4a) erhält man

$$u_2(s) - u_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t) F_u(u_0(t),t)\,(u_2(t) - u_1(t))\, dt$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\left[\left(F_u(\bar{u}_1(t),t) - F_u(u_0(t),t)\right)(u_2(t) - u_0(t))\right] dt$$

oder, indem wir die eckige Klammer kurz mit $K(t)$ bezeichnen,

$$u_2(s) - u_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t) F_u(u_0(t),t)\,(u_2(t) - u_1(t))\, dt$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\, K(t)\, dt.$$

Sei nun $\Gamma_0(s,t)$ der lösende Kern dieser Integralgleichung. Dann hat man

$$u_2(s) - u_1(s) = -\frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\,K(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int \Gamma_0(s,t)\int G(t,r) K(r)\, dr\, dt. \tag{8}$$

Da F_u einer Lipschitzbedingung genügen soll, hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\,|K(t)|\,dt < B \operatorname{Max}|\bar{u}_1(t) - u_0(t)| \cdot \operatorname{Max}|u_2(t) - u_0(t)|, \tag{9}$$

wobei B eine endliche positive Zahl bedeutet, so daß aus (8) folgt:

$$|u_2(s) - u_1(s)| < \varepsilon^2 B(1+A). \tag{10}$$

Weiter wird

$$(11)\quad u_3(s) - u_2(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t) F_u(\bar u_2(t),t)\big(u_3(t) - u_2(t)\big)\,dt$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\big(F_u(\bar u_2(t),t) - F_u(\bar u_1(t),t)\big)\big(u_2(t) - u_0(t)\big)\,dt.$$

Nun ist aber nach den b-Relationen unseres Schemas der sukzessiven Approximation

$$F(u_2(t),t) - F(u_1(t),t)$$
$$= F_u(\bar u_2(t),t)\big(u_2(t) - u_0(t)\big) - F_u(\bar u_1(t),t)\big(u_1(t) - u_0(t)\big).$$

Also:

$$[F_u(\bar u_2(t),t) - F_u(\bar u_1(t),t)]\big(u_2(t) - u_0(t)\big)$$
$$= [F_u(u_{12}(t),t) - F_u(\bar u_1(t),t)]\big(u_2(t) - u_1(t)\big),$$

wobei $u_{12}(t)$ zwischen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ liegt, so daß sicher $|u_{12}(t) - \bar u_1(t)| < 2\varepsilon$ ausfällt.

Benutzt man dies neben (9) und (10), so folgt aus (11) wie früher die Abschätzung

$$(12)\qquad |u_3(s) - u_2(s)| < \varepsilon^3 . 2 . B^2(1+A)^2.$$

Allgemein erhält man so:

$$(13)\qquad |u_{n+1}(s) - u_n(s)| < \varepsilon^2(1+A) . B[2B(1+A)\varepsilon]^{n-1}.$$

Unser Verfahren der sukzessiven Approximation konvergiert wegen (13) für

$$(14)\qquad 2B(1+A)\varepsilon < 1,$$

was durch Verkleinerung von ε sicher erreicht werden kann, da durch Verkleinerung von ε A und B sicher nicht wachsen.

Nun kann man leicht zeigen, daß die Funktionen $F_u(\bar u_\nu(t),t)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F_u(\bar u(t),t)$ konvergieren. Das folgt sofort aus folgender Tatsache, deren Richtigkeit man leicht aus der Definition von $\bar u_\nu(t)$ entnehmen kann: Es gibt eine Zahl L, so daß für alle unsere $\bar u_\nu(t)$ unabhängig von t, ν und μ gilt:

$$|F_u(\bar u_\nu(t),t) - F_u(\bar u_\mu(t),t)| \leqq L\,|u_\nu(t) - u_\mu(t)|.$$

Die Grenzfunktion $u(s)$ genügt daher den beiden Gleichungen

$$(15\text{a})\quad u(s) - u_0(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t) F_u(\bar u(t),t)\big(u(t) - u_0(t)\big)\,dt = v(s) - v_0(s)$$

und

$$(15\text{b})\qquad F(u(t),t) - F(u_0(t),t) = F_u(\bar u(t),t)\big(u(t) - u_0(t)\big),$$

mithin befriedigt wegen (2) $u(s)$ die Gl. (1). Wir haben also folgenden Satz: Zu jeder Lösung $u_0(s)$ von (1) zur rechten Seite $v_0(s)$ gibt es eine nur von der Beschaffenheit von $u_0(s)$ abhängende Zahl δ_0 derart, daß Gl. (1) für alle $v(s)$, die der

Bedingung $|v(s) - v_0(s)| < \delta_0$ genügen, mindestens eine Lösung besitzt. Da man leicht die Abschätzungen (6) und (9) so einrichten kann, daß sie für jedes $u_1(s)$ richtig bleiben mit $|u_1(s)| < U$, wo U eine beliebige endliche positive Zahl bedeutet, so folgt als Zusatz: Es gibt eine nur von U abhängende Zahl δ_1 derart, daß, wenn $u_1(s)$ mit $|u_1(s)| < U$ Lösung von (1) zur rechten Seite $v_1(s)$ ist, (1) stets eine Lösung besitzt, falls nur $|v(s) - v_1(s)| < \delta_1$ ausfällt.

4. Beschränktheit der Lösungen. Wir zeigen jetzt: Liegen die Randwerte der rechten Seite $v(s)$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl N und gilt ferner $|\Delta v(s)| < M$, so muß jede Lösung $u(t)$ von (1) dem absoluten Betrage nach unterhalb einer nur von M und N abhängigen angebbaren endlichen Schranke liegen. Denn (1) kann man als Randwertproblem so schreiben:

$$\Delta u(s) = F(u(s), s) + \Delta v(s), \tag{16}$$

wobei die Randwerte von $u(s)$ mit denjenigen von $v(s)$ übereinstimmen.

Es gibt nun eine nur von N abhängende endliche positive Zahl S derart, daß $F(N, s) > -S$ ist für alle s aus T. Macht man nun die Substitution

$$w = u + \frac{S + M}{4}(x^2 + y^2), \tag{17}$$

so geht (16) über in

$$\Delta w = F^*(w, s) + M + S + \Delta v(s), \tag{18}$$

und hier ist

$$F^*(w, s) + M + S > M \tag{19}$$

für $w \geqq W$, wenn $W = N + \frac{S + M}{4} \operatorname{Max}(x^2 + y^2)$ gesetzt wird. Die Randwerte von w sind sicher kleiner als W.

Wir zeigen jetzt, daß stets $w \leqq W$ sein muß. Sonst müßte nämlich w in einem Punkte s_0 ein Maximum besitzen, welches größer als W ist, und dort müßte $\Delta w(s_0) \leqq 0$ sein, so daß aus (18) folgen würde $F^*(w, s) + M + S < M$, was der Beziehung (19) widerspricht. Wegen (17) folgt nun leicht die Beschränktheit von u.

Ebenso folgt die Beschränktheit von u nach unten.

5. Existenzsatz. Daß Gl. (1) zu beliebigem $v(s)$ eine Lösung besitzt, kann man nun sehr einfach so zeigen: Man gehe aus von der Gl. (2) und betrachte die Gleichungsschar

$$u_\tau(s) + \frac{1}{2\pi} \int G(s, t) F(u_\tau(t), t)\, dt = (1 - \tau)\, v_0(s) + \tau\, v(s), \tag{20}$$

wo der Parameter τ von 0 bis 1 laufen soll. Da nach **4**, wenn Lösungen $u_\tau(s)$ überhaupt vorhanden sind, diese sämtlich zwischen zwei endlichen Zahlen liegen, kann man nach dem in **3** ausgesprochenen Zusatz leicht eine Zahl δ finden derart, daß, wenn für τ eine Lösung von (20) existiert, auch Lösungen für alle τ-Werte vorhanden sind, die der Bedingung $|\tau - \tau^*| < \delta$ genügen. Man sieht so, daß man durch endlich viele Anwendungen der Überlegungen aus **2** und **3** die Lösung bei $\tau = 0$ bis $\tau = 1$ hin fortsetzen kann. Damit ist der Existenzbeweis in vollem Umfang geliefert.

Als wichtigsten Fall, auf den diese Überlegungen anwendbar sind, nennen wir den Fall der Funktion

$$F(u, x, y) = f(x, y)\, e^u + g(x, y) \text{ mit } f(x, y) \geqq 0;$$

der Spezialfall $\Delta u = e^u$ wird in XIX, § 2 noch weiter behandelt werden.

6. Fall genügend kleiner Gebiete. Das gleiche Beweisverfahren führt auch zum Ziele, wenn man die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial u} \geqq 0$ fallen läßt, dafür aber etwa $\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \leqq m^2$ voraussetzt und nur Bereiche zuläßt, die der in § 2, (8) aufgestellten Kleinheitsbedingung genügen, welche früher die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistete. Zwar gilt hier der in **4** gegebene Beweis der Beschränktheit der Lösungen nicht mehr; dieser wurde jedoch nur dazu gebraucht, um zusammen mit dem Zusatz aus **3** die beim Beweis des Existenzsatzes in **5** benötigte endliche Zahl δ zu erhalten. Unter der Voraussetzung $\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \leqq m^2$ liefert aber der Zusatz in **3** unter geringer naheliegender Abänderung seines Wortlautes von selbst diese Zahl δ, und die Überlegungen von **5** gewährleisten dann gleichzeitig Existenz und Beschränktheit der Lösungen.

§ 4. Die Riemannsche Integrationsmethode für den hyperbolischen Fall

1. Die homogene schwingende Saite von unbegrenzter Länge. Zur Einführung in die Riemannsche Integrationsmethode behandeln wir ein einfaches Beispiel, nämlich die Differentialgleichung der homogenen schwingenden Saite (VII, § 1, **4**):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0. \tag{1}$$

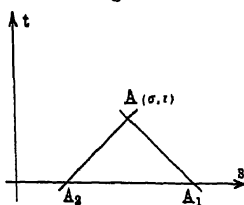
Wenn die Saite unendlich lang ist, so hat man als Integrationsbedingungen nur die Anfangswerte für $t = 0$ gegeben, nämlich $w(s, 0) = f(s)$ und $\frac{\partial w(s, 0)}{\partial t} = g(s)$ für alle s.

Die Riemannsche Methode benutzt die Kenntnis der Charakteristiken. Sie sind hier sogleich zu erkennen, wenn man die Substitution

$$t = \frac{y - x}{2a}, \quad s = \frac{x + y}{2}$$

ausführt [1]), durch die (1) in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Fig. 74

übergeht. Die Charakteristiken dieser Gleichung sind nach XV, § 9 $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$, was in den alten Variablen

$$(2) \qquad at + s = \text{const}, \quad at - s = \text{const}$$

ergibt [1]).

Durch den Punkt $A(\sigma, \tau)$ der s, t-Ebene (Fig. 74) [2]) mögen die beiden Charakteristiken $A_1 A$ und $A A_2$ hindurchgehen. Auf das Dreieck $A_1 A A_2$ wenden wir nun die allgemeine Greensche Formel an. In (1) steht nach (7), § 1 ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck. In der Greenschen Formel setzen wir $u = w$, $v = 1$, so daß sich ergibt

$$(3) \qquad 0 = \oint \left(a^2 \frac{\partial w}{\partial s} dt + \frac{\partial w}{\partial t} ds \right).$$

Auf dem Wege $A_1 A$ ist wegen (2) $a dt + ds = 0$, also

$$\int_{A_1}^{A} \left(a^2 \frac{\partial w}{\partial s} dt + \frac{\partial w}{\partial t} ds \right) = \int_{A_1}^{A} \left(-a \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) ds,$$

und es ist auf diesem Wege $t = \tau + \frac{\sigma - s}{a}$, also

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial t}$$

und folglich

$$(4\text{a}) \int_{A_1}^{A} \left(a^2 \frac{\partial w}{\partial s} dt + \frac{\partial w}{\partial t} ds \right) = -a \int_{A_1}^{A} \frac{dw}{ds} ds = -a[w(\sigma, \tau) - w(\sigma + a\tau, 0)].$$

---

[1]) Vgl. XV, § 9, 4.

[2]) In der Figur ist $a = 1$ angenommen.

Analog ergibt sich

$$(4\text{b})\quad \int_A^{A_2}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}dt+\frac{\partial w}{\partial t}ds\right)=a\int_A^{A_2}\frac{dw}{ds}ds=a[w(\sigma-a\tau,0)-w(\sigma,\tau)].$$

Zusammen aus (3) und (4a), (4b) folgt

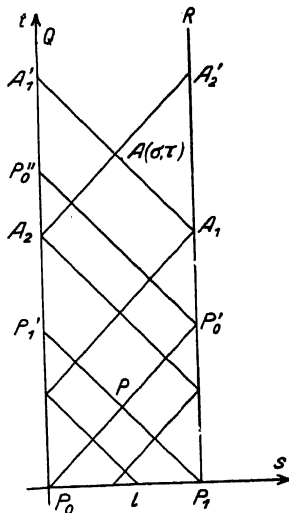
$$w(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\{w(\sigma+a\tau,0)+w(\sigma-a\tau,0)\}+\frac{1}{2a}\int_{A_2}^{A_1}\frac{\partial w}{\partial t}ds.$$

Tragen wir hier die Randbedingungen $w(s,0)=f(s)$, $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=g(s)$ ein, so erhalten wir als einzig mögliche Lösung von (1)

$$(5)\qquad w(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\{f(\sigma+a\tau)+f(\sigma-a\tau)\}+\frac{1}{2a}\int_{\sigma-a\tau}^{\sigma+a\tau}g(s)ds.$$

Unter der Annahme, daß $f(s)$ zweimal und $g(s)$ einmal differenzierbar ist, verifiziert man durch direktes Rechnen ohne weiteres, daß (5) der Gl. (1) und den vorgeschriebenen Randbedingungen genügt.

Fig. 75

2. Homogene begrenzte Saite. Für eine Saite von der endlichen Länge l ist wieder $w(s,0)=f(s)$ und $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=g(s)$ gegeben, aber beides nur für $0\leqq s\leqq l$. Hätten wir überdies an den Enden dauernd $w=0$, so würden die in den früheren Abschnitten, namentlich in VII, behandelten Methoden der Partikularlösungen zur Anwendung kommen. Wir setzen jetzt aber voraus, daß die Endpunkte der Saite für alle $t\geqq 0$ die vorgeschriebenen Erregungen $w(0,t)=h_0(t)$ und $w(l,t)=h_1(t)$ aufweisen. Auf dem gesamten Rande des unendlich langen Halbstreifens QP_0P_1R ist also w vorgeschrieben; auf P_0P_1 überdies auch $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Nun sei $A(\sigma,\tau)$ ein beliebiger Punkt des Halbstreifens (Fig. 75). Liegt A im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks PP_0P_1, wo PP_0 und P_1P Charakteristiken sind, so ist die Überlegung für die unbegrenzte Saite anwendbar, und (5) liefert die Lösung.

Es liege also A außerhalb PP_0P_1. Dann wird mindestens eine durch A gehende Charakteristik beide zur t-Achse parallelen Ränder schneiden. In der Figur ist die Lage von A so angenommen, daß die beiden durch A gehenden Charakteristiken die Strecke P_0P_1 nicht treffen. Die Charakteristik $at + s = \text{const}$ schneide den Rand in A_1 und A_1', die Charakteristik $at - s = \text{const}$ in A_2 und A_2', wobei A_1' und A_2' bzw. weiter von der s-Achse entfernt seien als A_1 und A_2. Die Formel (3) liefert hier, wieder auf ein von dem gegebenen Rande und von zwei Charakteristiken begrenztes Gebiet angewandt,

$$0 = -a\int_{A_1}^{A}\frac{dw}{ds}\,ds + a\int_{A}^{A_2}\frac{dw}{ds}\,ds + \int_{A_2}^{A_1}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right)$$

oder

$$\text{(6a)}\quad w(A) = \frac{1}{2}[w(A_1) + w(A_2)] + \frac{1}{2a}\int_{A_2}^{A_1}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right),$$

wobei das Integral auf dem Rande herum, nämlich von A_2 über P_0, P_1 nach A_1 erstreckt ist.

Da es in dieser Formel nur darauf ankommt, daß sie auf ein von dem Gebietsrand und zwei Charakteristiken begrenztes Gebiet sich bezieht, so erhält man aus den Flächenstücken AA_1A_2' und $AA_1'A_2$ die Formeln

$$\text{(6b)}\quad w(A) = \frac{1}{2}[w(A_1) + w(A_2')] + \frac{1}{2a}\int_{A_2'}^{A_1}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right),$$

$$\text{(6c)}\quad w(A) = \frac{1}{2}[w(A_1') + w(A_2)] + \frac{1}{2a}\int_{A_2}^{A_1'}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right).$$

Da es für die Lösbarkeit gewiß notwendig ist, daß $w(A)$ in den letzten drei Gleichungen den gleichen Wert hat, so folgt aus (6a) und (6c)

$$\text{(7a)}\qquad w(A_1) - w(A_1') = \frac{1}{a}\int_{A_1}^{A_1'}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right)$$

und aus (6a) und (6b)

$$\text{(7b)}\qquad w(A_2) - w(A_2') = \frac{1}{a}\int_{A_2'}^{A_2}\left(a^2\frac{\partial w}{\partial s}\,dt + \frac{\partial w}{\partial t}\,ds\right).$$

Wir differenzieren nun (7 a) nach dem die Charakteristik $at+s=\alpha$ bestimmenden Parameter α. Liegt A_1 auf P_1R, so ergibt sich einfach

$$\frac{\partial w(A_1)}{\partial t}-\frac{\partial w(A_1')}{\partial t}=a\left\{\frac{\partial w(A_1')}{\partial s}-\frac{\partial w(A_1)}{\partial s}\right\}.$$

Liegt dagegen A_1 auf P_0P_1, so haben wir für A_1' zu schreiben: $d\alpha=a\,dt$, für A_1 dagegen $d\alpha=ds$, also

$$a\frac{\partial w(A_1)}{\partial s}-\frac{\partial w(A_1')}{\partial t}=a\frac{\partial w(A_1')}{\partial s}-\frac{\partial w(A_1)}{\partial t}.$$

Entsprechend folgt aus (7 b), wenn A_2 auf P_0Q liegt,

$$\frac{\partial w(A_2)}{\partial t}-\frac{\partial w(A_2')}{\partial t}=a\left\{\frac{\partial w(A_2)}{\partial s}-\frac{\partial w(A_2')}{\partial s}\right\};$$

und wenn A_2 auf P_0P_1 liegt:

$$-a\frac{\partial w(A_2)}{\partial s}-\frac{\partial w(A_2')}{\partial t}=-\frac{\partial w(A_2)}{\partial t}-a\frac{\partial w(A_2')}{\partial s}.$$

Durch die Einführung der Randbedingungen gehen aus diesen Formeln die folgenden hervor:

$$h_1'(A_1)-h_0'(A_1')=a\left\{\frac{\partial w(A_1')}{\partial s}-\frac{\partial w(A_1)}{\partial s}\right\},\tag{8a}$$

$$af'(A_1)-h_0'(A_1')=a\frac{\partial w(A_1')}{\partial s}-g(A_1),\tag{8b}$$

$$h_0'(A_2)-h_1'(A_2')=a\left\{\frac{\partial w(A_2)}{\partial s}-\frac{\partial w(A_2')}{\partial s}\right\},\tag{8c}$$

$$-af'(A_2)-h_1'(A_2')=-g(A_2)-a\frac{\partial w(A_2')}{\partial s}.\tag{8d}$$

Während $\frac{\partial w}{\partial t}$ auf dem ganzen Rande bekannt ist, dienen diese Gleichungen dazu, auch $\frac{\partial w}{\partial s}$ auf den Rändern QP_0 und P_1R zu bestimmen. Zunächst liefert (8 b) die Ableitung $\frac{\partial w(A_1')}{\partial s}$, wenn A_1' auf P_0P_1' liegt; ebenso liefert (8 d) $\frac{\partial w(A_2')}{\partial s}$, wenn A_2' auf P_1P_0' liegt[1]. Hiernach kann man (8 a) benutzen, um $\frac{\partial w}{\partial s}$ auf $P_1'P_0''$ zu bestimmen usf.

---

[1]) Für $A_1=A_1'$ in P_0 ist in (8 b) zu bemerken, daß $h_0'(0)=g(0)$ wegen der Natur des Problems vorausgesetzt werden muß. Ebenso $h_1'(0)=g(l)$.

Die Werte werden sozusagen durch Reflexion von einem Rand auf den anderen übertragen und sind somit auf dem gesamten Rande vorgeschrieben, wenn das Problem überhaupt eine Lösung haben soll. Kennt man schließlich die Randwerte von $\frac{\partial w}{\partial s}$, so liefert z. B. (6a) die Lösung in dem ganzen Halbstreifen.

3. An den Enden befestigte homogene Saite. Sind die Endpunkte der Saite dauernd in Ruhe, also $h_0(t) \equiv 0$ und $h_1(t) \equiv 0$, so lassen sich die Formeln (8) besonders einfach übersehen. Setzen wir noch

$$\left.\frac{\partial w(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0} = k_0(t), \qquad \left.\frac{\partial w(s,t)}{\partial s}\right|_{s=l} = k_1(t),$$

so ergibt (8b), indem man noch die Lage von A_1 und A_1' auf der gleichen Charakteristik $at + s = \text{const}$ beachtet,

$$\text{(9a)} \qquad k_0(t) = f'(at) + \frac{1}{a} g(at) \quad (0 \leqq at \leqq l);$$

entsprechend folgt aus (8d):

$$\text{(9b)} \qquad k_1(t) = f'(l - at) - \frac{1}{a} g(l - at) \quad (0 \leqq at \leqq l).$$

Dann sind (8a) und (8c) abwechselnd heranzuziehen. Für (8a) und (8c) schreiben wir

$$\text{(10)} \qquad k_0\left(t + \frac{l}{a}\right) = k_1(t), \qquad k_1\left(t + \frac{l}{a}\right) = k_0(t).$$

Diese Gleichungen zeigen, wie schrittweise aus (9a) und (9b) sich $k_0(t)$ und $k_1(t)$ auf den ganzen senkrechten Rändern bestimmen lassen. So erhält man

$$\text{(11)} \qquad \left\{\begin{aligned} k_0(t) &= k_1\left(t - \frac{l}{a}\right) = f'(2l - at) - \frac{1}{a} g(2l - at) \\ k_1(t) &= k_0\left(t - \frac{l}{a}\right) = f'(at - l) + \frac{1}{a} g(at - l) \end{aligned}\right\} \quad l \leqq at \leqq 2l.$$

Ferner folgt aus den beiden Gleichungen (10)

$$\text{(12)} \qquad k_0\left(t + \frac{2l}{a}\right) = k_0(t), \qquad k_1\left(t + \frac{2l}{a}\right) = k_1(t);$$

die beiden Funktionen $k_0(t)$ und $k_1(t)$ haben also die Periode $\frac{2l}{a}$ und sind daher durch (9a), (9b), (11) und (12) für alle $t \geqq 0$ bestimmt. Am durchsichtigsten werden diese Gleichungen dadurch,

daß man $f(s)$ und $g(s)$ über ihren ursprünglichen Definitionsbereich $0 \leqq s \leqq l$ fortsetzt durch die Festsetzungen

$$(13) \qquad \begin{cases} f(-s) = -f(s), & f(s \pm 2l) = f(s), \\ g(-s) = -g(s), & g(s \pm 2l) = g(s), \end{cases}$$

also auch

$$f'(-s) = f'(s), \qquad f'(s \pm 2l) = f'(s),$$

womit die Funktionen $f(s)$, $f'(s)$, $g(s)$ auf der ganzen s-Achse als periodische Funktionen mit der Periode $2l$ bestimmt sind. Hierdurch erreicht man, daß die Formeln (9a), (9b) und (11) nur spezielle Fälle von

$$k_0(t) = f'(at) + \frac{1}{a} g(at), \qquad k_1(t) = f'(l - at) - \frac{1}{a} g(l - at)$$

werden, womit zugleich die Periodizitätseigenschaften (12) sichergestellt sind, $k_0(t)$ und $k_1(t)$ also für alle $t \geqq 0$ definiert sind.

Jetzt läßt sich (6a) anwenden zur Lösung des Problems. Nehmen wir an, A läge so, daß A_1 und A_2 schon auf den senkrechten Rändern liegen (in dem Falle, daß A in $P P_0 P_1$ liegt, ist schon durch die unendlich lange Saite alles erledigt; liegt A in $P P_1 P_0'$ oder in $P P_1' P_0$, so ist ähnlich wie im folgenden zu verfahren). Dann sind

$$w(A_1) = h_1(A_1) \equiv 0, \qquad w(A_2) = h_0(A_2) \equiv 0,$$

also

$$w(\sigma, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{A_2}^{A_1} \left(a^2 \frac{\partial w}{\partial s} dt + \frac{\partial w}{\partial t} ds \right)$$

$$= \frac{a}{2} \int_{\tau - \frac{\sigma}{a}}^{0} k_0(t)\, dt + \frac{1}{2a} \int_0^l g(s)\, ds + \frac{a}{2} \int_0^{\tau + \frac{\sigma - l}{a}} k_1(t)\, dt$$

$$= \frac{a}{2} \int_{\tau - \frac{\sigma}{a}}^{0} f'(at)\, dt + \frac{a}{2} \int_0^{\tau + \frac{\sigma - l}{a}} f'(l - at)\, dt + \frac{1}{2} \int_{\tau - \frac{\sigma}{a}}^{0} g(at)\, dt$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^l g(s)\, ds - \frac{1}{2} \int_0^{\tau + \frac{\sigma - l}{a}} g(l - at)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} [f(0) - f(a\tau - \sigma)] + \frac{1}{2} [f(a\tau + \sigma) + f(l)]$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{a\tau - \sigma}^{0} g(s)\, ds + \frac{1}{2a} \int_0^l g(s)\, ds + \frac{1}{2a} \int_l^{2l - a\tau - \sigma} g(s)\, ds$$

und wegen $f(0) = f(l) = 0$ und der Periodizitätseigenschaften (13

$$(14) \qquad w(\sigma,\tau) = \frac{1}{2}[f(\sigma - a\tau) + f(\sigma + a\tau)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{a\tau-\sigma}^{a\tau+\sigma} g(s)\,ds.$$

Diese Lösung, die wiederum die einzig mögliche ist, stimmt form mit der für die unendlich lange Saite überein. Der Unterschied b steht nur darin, daß für die begrenzte Saite eine Fortsetzung von $f($ und $g(s)$ durch (13) nötig wurde, die die Periodizität der Lösu schon mit sich bringt. Daß durch (14) auch wirklich eine Lösu des Problems geliefert wird, läßt sich unter der Annahme zweimalig Differenzierbarkeit von $f(s)$ und einmaliger von $g(s)$ wieder oh weiteres bestätigen.

Von Interesse ist es noch, festzustellen, wie die Lösung (14), der die Riemannsche Methode führt, hier, im Falle fester End der Saite, aus dem Ansatz der Partikularlösungen hervorgeht, d früher (namentlich VII, § 1) behandelt wurde. Setzt man in (zunächst $w(s,t) = z(s)\,e^{\varkappa i t}$, so erhält man für z die Differentia gleichung $\varkappa^2 z + a^2 z'' = 0$ mit den Randbedingungen $z(0) = z(l) =$ Die Integration liefert einerseits $z = A\cos\frac{\varkappa}{a}s + B\sin\frac{\varkappa}{a}s$, andere seits muß wegen der Randbedingungen $A = 0$ und $\varkappa/a$ ein ganz Vielfaches von π/l sein. Demnach ist, wenn man n alle zulässige Werte durchlaufen läßt, $\varkappa = n a\pi/l$ und

$$\begin{aligned} w(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos a\frac{n\pi}{l}t + B_n\sin a\frac{n\pi}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}s \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left\{\sin\frac{n\pi}{l}(s+at) + \sin\frac{n\pi}{l}(s-at)\right\}\right. \\ &\qquad\left. + B_n\left\{\cos\frac{n\pi}{l}(s-at) - \cos\frac{n\pi}{l}(s+at)\right\}\right]. \end{aligned}$$

Wenn man in den Ausdruck für w die Anfangsbedingungen einführ erhält man sofort

$$w(s,0) = f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}s, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = g(s) = \frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin\frac{n\pi}{l}$$

Die beiden Bestandteile von $w(s,t)$, die die Koeffizienten A_n trage sind nun unmittelbar gleich $\frac{1}{2}f(s+at) + \frac{1}{2}f(s-at)$, hinsichtlich de beiden anderen zeigt sich die Übereinstimmung mit (14), sobald ma $\int g(s)\,ds$ bildet.

4. Die Riemannsche Integrationsmethode im allgemeinen hyperbolischen Falle. Um die eben an einem Beispiel durchgeführte Riemannsche Integrationsmethode allgemein zu entwickeln, gehen wir von der Normalform der hyperbolischen Differentialgleichung aus, die nach XV, § 9, **3** lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \tag{15}$$

worin a, b, c Funktionen von x und y allein sind. Die im folgenden zu entwickelnde Methode beruht auf einer eigentümlichen Anwendung der allgemeinen Greenschen Formel. Wir gehen aus von dem allgemeinen hyperbolischen Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu. \tag{16}$$

Der zu ihm adjungierte ist nach § 1, **2**

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)v. \tag{17}$$

Die in der allgemeinen Greenschen Formel § 1 (5) auftretenden Größen sind wegen $A = C = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $D = a$, $E = b$, $F = c$

$$\text{(18a)}\quad \begin{cases} P = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv \\ \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial y} - u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial y} + v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right), \end{cases}$$

$$\text{(18b)}\quad \begin{cases} Q = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv \\ \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(uv)}{\partial x} + v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right). \end{cases}$$

Sind nun u und v zwei Funktionen, die in dem Gebiet T die Gleichungen

$$L(u) \equiv 0, \qquad M(v) \equiv 0 \tag{19}$$

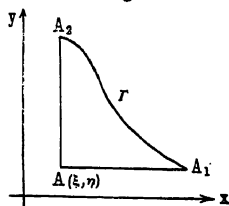
erfüllen, so liefert die Formel § 1 (5)

$$0 = \oint_S (P\,dy - Q\,dx), \tag{20}$$

worin S den Rand von T bedeutet.

Die Charakteristiken von (15) sind die Linien $x =$ konst, $y =$ konst. Es sei nun Γ ein Kurvenstück, das von jeder Charakteristik höchstens einmal geschnitten wird. Nach Riemann wendet man nun (20) an auf ein Gebiet, das von den beiden durch einen Punkt $A = (\xi, \eta)$

hindurchgehenden Charakteristiken und dem von diesen ausgeschnittenen Stück der Kurve Γ begrenzt wird (Fig. 76). Es sei A_1 der Schnittpunkt der zur x-Achse, A_2 der Schnittpunkt der zur y-Achse parallelen Charakteristik mit Γ. Dann gilt bei jeder Lage von A in bezug auf Γ

Fig. 76

$$\pm \oint_S = \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A} + \int_{A}^{A_1}.$$

Das Pluszeichen gilt, wenn Γ monoton fällt, das Minuszeichen, wenn Γ monoton steigt. Beide Fälle ergeben gemäß (20)

$$0 = \int_{A_1}^{A_2} (P\,d y - Q\,d x) + \int_{A_1}^{A} Q\,d x + \int_{A_2}^{A} P\,d y$$

und nach Einsetzung aus (18a) und (18b) und Ausführung zweier Integrationen

$$0 = \frac{1}{2}\Big[u\,v\Big]_{A_1}^{A} + \frac{1}{2}\Big[u\,v\Big]_{A_2}^{A} - \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right) d x - \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right) d y$$
$$+ \int_{A_1}^{A_2} (P\,d y - Q\,d x)$$

oder

(21) $$(u v)_A = \tfrac{1}{2}\{(u\,v)_{A_1} + (u\,v)_{A_2}\}$$
$$+ \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right) d x + \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right) d y - \int_{A_1}^{A_2} (P\,d y - Q\,d x).$$

Nun schreibt Riemann für die Funktion v außer (19) noch weiterhin vor:

$$(v)_A = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - b\,v = 0 \text{ auf } A_1 A, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - a\,v = 0 \text{ auf } A_2 A.$$

Diese Funktion hängt also von dem Aufpunkt A ab und soll daher mit $v(x, y; \xi, \eta)$ bezeichnet werden. Die eben erwähnten Forderungen schreiben sich dann

(22a) $$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad \frac{\partial v(x, \eta; \xi, \eta)}{\partial x} - b\,v(x, \eta; \xi, \eta) = 0,$$
$$\frac{\partial v(\xi, y; \xi, \eta)}{\partial y} - a\,v(\xi, y; \xi, \eta) = 0.$$

Diese drei Randwertvorschriften für v kann man durch Integration der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen umformen in

$$(22\text{b})\qquad v(x,\eta;\xi,\eta) = e^{\int\limits_{\xi}^{x} b(x,\eta)\,dx}, \quad v(\xi,y;\xi,\eta) = e^{\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,y)\,dy}.$$

Daß es eine solche „Riemannsche“ Funktion stets gibt, läßt sich durch Herstellung von Näherungsfolgen beweisen[1]). Offensichtlich ist in dem Beispiel der schwingenden Saite die Riemannsche Funktion konstant gleich 1. Aus (21) geht durch (22a) dann hervor

$$(23)\quad u(A) = u(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\{u(A_1)\,v(A_1;\xi,\eta) + u(A_2)\,v(A_2;\xi,\eta)\} - \int\limits_{A_1}^{A_2}(P\,dy - Q\,dx).$$

Dann haben wir das Ergebnis: wenn es eine Lösung von $L(u) = 0$ gibt, so ist sie nach (23) schon durch die Werte von $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ auf Γ in dem ganzen aus Charakteristiken gebildeten Rechteck, das das gegebene Kurvenstück als Diagonale besitzt, eindeutig bestimmt. Bemerkenswert ist an dieser Darstellung schon, daß $u(\xi,\eta)$ sich nur aus den Werten von $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ auf jenem Stück von Γ bestimmt, das zwischen den beiden Charakteristiken liegt.

5. Symmetrieeigenschaft der Riemannschen Funktion. Ehe wir nun umgekehrt (23) benutzen, um eine Lösung von (15) bei längs Γ vorgeschriebenen Werten zu erhalten, wollen wir einige Eigenschaften der Riemannschen Funktion feststellen.

Statt Γ sei ein Streckenzug gegeben, der aus zwei sich in $A' = (\xi', \eta')$ schneidenden Charakteristiken bestehe. Dann bleiben alle Überlegungen erhalten und es ergibt sich statt (23)

$$(24)\qquad u(A) = u(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\{u(A_1)\,v(A_1;A) + u(A_2)\,v(A_2;A)\} - \int\limits_{A_1}^{A'} P\,dy + \int\limits_{A'}^{A_2} Q\,dx.$$

Schreiben wir für $u(\xi,\eta)$ in diesem Falle ähnliche Randbedingungen vor wie für v in (22a), nämlich

$$(25\text{a})\quad u(A') = 1,\ \frac{\partial u}{\partial x} + b\,u = 0 \text{ auf } A'A_2,\ \frac{\partial u}{\partial y} + a\,u = 0 \text{ auf } A'A_1,$$

---

[1]) Vgl. etwa L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 360—362.

so hängt dieses u (falls es ein solches gibt) von der Lage von A' ab und wird als solches $u(\xi, \eta; \xi' \eta')$ oder kurz $u(A; A')$ geschrieben. Die Gleichungen (25a) ergeben dann analog (22b)

$$(25\text{b}) \quad u(\xi, \eta'; \xi', \eta') = e^{-\int_{\xi'}^{\xi} b(\xi, \eta')\, d\xi}, \quad u(\xi', \eta; \xi', \eta') = e^{-\int_{\eta'}^{\eta} a(\xi', \eta)\, d\eta}$$

als Randbedingungen. Da u außer diesen Randbedingungen noch die zu $M(u) = 0$ adjungierte Gleichung $L(u) = 0$ erfüllt, so ist diese Funktion die Riemannsche Funktion für die Gleichung

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial v}{\partial \xi} - b \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta}\right) v = 0 \text{[1]}.$$

Die Berücksichtigung der Randbedingungen (25a) ergibt wegen (18) aus (24)

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta; \xi', \eta') = {} & \tfrac{1}{2}\{u(A_1; A')\, v(A_1; A) + u(A_2; A')\, v(A_2; A)\} \\ & + \tfrac{1}{2} \int_{A_1}^{A'} \frac{\partial [u(\xi', y; \xi', \eta')\, v(\xi', y; \xi, \eta)]}{\partial y}\, dy \\ & + \tfrac{1}{2} \int_{A_2}^{A'} \frac{\partial [u(x, \eta'; \xi', \eta')\, v(x, \eta'; \xi, \eta)]}{\partial x}\, dx \end{aligned}$$

oder

$$(26) \qquad u(\xi, \eta; \xi', \eta') = v(\xi', \eta'; \xi, \eta),$$

d. h. also: Durch Vertauschung von Argumentpunkt und Parameterpunkt geht die Riemannsche Funktion einer Gleichung in die der adjungierten Gleichung über.

6. Lösung des Problems mit Hilfe der Riemannschen Funktion. Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir, daß die Formel (23) wirklich die Lösung der gestellten Aufgabe liefert, wenn auf Γ die Werte von $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ vorgeschrieben sind. In unserem Beispiel der schwingenden Saite, in dem $v \equiv 1$ ist, konnte die Verifikation ohne weiteres durch Differenzieren erledigt werden. Die im allgemeinen Falle nötigen Überlegungen sind komplizierter und müssen vor allem von der Symmetrieeigenschaft der Riemannschen Funktion Gebrauch machen.

Es seien

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi$$

---

[1]) Nach der Bemerkung von S. 803 existiert u also.

als zwei stetige Funktionen des die Kurve Γ definierenden Parameters gegeben. Gibt man noch $u = u_0$ in einem Endpunkt A_0 der Kurve, so ist auf der Kurve auch u gegeben durch

$$\bar{u}(B) = u_0 + \int_{A_0}^{B} (\varphi\, d x + \psi\, d y).$$

Diese vorgeschriebenen Randwerte sollen durch Überstreichung kenntlich gemacht werden. In (23) hängt A_2 nur von ξ ab, A_1 dagegen nur von η. Außerdem treten ξ und η noch explizite als Parameter auf in v, also auch in P und Q. Bei der Bildung von $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ muß das Integral in (23) einmal nach dem im Integranden auftretenden Parameter ξ und einmal nach dem in der oberen Grenze A_2 steckenden ξ differenziert werden. Ähnliches ist bei Differentiation von $v(A_2; \xi, \eta)$ zu beachten. Also, wenn A_2' der Punkt von Γ ist, in dem die Charakteristik $x = \xi + \delta$ schneidet, hat man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\Big\{&\bar{u}(A_1)\,\frac{\partial v(A_1; \xi, \eta)}{\partial \xi} + \bar{u}(A_2)\frac{\partial v(A_2; \xi, \eta)}{\partial \xi} \\ &+ \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\Big[\bar{u}(A_2')\, v(A_2'; \xi, \eta) - \bar{u}(A_2)\, v(A_2; \xi, \eta)\Big]\Big\} \\ &- \int_{A_1}^{A_2} \Big(\frac{\partial P}{\partial \xi}\, d y - \frac{\partial Q}{\partial \xi}\, d x\Big) - \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{A_2}^{A_2'} [P\, d y - Q\, d x]^{1)}.\end{aligned}$$

Die beiden unter dem Limeszeichen stehenden Ausdrücke fassen wir unter Anwendung von (18) zusammen zu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta}\Big\{\frac{1}{2}\Big[\bar{u}(A_2')\, v(A_2'; A) - \bar{u}(A_2)\, v(A_2; A)\Big] \\ &- \frac{1}{2}\int_{A_2}^{A_2'} \Big[\frac{\partial (\bar{u}\, v)}{\partial y}\, d y + \frac{\partial (\bar{u}\, v)}{\partial x}\, d x\Big] + \int_{A_2}^{A_2'} \Big[\bar{u}\Big(\frac{\partial v}{\partial y} - a\, v\Big) d y + v(\varphi + b\, \bar{u})\, d x\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Das erste Integral läßt sich auswerten und hebt sich gegen die vorausgehenden Terme weg. Es bleibt das zweite Integral. Nun ist aber $\frac{\partial v}{\partial y} - a\, v$ eine nach x stetig differenzierbare Funktion, die wegen (22a) in A_2 verschwindet; also gilt eine Abschätzung der folgenden Form:

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y} - a\, v\right| < M\, |x - \xi| \leqq M\, |\delta|.$$

---

1) Worin das links auftretende $\frac{\partial}{\partial \xi}$ nur die Differentiation nach dem explizite auftretenden Parameter (d. h. dem dritten Argument von v) bedeuten soll.

Auf dem Integrationswege $A_2 A_2'$ ist folglich

$$\left|\frac{1}{\delta}\int_{A_2}^{A_2'} \bar{u}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a v\right) d y\right| \leqq \left|\int_{A_2'}^{A_2} |\bar{u}|\, M\, d y\right| \to 0$$

mit $\delta \to 0$, d. h. mit $A_2' \to A_2$. Dagegen ist nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{1}{\delta}\int_{A_2}^{A_2'} v(\varphi + b\bar{u})\, d x = \frac{[v(\varphi + b\bar{u})]^*}{\delta}\int_{A_2}^{A_2'} d x = [v(\varphi + b\bar{u})]^*,$$

wo $[v(\varphi + b\bar{u})]^*$ einen gewissen zwischen A_2 und A_2' auf Γ angenommenen Wert von $v(\varphi + b\bar{u})$ bedeuten möge. Der gesamte Limesausdruck ergibt daher:

$$v(A_2; \xi, \eta)[\varphi(A_2) + b(A_2)\bar{u}(A_2)].$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von $u(\xi, \eta)$ nach ξ erwiesen, und zwar hat man

$$\text{(27a)}\quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left\{\bar{u}(A_1)\frac{\partial v(A_1; \xi, \eta)}{\partial \xi} + \bar{u}(A_2)\frac{\partial v(A_2; \xi, \eta)}{\partial \xi}\right\}$$
$$+ v(A_2; \xi, \eta)[\varphi(A_2) + b(A_2)\bar{u}(A_2)] - \int_{A_1}^{A_2}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi} d y - \frac{\partial Q}{\partial \xi} d x\right).$$

Ebenso findet man

$$\text{(27b)}\quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left\{\bar{u}(A_1)\frac{\partial v(A_1; \xi, \eta)}{\partial \eta} + \bar{u}(A_2)\frac{\partial v(A_2; \xi, \eta)}{\partial \eta}\right\}$$
$$+ v(A_1; \xi, \eta)[\psi(A_1) + a(A_1)\bar{u}(A_1)] - \int_{A_1}^{A_2}\left(\frac{\partial P}{\partial \eta} d y - \frac{\partial Q}{\partial \eta} d x\right)!$$

Bei abermaliger Differentiation ändern sich die Überlegungen nicht; (27b) ergibt, nach ξ differenziert,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{2}\left\{\bar{u}(A_1)\frac{\partial^2 v(A_1; \xi, \eta)}{\partial \xi\, \partial \eta} + \bar{u}(A_2)\frac{\partial^2 v(A_2; \xi, \eta)}{\partial \xi\, \partial \eta}\right.$$
$$\left. + \lim_{\delta \to 0}\frac{1}{\delta}\left[\bar{u}(A_2')\frac{\partial v(A_2'; \xi, \eta)}{\partial \eta} - \bar{u}(A_2)\frac{\partial v(A_2; \xi, \eta)}{\partial \eta}\right]\right\}$$
$$+ \frac{\partial v(A_1; \xi, \eta)}{\partial \xi}[\psi(A_1) + a(A_1)\bar{u}(A_1)]$$
$$- \int_{A_1}^{A_2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi\, \partial \eta} d y - \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} d x\right) - \lim_{\delta \to 0}\frac{1}{\delta}\int_{A_2}^{A_2'}\left(\frac{\partial P}{\partial \eta} d y - \frac{\partial Q}{\partial \eta} d x\right).$$

Unter dem Limeszeichen stehen noch die nach (18) umgeformten Ausdrücke

$$\frac{1}{\delta}\left\{\frac{1}{2}\left[\bar{u}(A_2')\frac{\partial v(A_2';\xi,\eta)}{\partial\eta}-\bar{u}(A_2)\frac{\partial v(A_2;\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{A_2}^{A_2'}\left[\frac{\partial^2(\bar{u}v)}{\partial\eta\,\partial y}dy+\frac{\partial^2(\bar{u}v)}{\partial\eta\,\partial x}dx\right]+\int_{A_2}^{A_2'}\left[\bar{u}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)dy\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial\eta}(\varphi+b\bar{u})\,dx\right]\right\}.$$

Hierin heben sich das erste Integral und der vorangehende Term gegenseitig. Nach (22a) ist in A_2, d. h. für $x=\xi$,

$$\frac{\partial v(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}-a(x,y)\,v(x,y;\xi,\eta)=0,$$

also auch

$$\frac{\partial^2 v(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta\,\partial y}-a(x,y)\frac{\partial v(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta}=0.$$

Der hier rechts stehende Ausdruck ist nach x differenzierbar, also

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|<N\,|x-\xi|\leqq N\,|\delta|$$

auf dem Integrationswege von A_2 bis A_2'. Der ganze Limesausdruck geht daher über in

$$\frac{\partial v(A_2;\xi,\eta)}{\partial\eta}[\varphi(A_2)+b(A_2)\bar{u}(A_2)],$$

so daß man schließlich hat:

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}&=\frac{1}{2}\left\{\bar{u}(A_1)\frac{\partial^2 v(A_1;\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}+\bar{u}(A_2)\frac{\partial^2 v(A_2;\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right\}\\&\quad+\frac{\partial v(A_1;\xi,\eta)}{\partial\xi}[\psi(A_1)+a(A_1)\bar{u}(A_1)]\\&\quad+\frac{\partial v(A_2;\xi,\eta)}{\partial\eta}[\varphi(A_2)+b(A_2)\bar{u}(A_2)]\\&\quad-\int_{A_1}^{A_2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\,\partial\eta}dy-\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\,\partial\eta}dx\right).\end{aligned}\right.$$

Wenn wir nun aus (23), (27) und (28)

$$L(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)$$

bilden, so erhalten wir nach gehöriger Zusammenfassung

$$L(u) \equiv \tfrac{1}{2}\{\bar{u}(A_1)L^*[v(A_1;\xi,\eta)] + \bar{u}(A_2)L^*[v(A_2;\xi,\eta)]\} - \int_{A_1}^{A_2}[L^*(P)\,dy - L^*(Q)\,dx]$$
$$+ \left[\frac{\partial v(A_2;\xi,\eta)}{\partial \eta} + a(\xi,\eta)v(A_2;\xi,\eta)\right]\Phi + \left[\frac{\partial v(A_1;\xi,\eta)}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)v(A_1;\xi,\eta)\right]\Psi,$$

worin zur Abkürzung

$$\Phi = \varphi(A_2) + b(A_2)\bar{u}(A_2), \qquad \Psi = \psi(A_1) + a(A_1)\bar{u}(A_1)$$

gesetzt ist und das Zeichen L^* bedeuten soll, daß die Differentialoperation L nach den Parametern ξ und η ausgeführt werden soll. Wegen der Symmetrieeigenschaft der Riemannschen Funktion ist $L^*[v(A_1;\xi,\eta)] \equiv 0, L^*[v(A_2;\xi,\eta)] \equiv 0$. Da ferner P und Q linear homogen in $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sind und L selbst linear homogen ist, so ist auch $L^*(P) \equiv 0$, $L^*(Q) \equiv 0$, so daß nur noch bleibt

$$L(u) \equiv \left[\frac{\partial v(A_2;\xi,\eta)}{\partial \eta} + a(\xi,\eta)v(A_2;\xi,\eta)\right]\Phi + \left[\frac{\partial v(A_1;\xi,\eta)}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)v(A_1;\xi,\eta)\right]\Psi. \tag{29}$$

Nun ist aber $v(A_1;\xi,\eta)$ die Riemannsche Funktion $u(\xi,\eta;A_1)$ der adjungierten Gleichung. Daher gilt nach (25a)

$$\frac{\partial u(\xi,\eta;A_1)}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)u(\xi,\eta;A_1) = 0$$

auf der durch A_1 gehenden Geraden parallel zur ξ-Achse und

$$\frac{\partial u(\xi,\eta;A_2)}{\partial \eta} + a(\xi,\eta)u(\xi,\eta;A_2) = 0$$

auf der Parallelen zur η-Achse durch A_2, also verschwinden die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (29) speziell im Punkt A, daher gilt

$$L(u) \equiv 0,$$

was bewiesen werden sollte.

Daß nun die durch (23) dargestellte Lösung die gegebenen Randwerte wirklich annimmt, folgt leicht aus der Voraussetzung, daß die Kurve Γ monoton ist. Wenn nämlich $A \to A_0$ auf Γ rückt, so gehen auch $A_1 \to A_0$ und $A_2 \to A_0$ und folglich

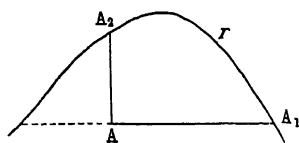
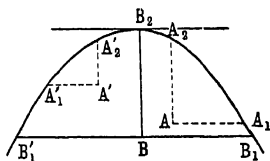
$$v(A_1;\xi,\eta) \to v(A_0, A_0) = 1 \text{ und ebenso } v(A_2;\xi,\eta) \to 1.$$

Der Integrationsweg des in (23) auftretenden Integrals schrumpft aber auf einen Punkt zusammen, so daß $u(\xi,\eta) \to \bar{u}(A_0)$ evident wird. Weiter zeigt (27a)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \to \bar{u}(A_0)\left[\frac{\partial v(A_0;\xi,\eta)}{\partial \xi} + b(A_0)v(A_0;\xi,\eta)\right]_{A_0} + v(A_0;A_0)\varphi(A_0),$$

worin die Klammer nach der eben gemachten Überlegung verschwindet, so daß $\frac{\partial u}{\partial \xi} \to \varphi(A_0)$ bleibt; ebenso folgt natürlich $\frac{\partial u}{\partial \eta} \to \psi(A_0)$.

Die Formel (23) liefert also die eindeutige Lösung, die sich samt ihren ersten Ableitungen an die vorgeschriebenen Randwerte stetig anschließt.

7. Allgemeinere Ränder. Die bisherigen Entwicklungen gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Kurve Γ von jeder Charakteristik in höchstens einem Punkte geschnitten wird. Nun haben wir aber in

dem Beispiel der Saite von endlicher Länge eine Begrenzungskurve angetroffen, die von jeder Charakteristik, die durch einen inneren Punkt des Gebietes geht, zweimal geschnitten wird. Wir konnten in jenem Falle die einzig mögliche Lösung durch passende Verfügung über die ersten Ableitungen am Rande aufstellen. Das soll im folgenden in allgemeiner Weise durchgeführt werden.

Die Voraussetzung, daß Γ von jeder Charakteristik höchstens in einem Punkte geschnitten wird, ist nur benutzt worden, um den stetigen Anschluß an die Randwerte zu beweisen. Wird Γ etwa von einigen Charakteristiken $y =$ konst zweimal geschnitten (Fig. 77), so ist der Punkt A_1 nicht mehr eindeutig bestimmt. Dennoch aber kann man die einzig mögliche Lösung aufschreiben, wenn man sich für zwei von A ausgehende Charakteristikenstrahlen entschieden hat, derart, daß von A aus gesehen der Bogen $A_1 A_2$ immer in dem gleichen Quadranten liegt. Bei diesem Verfahren tritt aber die Schwierigkeit auf, daß, sobald A gegen den Rand rückt, A_1 und A_2 nicht mehr gegen den gleichen Randpunkt zu konvergieren brauchen.

Um diesen Sachverhalt durchsichtig zu machen, konstruieren wir die Lösung auf andere Weise (Fig. 78). Es sei B_2 der höchste Punkt

der Kurve in der y-Richtung. In den beiden dreieckartigen Bereichen $B B_1 B_2$ und $B B_1' B_2$ ist die Bestimmung von u auf die alte eindeutige Weise möglich. Diese in beiden Dreiecksbereichen für sich bestimmten Lösungen müssen sich aber längs $B B_2$ regulär aneinanderschließen. Eine Bedingung dafür ist:

$$(30)\quad u(B) = \tfrac{1}{2}\{\bar{u}(B_1)v(B_1; B) + \bar{u}(B_2)v(B_2; B)\} - \int_{B_1}^{B_2}(P\,dy - Q\,dx)$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\bar{u}(B_1')v(B_1'; B) + \bar{u}(B_2)v(B_2; B)\} - \int_{B_1'}^{B_2}(P\,dy - Q\,dx),$$

worin B auf der durch den festen Punkt B_2 gehenden Charakteristik variieren kann. Durch diese Gleichung ist eine Einschränkung der Willkürlichkeit der Randwerte auf beiden Bogen $B_1' B_2$ und $B_1 B_2$ gegeben.

Auf $B_1 B_2$ seien nun wieder wie bisher $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ und dazu in einem Punkte der Wert $\bar{u}$ vorgeschrieben. Dann ist u auf ganz $B B_2$ festgelegt und durch (23) bestimmt. Wir behaupten, daß man den regulären Anschluß von u in dem anderen Dreiecksbereich längs $B B_2$ dann erreichen kann, wenn auf $B_1' B_2$ nur $\bar{u}$ allein mit stetigem Anschluß in B_2 gegeben ist. Wir werden zeigen, daß dann $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ längs $B_1' B_2$ stetig und nur auf eine Weise so zu bestimmen sind, daß u den geforderten Anschluß längs $B B_2$ aufweist.

Zunächst ist nach (18) und (30)

$$(31)\qquad u(B) = \bar{u}(B_2)v(B_2; B) + \int_{B_2}^{B_1'}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + a\bar{u}\right)dy + \bar{u}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b v\right)dx\right].$$

Das Kurvenstück $B_1' B_2$ habe die Gleichung $x = f(y)$, und $\bar{u}$ sei darauf als Funktion $\bar{u} = g(y)$ gegeben. Die Koordinaten von B seien ξ_2, η, die von B_1': $f(\eta), \eta$ und die von B_2: ξ_2, η_2. Setzen wir noch die gesuchte Funktion $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \psi(y)$, so ist nach (31)

$$u(\xi_2, \eta) = g(\eta_2)v(\xi_2, \eta_2; \xi_2, \eta)$$

$$+ \int_{\xi_2, \eta_2}^{f(\eta), \eta}\left[a(x, y)v(x, y; \xi_2, \eta)g(y)\,dy + g(y)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b(x, y)v\right)dx\right]$$

$$+ \int_{\eta_2}^{\eta} v[f(y), y; \xi_2, \eta]\,\psi(y)\,dy.$$

Der Term links und die beiden ersten Terme rechts sind bekannte Funktionen von η. Fassen wir diese in $\Phi(\eta)$ zusammen und setzen noch zur Abkürzung $v[f(y), y; \xi_2, \eta] = K(y, \eta)$, so haben wir für $\psi(y)$ die Gleichung

$$\Phi(\eta) = \int_{\eta_2}^{\eta} K(y, \eta)\psi(y)\,dy. \tag{32}$$

Dies ist eine Integralgleichung vom Volterraschen Typus, die sich durch Differentiation nach η sofort in eine solche „zweiter Art" verwandeln läßt:

$$\frac{\Phi'(\eta)}{K(\eta, \eta)} = \psi(\eta) + \int_{\eta_2}^{\eta} \frac{\partial K(y, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{K(\eta, \eta)} \psi(y)\,dy$$ [1].

Eine solche Integralgleichung hat stets eine und nur eine Lösung (vgl. XII, § 2, 2).

Zu $\psi(y) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ bestimmen wir noch $\varphi(y) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ aus:

$$g(\eta) - g(\eta_2) = \int_{B_2}^{B_1'} (\varphi(y)\,dx + \psi(y)\,dy),$$

woraus unter Annahme der Differenzierbarkeit von $f(y)$ folgt:

$$g'(\eta) = \varphi(\eta) f'(\eta) + \psi(\eta). \tag{33}$$

Da (32) mit (31) äquivalent ist, so ist durch (32) längs $B_2 B$ die Übereinstimmung der beiderseitigen Werte von u selbst gesichert, infolgedessen offenbar auch die von $\frac{\partial u}{\partial y}$. Um auch den stetigen Anschluß von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ zu erreichen, werde $g(\eta)$ noch der Bedingung unterworfen, daß (33) in B_2 mit denjenigen Werten von $\varphi(\eta)$ und $\psi(\eta)$ gilt, gegen die diese Funktionen von dem Bogen $B_1 B_2$ ausgehend, gegen B_2 strebend konvergieren. Also

$$g'(\eta_2) = \varphi(\eta_2) f'(\eta_2) + \psi(\eta_2), \tag{34}$$

was im Falle $f'(\eta_2) = \infty$ bedeuten soll, daß

$$\left.\frac{d g[y(x)]}{dx}\right|_{x=\xi_2} = \varphi(\eta_2)$$

---

[1]) Daß $K(\eta, \eta)$ nicht verschwinden kann, folgt aus (22b).

ist. Dann stimmt also auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ in B_2 auf beiden Seiten von $B_2 B$ überein. Nun ist aber überall

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Auf jeder Vertikalen ist also $\frac{\partial u}{\partial x}$ durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung festgelegt[1]), speziell also auch auf BB_2. Da nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ in B_2 eindeutig ist, so daher auch längs ganz BB_2 und folglich ist auch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - cu$$

auf BB_2 eindeutig, von welcher Seite man auch kommt.

Damit ist der Nachweis geführt, daß auch auf $B_1' B_2$ $\bar{u} = g(y)$ bis auf die Anschlußbedingung (34) willkürlich gegeben werden kann, wenn $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ auf $B_1 B_2$ vorgeschrieben sind. Die Lösung ist eindeutig, da durch den angegebenen Prozeß auf der ganzen Kurve $B_1 B_2 B_1'$ u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ festgelegt ist.

8. Die Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir behandeln nun noch ein Beispiel, in dem die Riemannsche Funktion nicht trivial ausfällt. Die nächstliegende Verallgemeinerung der Gleichung der schwingenden Saite ist die Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0. \tag{35}$$

Setzen wir hier

$$u = z e^{-ay-bx}, \tag{36}$$

so geht für z die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_1 z = 0 \tag{37}$$

mit $c_1 = c - ab$ hervor. Diese Gleichung ist sich selbst adjungiert. Für die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ ist vorgeschrieben

$$v(\xi + x, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad v(\xi, \eta + y; \xi, \eta) = 1,$$

und zwar soll das für alle ξ, η gelten. Diese Randbedingungen hängen ebensowenig wie die Gl. (37) von ξ, η ab. Setzt man $\xi + x = x'$

[1]) Picard, Journ. de l'École Norm. (3) **22** (1905), S. 471—474.

und $\eta + y = y'$, so wird also auch $v(x', y'; \xi, \eta)$ nicht von ξ, η abhängen, sondern gleich $v(x', y'; 0, 0) = v(x', y')$ sein. Die Randbedingungen kann man kurz schreiben $v(x', y') = 1$ für $x'.y' = 0$. Da die Randwerte also nur von $x'.y' = \zeta$ abhängen, liegt es nahe, den Ansatz $v(x', y') = w(x'.y') = w(\zeta)$ zu machen. Dann ist vorgeschrieben $w(0) = 1$ und aus (37) wird

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2}\zeta + \frac{dw}{d\zeta} + c_1 w = 0$$

Diese Gleichung ist vom Besselschen Typus (vgl. VI, § 4, **4** und VIII, § 3, **1**). Ihr wird genügt durch die überall konvergente Potenzreihe

$$w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c_1\zeta)^n}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{c_1\zeta}).$$

wo J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist. Wir haben also $v(x', y') = J_0(2\sqrt{c_1 x' y'})$, also

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(2\sqrt{c_1(x-\xi)(y-\eta)}). \tag{38}$$

Hiernach kann man (23) und (18) heranziehen und erhält, wenn man bedenkt, daß v auf AA_1 und AA_2 konstant gleich 1 ist:

$$z(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\{z(A_1) + z(A_2)\} - \frac{1}{2}\int_{A_1}^{A_2}\left[\left(v\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy - \left(v\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\right], \tag{39}$$

und hieraus durch (38) die allgemeine Lösung von (37).

Physikalisch interessant ist vor allem die Gleichung, die man aus der „Telegraphengleichung"

$$c^2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - \alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{40}$$

erhält (U Stromstärke in einem linearen Leiter, α^2 Selbstinduktionskoeffizient, 2β Ohmscher Widerstand, c^2 reziproker Wert der Kapazität). Macht man die Substitution

$$x = \frac{\beta}{2\alpha c}s - \frac{\beta}{2\alpha^2}t, \quad y = \frac{\beta}{2\alpha c}s + \frac{\beta}{2\alpha^2}t, \qquad U(s,t) = u(x,y), \tag{41}$$

so geht hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hervor und daraus durch $u = z.e^{x-y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + z = 0.$$

Für $t = 0$ sei auf der ganzen s-Achse der Anfangszustand $U(s) = f(s)$ und $\frac{\partial U}{\partial t} = g(s)$ gegeben. Die Gerade $t = 0$ ist im xy-System die Gerade $x = y$. Tragen wir dies in (39) ein, so kommt

$$z(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\{z(\xi, \xi) + z(\eta, \eta)\} + \tfrac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta}\left[v\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) - z\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dx.$$

Im st-Koordinatensystem möge der Punkt $A = (\xi, \eta)$ die Koordinaten σ, τ haben. Der Punkt $A_1 = (\eta, \eta)$ hat dann nach (41) die Koordinaten $\left(\sigma + \frac{c}{\alpha}\tau, 0\right)$ und der Punkt $A_2 = (\xi, \xi)$ die Koordinaten $\left(\sigma - \frac{c}{\alpha}\tau, 0\right)$. Ferner ist

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{2\alpha^2}{\beta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{2\alpha^2}{\beta},$$

$$z = U e^{t\frac{\beta}{\alpha^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\beta}{\alpha^2}\right) e^{t\frac{\beta}{\alpha^2}},$$

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\frac{\beta}{\alpha c}\sqrt{(s-\sigma)^2 - \frac{c^2}{\alpha^2}(t-\tau)^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -J_0' \cdot \frac{\beta c}{\alpha^3}\frac{t-\tau}{\sqrt{(s-\sigma)^2 - \frac{c^2}{\alpha^2}(t-\tau)^2}}.$$

Endlich ist auf der Geraden $x = y$: $t = 0$ und $s = 2x\,\frac{\alpha c}{\beta}$, also

$$U(\sigma, \tau) = z(\sigma, \tau)e^{-\tau\frac{\beta}{\alpha^2}} = \tfrac{1}{2}e^{-\tau\frac{\beta}{\alpha^2}}\Bigg\{f\left(\sigma + \frac{c}{\alpha}\tau\right) + f\left(\sigma - \frac{c}{\alpha}\tau\right)$$

$$+ \frac{\alpha}{c}\int_{\sigma - \frac{c}{\alpha}\tau}^{\sigma + \frac{c}{\alpha}\tau}\left[g(s) + f(s)\frac{\beta}{\alpha^2}\right] J_0\left(\frac{\beta}{\alpha c}\sqrt{(s-\sigma)^2 - \left(\frac{c\tau}{\alpha}\right)^2}\right) ds$$

$$- \frac{\beta}{\alpha^2}\int_{\sigma - \frac{c}{\alpha}\tau}^{\sigma + \frac{c}{\alpha}\tau} f(s) J_0'\left(\frac{\beta}{\alpha c}\sqrt{(s-\sigma)^2 - \left(\frac{c\tau}{\alpha}\right)^2}\right)\frac{\tau}{\sqrt{(s-\sigma)^2 - \left(\frac{c\tau}{\alpha}\right)^2}}\,ds\Bigg\}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung von (40) unter den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen.

9. Eine zweite Randwertaufgabe. Während bisher auf einer einzigen Kurve sowohl der Wert der gesuchten Funktion als auch ihre Normalableitung gegeben sein mußte, wollen wir jetzt mit Hilfe der Riemannschen Methode die Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung konstruieren, wenn allein der Wert der gesuchten Funktion vorgegeben ist, und zwar auf je einem Stück der beiden von einem Punkte O ausgehenden Charakteristiken. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_1 z = 0, \tag{37}$$

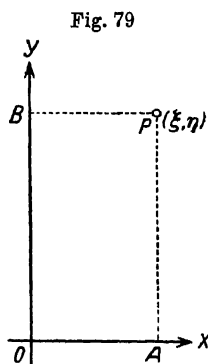
auf die man nach 8 jede lineare hyperbolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten durch elementare Substitutionen zurückführen kann. Da hier die Linien $x = \text{konst}$ und $y = \text{konst}$ die Charakteristiken sind, entsteht so das folgende Problem: Auf der x- und y-Achse sind vom Nullpunkt beginnend die Werte $z(x, 0) = f(x)$ und $z(0, y) = g(y)$ vorgeschrieben; es ist der Wert $z(\xi, \eta)$ für einen beliebigen Punkt ξ, η zu bestimmen.

Wir wenden die allgemeine Greensche Formel (20), die sich in unserem speziellen Falle zu

$$\oint_S \left[\left(v\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy - \left(v\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\right] = 0 \tag{42}$$

vereinfacht, auf das nur von Charakteristiken begrenzte Rechteck der Fig. 79 an. Die Funktion v sei dabei wieder die in (38) explizit angeschriebene Riemannsche Funktion, die längs BP und AP den Wert 1 annimmt. Längs AP und PB erhält man wie früher, weil auf diesen beiden Charakteristiken überdies dx bzw. dy verschwindet, für das Integral (42) den Wert $z(\xi, \eta) - z(\xi, 0)$ bzw. $z(\xi, \eta) - z(0, \eta)$. Längs OA ist $dy = 0$, daher fällt in (42) gerade das Glied fort, welches die nicht unmittelbar gegebene Ableitung $\frac{\partial z}{\partial y}$ enthält, und

Fig. 79

es bleibt nur übrig $-\int_0^\xi \left(vf' - f\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$, wo f und f' gegeben und die Riemannsche Funktion v nebst ihrer Ableitung $\frac{\partial v}{\partial x}$ nach (38) bekannt ist. Auf gleiche Weise erhält das

Integral (42) längs BO den Wert $\int\limits_0^\eta \left(g\frac{\partial v}{\partial y} - vg'\right)dy$. Man erhält also schließlich zur Berechnung von $z(\xi, \eta)$ die mit (39) gleichgebaute Formel

$$z(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(f(\xi) + g(\eta)) + \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\xi \left(vf' - f\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \int\limits_0^\eta \left(vg' - g\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\right]. \tag{43}$$

Von dieser Formel wird bei vielen Aufgaben in der Elektrizitätstheorie Gebrauch gemacht, vor allem aber auch in der ebenen Theorie des plastisch deformablen Körpers [1]).

10. Abschließende Bemerkungen über elliptische und hyperbolische Gleichungen. Wir haben durch die Riemannsche Methode für die hyperbolischen Gleichungen eigentlich das Cauchysche Anfangswertproblem gelöst, allerdings darin über die Entwicklungen des Kapitels XV hinausgehend, daß wir hier den Geltungsbereich der Lösung ganz allgemein von vornherein angeben konnten. Bei den physikalischen Problemen pflegen die rein räumlichen, die also einen von der Zeit unabhängigen Zustand beschreiben, auf elliptische Gleichungen zu führen, und diese liefern die eigentlichen Randwertprobleme, in denen aus der Kenntnis des physikalischen Zustandes auf der Begrenzung des Raumstückes auf den Zustand in seinem Innern geschlossen wird. Die Zeit als Variable aber legt an sich ein Anfangswertproblem nahe: gegeben ein Zustand und seine Veränderungstendenz zur Zeit $t = 0$, was wird aus ihm zu einer späteren Zeit geworden sein? Und nur in seltenen Fragestellungen der Physik wird aus der Kenntnis eines Zustandes zu zwei verschiedenen Zeiten auf den dazwischenliegenden Ablauf geschlossen, was zu einem eigentlichen Randwertproblem führen müßte.

Der mathematische Unterschied der imaginären und reellen Charakteristiken macht sich vor allem darin geltend, daß alle Lösungen elliptischer Gleichungen mit analytischen Koeffizientenfunktionen analytisch sind, wie auch die Randwerte beschaffen sein mögen, während die Lösungen der hyperbolischen Gleichungen in hohem Maße an Regularitätsdefekten ihrer Randwerte teilhaben. Das zeigt unsere

---

[1]) Vgl. z. B. C. Carathéodory und E. Schmidt, Über die Hencky-Prandtlschen Kurvenscharen, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3** (1923), S. 468—475.

allgemeine Formel (23) aufs klarste. Nach ihr hängen die Werte der Lösung in einem Punkte nur ab von den Werten auf demjenigen Randstück, das zwischen den beiden durch den betrachteten Punkt hindurchgehenden Charakteristiken liegt. Eine Abänderung der Randwerte an einer anderen Stelle des Randes ändert nichts in dem betreffenden Punkte. Unstetigkeiten vom Rande pflanzen sich daher längs der Charakteristiken in das Innere fort. Die Lage der Singularitäten elliptischer Gleichungen ist dagegen völlig beliebig [1]).

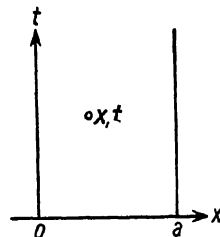
Verallgemeinerungen der Riemannschen Methode auf den Raum sind mehrfach gegeben worden; siehe z. B. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique III (1923), S. 158—166, wo man auch weitere Literaturnachweise findet.

§ 5. Die Heavisidesche Integrationsmethode

1. Die mathematischen Grundlagen des Ansatzes von Heaviside. Die Methode von Heaviside ist anwendbar auf homogene partielle Differentialgleichungen beliebig hoher endlicher Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, wenn sämtliche auftretenden Koeffizienten konstant sind. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem Falle einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir allgemein so anschreiben können:

$$(1)\quad a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+a_{01}\frac{\partial u}{\partial t}+a_{02}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{00}u=0.$$

Diese Gleichung soll integriert werden unter folgenden Randbedingungen: Es werden x-Werte betrachtet, für die $0 \leqq x \leqq a$ ist (Fig. 80), wobei a auch unendlich sein kann; ferner soll t von 0 bis unendlich laufen. Für $t = 0$ sei $u(x, 0) \equiv 0$. Ferner sei $u(a, t) \equiv 0$ und $u(0, t) = \varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion sei, die für $t = 0$ verschwindet.

Fig. 80

Der Grundgedanke der Heavisideschen Lösungsmethode ist der, daß man die Lösung von (1) zunächst bestimmt unter der Annahme, daß die Funktion $\varphi(t)$ für $t < 0$ verschwindet [was ja für jedes $u_0(t)$ angenommen werden muß], für $t = 0$ plötzlich auf den Wert 1 springt und diesen für alle positiven t-Werte beibehält. Diese Funktion wollen wir $\sigma(t)$ nennen [2]).

---

[1]) Siehe z. B. Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Enzykl. d. Math. Wissensch. II, 1, 1a, S. 533.

[2]) Im Falle der Telegraphengleichung entspricht diesem $\sigma(t)$ ein sogenannter Strom- oder Spannungsstoß, je nachdem ob u Stromstärke oder Spannung bedeutet.

Wir zeigen zunächst, daß die Funktion $\sigma(t)$ durch ein Integral in der komplexen p-Ebene darstellbar ist:

$$(2) \qquad \sigma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\S} \frac{e^{tp}}{p} dp,$$

das sogenannte „Hakenintegral"; der Integrationsweg ist dabei die ganze imaginäre Achse, welche nur durch einen nach rechts ausbiegenden Halbkreis von beliebigem Radius um den Nullpunkt unterbrochen wird, wodurch der bei $p = 0$ vorhandene Pol des Integranden links vom Integrationsweg bleibt. Zum Beweis von (2) erstrecken wir für negative t-Werte das Integral zunächst über den Hakenweg von $-Ri$ bis $+Ri$ und längs des Halbkreises über R. Da im Innern dieses geschlossenen Weges der Integrand regulär analytisch ist, verschwindet das Integral nach III, § 3, **2**. Mit wachsendem R geht nun bei negativem t das Halbkreisintegral gegen Null, so daß sich für negative t auch das Hakenintegral (2) zu Null ergibt. — Für positive t-Werte ergänzen wir das Hakenintegral von $-Ri$ bis $+Ri$ durch das Integral über den linken Halbkreis, welches mit wachsendem R gegen Null strebt. Der Wert des Gesamtintegrals, und damit der Grenzwert des Hakenintegrals (2), ist gleich dem $2\pi i$-fachen des Residuums des Integranden an der Stelle $p = 0$ (vgl. III, § 3, **6**), also gleich 1. Damit ist Formel (2) als richtig erkannt.

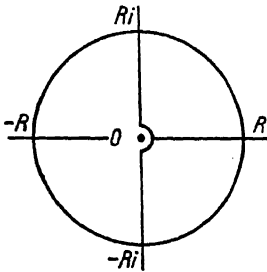



Fig. 81

Ri
-R
0
R
-Ri

Aus (2) folgt jetzt sofort die folgende Integraldarstellung unserer Funktion $\varphi(t)$:

$$(3) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^t \varphi'(\tau) \int\limits_{\S} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p} dp\, d\tau,$$

wobei übrigens die obere Grenze des ersten Integrals durch eine beliebige Zahl ersetzt werden kann, die größer ist als t.

Wir setzen jetzt als Lösung unserer Randwertaufgabe unter Einführung einer noch näher zu bestimmenden Funktion $\psi(x, p)$ formal an:

$$(4) \qquad u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^t \varphi'(\tau) \int\limits_{\S} \psi(x, p) \frac{e^{(t-\tau)p}}{p} dp\, d\tau$$

und finden durch formales Einsetzen in (1) als Bedingung für die neu eingeführte Funktion $\psi(x,p)$:

$$(5)\qquad a_{11}p^2\psi + a_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + a_{12}\,p\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_{01}p\psi + a_{02}\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_{00}\psi = 0.$$

Dabei ist die Differentiation nach der oberen Grenze des ersten Integrales nicht berücksichtigt, es muß also vorausgesetzt werden, daß $\int\limits_{\mathfrak{H}} \psi(x,p)\,\frac{1}{p}\,dp$ und eventuell noch $\int\limits_{\mathfrak{H}} \psi(x,p)\,dp$ verschwindet.

Im Falle $a_{22} \neq 0$ besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung (5) für ψ das allgemeine Integral

$$(6)\qquad \alpha_1(p)e^{q_1(p)\cdot x} + \alpha_2(p)e^{q_2(p)\cdot x},$$

wo $q_1(p)$ nnd $q_2(p)$ der folgenden quadratischen Gleichung genügen müssen:

$$(7)\qquad a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + a_{12}pq + a_{01}p + a_{02}q + a_{00} = 0.$$

(Im Falle, daß $a_{22} = 0$ ist, ist Gl. (7) linear in q, und in Gl. (6) bleibt nur einer der beiden Summanden stehen. In diesem Falle kann man daher die Bedingung $u(a,t) \equiv 0$ nicht immer befriedigen.)

Wir haben also jetzt rein formal:

$$(8)\qquad u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^t \varphi'(\tau)\int\limits_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\left(\alpha_1(p)e^{q_1(p)\cdot x} + \alpha_2(p)e^{q_2(p)\cdot x}\right)dp\,d\tau.$$

Damit nun für $x = 0$ $u(0,t) = \varphi(t)$ wird, muß offenbar gelten:

$$(9')\qquad \alpha_1(p) + \alpha_2(p) = 1.$$

Die bei $x = a$ zu erfüllende Randbedingung liefert

$$(9'')\qquad \alpha_1(p)e^{q_1(p)a} + \alpha_2(p)e^{q_2(p)a} = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß diese beiden Gleichungen für alle p-Werte auf unserem Hakenwege lösbar sind, d. h. daß dort die Determinante

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{q_1(p)a} & e^{q_2(p)a} \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfällt.

Wir werden nun in (8) wirklich eine Lösung unseres Randwertproblems besitzen, wenn 1. das in (8) auftretende Hakenintegral nebst seinen durch die Differentialgleichung (1) geforderten Differentialquotienten für alle Werte von $t-\tau$ konvergiert, 2. für $t-\tau < 0$ den Wert 0 annimmt und wenn 3. bei der ein- oder zweimaligen Differentiation von (8) nach t die von der Differentiation nach der oberen Grenze des ersten Integrals herrührenden Glieder fortfallen. Ob es außer der Lösung (8) noch weitere geben kann, ist hiermit natürlich noch nicht untersucht.

2. Die Heavisidesche Operatorenmethode. Die durch Heaviside begründete Operatorenmethode folgt im wesentlichen dem unter 1 geschilderten Gedankengang, doch verzichtet sie von vornherein auf jegliche Konvergenzbetrachtung. Es kommt vor, daß die rein formal angeschriebenen Ausdrücke keinen mathematischen Sinn mehr besitzen, daß aber das Endresultat trotzdem richtig ist, da sich eben oft die begangenen Fehler gegenseitig aufheben. So ist die Methode als rein heuristisch zu werten; ein erlangtes Endresultat ist entweder durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zu verifizieren oder auf anderem Wege zu begründen.

In der Sprache der Heavisideschen Methode hat man die unter 1 geschilderten Ergebnisse so auszudrücken: Man ersetze in der gegebenen Differentialgleichung (1) den Ausdruck $\frac{\partial}{\partial t}$ durch den Operator p, der im Verlauf der Rechnung dann wie eine gewöhnliche komplexe Zahl behandelt wird. So hat man also z. B. $\frac{\partial^{\nu+\mu} u}{\partial t^\nu \partial x^\mu}$ zu ersetzen durch $p^\nu \frac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu}$ und $\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}$ durch $p^\nu u$. Auf diese Weise erhält man Gl. (5), in der wir u durch ψ ersetzt haben. Man hat jetzt wie unter 1 die durch die Randbedingungen festgelegte Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung aufzustellen, die eine Funktion $\frac{1}{H(x,p)}$ ($= \psi(x,p)$ bei uns) wird. Die so gefundene „Operation" $\frac{1}{H(x,p)}$ hat man nun auf die Funktion $\varphi(t)$, in die $u(x,t)$ für $x = 0$ übergehen soll, anzuwenden. Darunter ist zu verstehen, daß man formal den Ausdruck

$$(11) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau) \int_{\mathfrak{S}} \frac{1}{H(x,p)} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\, dp\, d\tau$$

zu bilden hat, der für $\frac{1}{H(x,p)} \equiv \psi(x,p)$ in unseren Ausdruck (4) bzw. (8) übergeht.

Nach unseren an Gl. (2) angeschlossenen Überlegungen wird dieses Integral stets einen Sinn haben, wenn die Funktion $\frac{1}{H(x,p)}$ als Funktion von p außerhalb eines genügend großen Kreises um den Ursprung eindeutig ist, ferner bis auf endlich viele Stellen, die alle innerhalb dieses Kreises liegen, analytisch ist, außerhalb dieses Kreises dem absoluten Betrage nach also unterhalb einer festen end-

lichen Schranke liegt. Man hat dabei nur den Hakenweg so zu wählen, daß sämtliche Ausnahmepunkte links von ihm liegen, was man durch Vergrößerung des Radius seines Halbkreises erreichen kann.

Die eben formulierte Bedingung ist für die Operation $\frac{1}{H(x,p)} \equiv p$, die wir zuerst auf andere Weise definiert haben, nicht erfüllt, so daß für diese das Integral (11) im allgemeinen nicht konvergieren wird. Für $\frac{1}{H(x,p)} \equiv \frac{1}{p}$ erhält man z. B.

$$(12)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\cdot\frac{1}{p}\,dp\,d\tau = \int_0^t \varphi'(\tau)(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau,$$

für $\frac{1}{H(x,p)} \equiv \frac{1}{p^2}$ erhält man auf gleiche Weise $\int_0^t\int_0^\tau \varphi(\varrho)\,d\varrho\,d\tau$ usw.

Die Methode von Heaviside ist jetzt eigentlich nur als eine Methode zur Ausrechnung des Integrales (11) bei einer bekannten Funktion $\frac{1}{H(x,p)}$ aufzufassen. Wir werden einige der wichtigsten Auswertungsmethoden zusammenstellen und einige Bemerkungen über deren Gültigkeitsbereich daran anknüpfen, über den sich die Operatorenmethode selbst grundsätzlich nicht Rechenschaft ablegt.

3. Methoden zur Auswertung des Heavisideschen Integrals. a) Die einfachste Methode ist die der Potenzreihenentwicklung. Wir wollen annehmen, daß sich die Funktion $\frac{1}{H(x,p)}$ im Äußeren eines genügend großen Kreises vom Radius P nach Potenzen von $1/p$ entwickeln läßt:

$$(13)\qquad \frac{1}{H(x,p)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(x)\,\frac{1}{p^\nu}.$$

Dann ist bei geeigneter Wahl des Hakenweges für $t-\tau > 0$ nach dem Residuumsatz (III, § 3, 6)

$$(14)\quad h(x,t-\tau) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,\frac{1}{H(x,p)}\,dp = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(x)\,\frac{(t-\tau)^\nu}{\nu!},$$

wie man findet, wenn man jeden einzelnen Summanden nach der Formel

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} c_\nu(x)\,\frac{1}{p^\nu}\,\frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp = \frac{(t-\tau)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,c_\nu(x)$$

behandelt. Für $t-\tau < 0$ verschwinden die Ausdrücke (14) und (15).

Diese Rechenmethode wird nun in der Operatorenrechnung, eigentlich unerlaubterweise, auch oft angewandt, wenn die Entwicklung (13) auch Potenzen von $p, \sqrt{p}$ usw. enthält, indem dann ebenfalls die jetzt unrichtige Formel (15) bei der gliedweisen Integration benutzt wird, für einen Ausdruck mit $\sqrt{p}$ also z. B. für $\nu = -\frac{1}{2}$. (Vgl. dazu 5.)

b) Häufig anwendbar ist auch die Methode der **Partialbruchzerlegung**. Die Gleichung $p \cdot H(x, p) = 0$ habe im ganzen n Wurzeln $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mit den Vielfachheiten $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Diese mögen alle in einem genügend großen Kreise vom Radius P liegen. Zur Bestimmung des Hakenintegrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varsigma} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p} \frac{1}{H(x, p)} dp$$

haben wir für $t - \tau > 0$ die Residuen an den Stellen p_k zu berechnen. Für $t - \tau < 0$ verschwindet das Integral wieder. An der Stelle p_k läßt sich $\frac{1}{p \cdot H(x, p)}$ in der Form

$$\frac{1}{pH(x, p)} = \sum_{\nu_k=1}^{r_k} \frac{C_{\nu_k}^{(k)}(x)}{(p - p_k)^{\nu_k}} + \text{einer Potenzreihe in } p - p_k \tag{16}$$

darstellen. Benutzt man noch die Formel

$$e^{p(t-\tau)} = e^{p_k(t-\tau)} e^{(p-p_k)(t-\tau)}$$

$$= e^{p_k(t-\tau)} \left(1 + (p - p_k)(t - \tau) + \frac{1}{2!}(p - p_k)^2 (t - \tau)^2 + \cdots\right),$$

so erhält man unter Verwendung von (15) für $t - \tau > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varsigma} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p} \frac{1}{H(x, p)} dp = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu_k=1}^{r_k} C_{\nu_k}^{(k)} e^{p_k(t-\tau)} \frac{(t-\tau)^{\nu_k - 1}}{(\nu_k - 1)!}. \tag{17}$$

c) Von Bedeutung ist auch das folgende **Reziprozitätsgesetz** von **Carson**. Mit Hilfe der für positiven Realteil von p durch fortgesetzte partielle Integration beweisbaren Formel

$$\int_0^\infty \xi^\nu e^{-\xi p} d\xi = \frac{\nu!}{p^{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \tag{18}$$

erhält man für positiven Realteil von p unter den unter a) formulierten Voraussetzungen wegen (13) und (14)

$$\int_0^\infty h(x, t - \tau) e^{-(t-\tau)p} d(t - \tau) = \frac{1}{p \cdot H(x, p)}. \tag{19}$$

$\frac{1}{pH(x,p)}$ ist danach die Laplacesche Transformierte[1]) von $h(x, t-\tau)$.

Die Bedeutung der Beziehung (19) liegt darin, daß man die Laplaceschen Transformierten vieler Funktionen h kennt und daher auf diesem Wege zu vielen Funktionen H das zugehörige h bestimmen kann, womit die Auswertung des Hakenintegrals geleistet ist.

4. Die Telegraphengleichung[2]). Für einen, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, unendlich langen Draht ($0 \leqq x \leqq \infty$) sei in den üblichen Bezeichnungen L die Selbstinduktion pro Längeneinheit, W der Ohmsche Widerstand pro Längeneinheit und K die Kapazität pro Längeneinheit; alle drei Größen seien längs des Leiters konstant. Zwischen der Stromstärke J und der Spannung P in jedem Punkte des Leiters bestehen dann zu jeder Zeit die beiden Beziehungen

$$(20) \qquad \begin{cases} L\frac{\partial J}{\partial t} + WJ = -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ K\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \end{cases}$$

aus denen sich unter Einführung der Abkürzungen

$$(21) \qquad v^2 = \frac{1}{LK}, \quad \varrho = \frac{W}{2L}$$

die Telegraphengleichung

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\varrho}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

ergibt, der sowohl J als auch P genügen müssen.

Wir wollen das Problem unter den folgenden fundamental wichtigen Randbedingungen[3]) in Angriff nehmen:

$$(23) \qquad P(0,t) = \varphi(t), \quad P(\infty, t) = 0, \quad P(x,0) = 0 = J(x,0).$$

Gesucht sei die Stromstärke J zu jeder Zeit und an jedem Punkte des Drahtes.

---

[1]) Vgl. auch XI, § 2, **6**.

[2]) Vgl. hierzu: A. Korn, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. XXVI (1927), S. 71.

[3]) Unter anderen Randbedingungen wurde die Gleichung schon in X, § 3, **4** behandelt. Vgl. auch XVIII, § 4, **8**, **9**.

Analog (8) erhalten wir in unserem Falle die beiden Ausdrücke

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{S}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,\alpha_2(p)\,e^{-\gamma x}\,dp\,d\tau, \tag{24}$$

$$J(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{S}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,\beta_2(p)\,e^{-\gamma x}\,dp\,d\tau \tag{25}$$

mit

$$\gamma = +\frac{1}{v}\sqrt{p(p+2\varrho)}; \tag{26}$$

dabei sind, da P und damit auch J für $x = \infty$ verschwinden sollen, schon je die ersten Summanden $\alpha_1(p)e^{\gamma x}$ und $\beta_1(p)e^{\gamma x}$ durch Null ersetzt worden. Die Koeffizienten $\alpha_2(p)$ und $\beta_2(p)$ sind jetzt durch die für $x = 0$ vorgeschriebene Bedingung zu bestimmen, nach der sich $\alpha_2(p) = 1$ wie früher ergibt. Zur Bestimmung von $\beta_2(p)$ kann man nach der Operatorenmethode — wie man sich leicht überzeugt, erlaubterweise — einfach so vorgehen: Man ersetze die Gl. (20) unter Beachtung der Ansätze (24) und (25) durch die Operatorgleichungen

$$\begin{cases} Lp\beta_2(p) + W\beta_2(p) = \gamma, \\ Kp = \gamma\beta_2(p). \end{cases} \tag{27}$$

Aus der zweiten folgt sofort

$$\beta_2(p) = \frac{Kp}{\gamma}, \tag{28}$$

und dieser Wert befriedigt wegen (21) und (26) auch die erste Gleichung.

Wir werden nach den Bemerkungen von 2 in (24) und (25) die Lösung unseres Problems besitzen, wenn in demjenigen Blatt der zweiblättrigen Riemannschen Fläche von $\sqrt{p(p+2\varrho)}$, in dem γ den Wert (26) besitzt, für $x > 0$ die Funktionen

$$\begin{cases} e^{-\gamma x}, & pe^{-\gamma x}, & p^2 e^{-\gamma x}, & \gamma e^{-\gamma x}, & \gamma^2 e^{-\gamma x}, \\ \dfrac{p}{\gamma} e^{-\gamma x}, & \dfrac{p^2}{\gamma} e^{-\gamma x}, & \dfrac{p^3}{\gamma} e^{-\gamma x}, & pe^{-\gamma x}, & p\gamma e^{-\gamma x} \end{cases} \tag{29}$$

für $|p| \geqq P$ mit genügend großem P eindeutig und regulär analytisch, also auch beschränkt sind. Wir müssen diese vielen Funktionen untersuchen, weil sie bei den durch (22) geforderten Differentiationen unter dem Hakenintegral auftreten. Daß diese Forderungen erfüllt sind, bestätigt man leicht, da die beiden Verzweigungspunkte

der Riemannschen Fläche im Endlichen liegen. Für $x \neq 0$ fallen auch die von der Differentiation nach der oberen Grenze des ersten Integrals von (24) und (25) herrührenden Glieder fort. Zur Erfüllung der bei $x = 0$ vorgeschriebenen Randbedingung ist nur die Existenz des in (24) auftretenden Hakenintegrals notwendig, die wegen der Beschränktheit von $e^{-\gamma x}$ für $x = 0$ gewährleistet ist.

Wir formen jetzt noch die durch (25) und (28) gegebene Lösung J um. Es ist wegen (26) für $|p| \geqq P$

$$(30) \qquad \frac{K}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}} \frac{e^{p(t-\tau)-\gamma x}}{\gamma}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}} \frac{e^{p\left[(t-\tau)-\frac{x}{v}\right]}}{p}\cdot\frac{1}{H(x,p)}\,dp$$

mit

$$(31) \qquad \frac{1}{H(x,p)} = K\,.\,v\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\varrho}{p}}}\,e^{-\frac{xp}{v}\left[\sqrt{1+\frac{2\varrho}{p}}-1\right]}.$$

Nun kann man, wenn J_0 die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung (vgl. VIII, § 3) bezeichnet, die folgende Formel beweisen[1]):

$$(32) \qquad K v\int\limits_0^\infty e^{-\varrho\left(\alpha+\frac{x}{v}\right)} J_0\left(i\varrho\sqrt{\alpha^2+2\alpha\frac{x}{v}}\right)d\alpha = \frac{1}{p\,.\,H(x,p)}.$$

Nach dem in **3** c) bewiesenen Carsonschen Reziprozitätsgesetz ist daher der Wert des Hakenintegrals (30) für $t-\tau-\frac{x}{v} > 0$ gleich dem Integranden der linken Seite von (32) und für $t-\tau-\frac{x}{v} < 0$ gleich Null. Die Lösung (25) können wir daher in folgender Form schreiben:

$$(33) \qquad J(x,t) = \begin{cases} K\,.\,v\displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{v}} \varphi'(\tau)\,e^{-\varrho(t-\tau)}J_0\left(i\varrho\sqrt{(t-\tau)^2-\left(\frac{x}{v}\right)^2}\right)d\tau & \text{für } t \geqq \frac{x}{v}, \\ 0 & \text{für } t \leqq \frac{x}{v}. \end{cases}$$

[1]) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Phys. 28 (1909), S. 665ff., insbesondere S. 683.

5. Die Wärmeleitungsgleichung[1]**.** Die Wärmeleitungsgleichung im eindimensionalen Falle lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{34}$$

wo a^2 eine positive Konstante und $u(x, t)$ die Temperatur im Punkte x zur Zeit t bedeutet. Für einen einseitig ausgedehnten linearen Wärmeleiter können wir als Grenzbedingungen

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(\infty, t) = 0 \tag{35}$$

annehmen.

Entsprechend der allgemeinen Gl. (5) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{p}{a^2} \psi = 0$$

und als allgemeines Integral hiervon

$$\alpha_1(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} + \alpha_2(p) e^{+\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Wegen der Grenzbedingung für

$$x = \infty \quad \text{muß} \quad \alpha_2(p) = 0$$

sein, die Bedingung für

$$x = 0 \quad \text{liefert} \quad \alpha_1(p) = 1.$$

Als Lösungsansatz ergibt sich mithin

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \varphi'(\tau) \int_{\mathfrak{S}} \frac{e^{(t-\tau)p - \frac{\sqrt{p}}{a} x}}{p} \, dp \, d\tau. \tag{36}$$

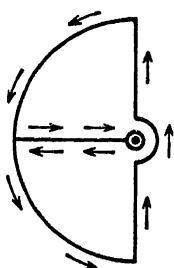
Die in **3** angegebenen Methoden zur Auswertung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{S}} \frac{e^{(t-\tau)p - \frac{\sqrt{p}}{a} x}}{p} \, dp \tag{37}$$

---

[1] Vgl. hierzu: A. Korn, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. XXVIII (1929), S. 55.

sind hier für $t-\tau>0$ nicht ohne weiteres anwendbar, da ein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche von $\sqrt{p}$ im Unendlichen liegt. Wir erstrecken daher zunächst das Integral über den in Fig. 82 angedeuteten Integrationsweg, bei dem durch Umlaufung des zweiten bei $p=0$ liegenden Verzweigungspunktes in negativem Sinne erreicht wird, daß in dem von ihm begrenzten Gebiet der Integrand eine eindeutige Funktion wird. Das Integral über den Halbkreis geht wie früher mit wachsendem Kreisradius gegen Null. Das Integral über den kleinen, den Nullpunkt ausschließenden Kreis ergibt bei verschwindendem Radius den Grenzwert -1. Es bleibt noch das über die ganze negative Abszissenachse hin und zurück erstreckte Integral. Dieses wird, wenn z die positiven Zahlen durchläuft,

Fig. 82

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}i\sqrt{z}}\,\frac{e^{-(t-\tau)z}}{z}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{\frac{x}{a}\sqrt{z}\,i}\,\frac{e^{-(t-\tau)z}}{z}\,dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{z}\right)\frac{e^{-(t-\tau)z}}{z}\,dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{a}y\right)\frac{e^{-(t-\tau)y^2}}{y}\,dy.$$

Wir erhalten also schließlich aus (36)

$$u(x,t)=\varphi(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{a}y\right)\frac{e^{-(t-\tau)y^2}}{y}\,dy\,d\tau. \tag{38}$$

Entwickelt man den Sinus in eine Potenzreihe und beachtet die Formel [vgl. I, § 4, 2 c)]

$$\int_0^\infty y^{2\nu}e^{-(t-\tau)y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu+1}\sqrt{t-\tau}^{\,2\nu+1}}\qquad(\nu=0,1,2,\ldots),$$

so kann man (38) in der folgenden Form schreiben:

$$u(x,t)=\varphi(t)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,f\left(\frac{x}{a},\,t-\tau\right)dt, \tag{39}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$f(\alpha,\beta)=\alpha-\frac{1}{2\,.\,3!}\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{1\,.\,3}{2^2\,.\,5!}\frac{\alpha^5}{\beta^2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,.\,7!}\frac{\alpha^7}{\beta^3}+\cdots. \tag{39'}$$

Die Heavisidesche Operatorenmethode gelangt durch die in **3** a) geschilderte Methode der Potenzreihenentwicklung, die im Laufe der Rechnung unrichtige Formeln benutzt (z. B. Formel (15) für $\nu = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2} \cdots$), zu genau dem gleichen Resultat.

6. Andere Anwendungsmöglichkeiten der Heavisideschen Methode[1]**.** Der in 1 ausgesprochene Grundgedanke der Heavisideschen Lösungsmethode legt es nahe, den dort beschriebenen Lösungsansatz auch auf gewisse andere mathematische Fragestellungen anzuwenden. Wir wollen hier noch ganz kurz das folgende Problem erwähnen: Gegeben sei ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$(40) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = f_1(t), \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n = f_2(t), \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = f_n(t), \end{cases}$$

wo die a_{ik} Ausdrücke folgender Form bedeuten sollen:

$$(41) \qquad a_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik} \frac{d}{dt} + \gamma_{ik} \frac{d^2}{dt^2} + \cdots + \lambda_{ik} \frac{d^m}{dt^m};$$

dabei seien $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \ldots$ konstant und alle $f_i(0) = 0$. Wir brauchen das System (40) nur unter der Annahme der folgenden rechten Seiten zu lösen:

$$F_i(t) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k, \quad F_k(t) = f_k(t) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und die gefundenen Lösungen zu addieren.

Wir machen dazu, dem in 1 geschilderten Grundgedanken entsprechend, analog (4) den Ansatz

$$(42) \qquad x_\nu = \int_0^t F_k'(t) \int_{\mathfrak{z}} \psi_\nu(p) \frac{e^{(t-\tau)p}}{p} \, dp \, d\tau$$

und bestimmen die ψ_ν als Lösungen des folgenden Systems von linearen Gleichungen mit von p abhängenden Koeffizienten:

$$(43) \qquad \sum_\nu A_{i\nu} \psi_\nu = B_i \quad \text{mit} \quad B_i = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k, \; B_k = 1.$$

Dabei bedeuten die A_{ik} die Ausdrücke a_{ik}, wenn man darin $\frac{d^\varrho}{dt^\varrho}$ durch p^ϱ ersetzt; also gilt gemäß (41)

$$(44) \qquad A_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik} p + \gamma_{ik} p^2 + \cdots + \lambda_{ik} p^m.$$

[1]) Vgl. auch: John R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, deutsche Bearbeitung von F. Ollendorff und K. Pohlhausen. Berlin (Springer) 1929.

Von diesem Ansatz aus kann man die Theorie wieder wie früher entwickeln. Diese Methode ist z. B. anwendbar bei Berechnung quasistationärer Schwingungen in Stromkreisen; bei zwei Stromkreisen wird man bei Benutzung der in **4** angewandten Bezeichnungen auf folgende beiden Gleichungen geführt:

$$(45)\qquad \begin{cases} L_{11}\dfrac{dJ_1}{dt} + L_{12}\dfrac{dJ_2}{dt} + W_1 J_1 + \dfrac{1}{K_1}\displaystyle\int J_1\,dt = P_1(t), \\ L_{21}\dfrac{dJ_1}{dt} + L_{22}\dfrac{dJ_2}{dt} + W_2 J_2 + \dfrac{1}{K_2}\displaystyle\int J_2\,dt = P_2(t). \end{cases}$$

Neunzehntes Kapitel

Einige besondere Probleme partieller Differentialgleichungen

§ 1. Die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und anschließende Probleme

1. Bedeutung der Gleichung. Probleme. Das vielfache Auftreten der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in der mathematischen Physik beruht in der Hauptsache auf folgendem: Sowohl bei der „Wellengleichung"

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U \qquad \left(\Delta \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\right)$$

als auch bei der „Wärmeleitungsgleichung"

$$(2)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta V$$

führt die Zerlegung der gesuchten Funktion U in ein Produkt aus einer Funktion von t und einer Funktion u der übrigen Variablen für u auf die Gleichung

$$(3)\qquad L(u) \equiv \Delta u + \lambda u = 0\,^{1)} \qquad (\lambda \text{ konstant}).$$

Neben dem Falle $n = 1$, der auf eine gewöhnliche Differentialgleichung führt und bereits in Kapitel VII behandelt worden ist, sind hauptsächlich die Fälle $n = 3$ und $n = 2$ von Bedeutung. Auf den letzteren führt auch die dreidimensionale Potentialgleichung $\Delta U = 0$, wenn $U = u(x_1, x_2)v(x_3)$ gesetzt wird.

---

[1]) Auf Grund der Beziehung der Gl. (3) zu (1) wird (3) auch häufig als „Schwingungsgleichung" bezeichnet.

Die angedeutete Entstehung führt uns auch auf die Hauptprobleme der Gl. (3), wenn man an die physikalischen Anwendungen denkt. Betrachten wir etwa, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, die Ausbiegungen U einer schwingenden, an ihrem Rande festgehaltenen Membran [1]). U genügt der Gl. (1). Am Rande ist für alle Zeiten $U = 0$, während für $t = 0$ Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit, d. h. $U(x_1, x_2, 0)$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0}$ beliebig vorgeschrieben werden können. Die Randbedingung führt vermöge der Zerlegung $U = T(t)\,u(x_1, x_2)$ zu der Bedingung

(4) $$u = 0 \text{ am Rande.}$$

Da das Problem (3), (4) im allgemeinen nur die Lösung $u = 0$ besitzt, führt unsere Aufgabe zu der Frage, ob es Werte von λ gibt, für die das Problem (3), (4) eine nicht identisch verschwindende Lösung u besitzt. Es wird sich zeigen, daß es abzählbar unendlich viele solcher Werte — die Eigenwerte des Problems (3), (4) — gibt. Ist u_ν eine zu dem Eigenwert $\lambda = \lambda_\nu$ gehörige Lösung von (3), (4), so heißt u_ν eine zu λ_ν gehörige Eigenfunktion. Bei beliebigen Konstanten a_ν, b_ν ist dann

$$u_\nu(x_1, x_2)(a_\nu \cos\sqrt{\lambda_\nu}\,t + b_\nu \sin\sqrt{\lambda_\nu}\,t)$$

eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (1), da $T(t)$ offenbar der Gleichung

$$T'' + \lambda T = 0$$

genügt. Unter Voraussetzung genügender Konvergenzeigenschaften wird dann auch

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(x_1, x_2)(a_\nu \cos\sqrt{\lambda_\nu}\,t + b_\nu \sin\sqrt{\lambda_\nu}\,t)$$

eine Lösung der ursprünglichen Gl. (1) sein, die am Rande verschwindet.

Soll diese Lösung den für $t = 0$ vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügen, so entsteht die Aufgabe, die Konstanten a_ν, b_ν so zu bestimmen, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu u_\nu(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \sqrt{\lambda_\nu}\, u_\nu(x_1, x_2)$$

vorgeschriebenen Funktionen von x_1, x_2 gleich werden.

Auf die hier aufgetretenen Probleme der Eigenwerte, Eigenfunktionen sowie der Entwicklung willkürlicher Funktionen

[1]) Genaueres hierüber in Bd. II, Kap. XIX, § 3.

nach den Eigenfunktionen wird man in ganz analoger Weise geführt, wenn man vom Problem der Wärmeleitung ausgeht, bei welchem Gl. (2) an Stelle von Gl. (3) tritt. Nur tritt im allgemeinen Falle an die Stelle von (4) die Randbedingung

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h u = 0, \tag{5}$$

die für $k = 0$ (verschwindende innere Wärmeleitfähigkeit) in (4) und im Falle $h = 0$ (verschwindende äußere Wärmeleitfähigkeit) in

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{6}$$

übergeht.

Im folgenden soll vorzugsweise der dreidimensionale Fall ($n = 3$) und das Problem (3), (4) sowie das entsprechende inhomogene Problem (s. **3**) behandelt werden[1]).

2. Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Sei $\mathfrak{B}$ ein einfach zusammenhängender beschränkter Bereich des dreidimensionalen Raumes, f eine in $\mathfrak{B}$ einmal stetig differenzierbare Funktion und $\mathfrak{G}$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta v = 0$ für die Randbedingungen (4), so genügt nach XIII, § 3, 2[2])

$$u(P) = \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(P, \Pi) f(\Pi) \, d\Pi \tag{7}$$

der Randbedingung und der Gleichung

$$\Delta u = f, \tag{8}$$

und umgekehrt folgt aus (8) das Bestehen von (7). Daraus folgt, daß unser Randwertproblem (3), (4) äquivalent mit dem Bestehen der Integralgleichung zweiter Art

$$u(P) = -\lambda \int \mathfrak{G}(P, \Pi) u(\Pi) \, d\Pi \tag{9}$$

ist. Da nun die Greensche Funktion nach XIII, § 3, **3** symmetrisch ist, können wir die Ergebnisse der Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern (Kapitel XII) anwenden. Aus diesen folgt: Unser Randwertproblem besitzt abzählbar unendlich viele Eigenwerte; die Eigenwerte können sich im Endlichen nicht häufen; die Anzahl

---

[1]) In Kapitel XIX des zweiten Bandes findet der Leser den zweidimensionalen Fall behandelt. Wir verweisen auf dieses Kapitel insbesondere bezüglich spezieller Probleme, da im vorliegenden nur solche allgemeiner Natur behandelt sind. — Einiges über unsere Gl. (3), insbesondere auf die Eigenwerte Bezügliches, findet der Leser auch in Kapitel XX des ersten Bandes.

[2]) Einen ausführlichen Beweis für den Zusammenhang zwischen (7) und (8) im zweidimensionalen Falle findet der Leser in XVI, § 2, **3**.

der zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen ist endlich; je zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal; jede zweimal stetig differenzierbare, den Randbedingungen genügende Funktion läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln.

Die Eigenwerte sind alle positiv. Denn für $\lambda \leqq 0$ hat das Problem (3), (4) nach XVIII, § 2 nur die Lösung $u \equiv 0$.

3. Inhomogenes Problem. Sei an Stelle von (3), (4) das Problem

$$\Delta u + \lambda u = f \tag{10}$$

$$u = \varphi \text{ am Rande,} \tag{4'}$$

wo f, φ gegebene Funktionen sind, vorgelegt. Wir dürfen annehmen, daß die Randbedingung homogen, d. h. $\varphi = 0$ ist. Anderenfalls sei nämlich $\bar{u}$ diejenige Lösung der Potentialgleichung $\Delta \bar{u} = 0$, die der inhomogenen Randbedingung (4') genügt. Dann genügt $u - \bar{u}$ der Gleichung

$$\Delta(u - \bar{u}) + \lambda(u - \bar{u}) = f - \lambda \bar{u}$$

und der homogenen Randbedingung (4).

Unter der Annahme der homogenen Randbedingung (4) nun (vgl. 2) ist die Gl. (10) äquivalent mit der Integralgleichung

$$\left\{\begin{aligned} u(P) &= -\lambda \int_{\mathfrak{B}} u(\Pi)\,\mathfrak{G}(P,\Pi)\,d\Pi + F(P); \\ F(P) &= \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(P,\Pi) f(\Pi)\,d\Pi. \end{aligned}\right. \tag{10a}$$

Diese Gleichung besitzt, wenn λ kein Eigenwert von (9) ist, eine und nur eine Lösung. Sind φ_ν die normierten orthogonalen Eigenfunktionen des Problems (3), (4) [oder, was dasselbe ist, der Gl. (9)], so läßt sich nach XII, § 3, 4 die Lösung von (10a) in der Form

$$u(P) = F(P) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(P) F_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \quad \text{mit} \quad F_\nu = \int_{\mathfrak{B}} F(\Pi)\,\varphi_\nu(\Pi)\,d\Pi$$

darstellen. Entwickeln wir nun die „quellenmäßig dargestellte“ [oder: „dem Kern G erreichbare“ [1])] Funktion F nach den Eigenfunktionen φ_ν:

$$F(P) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(P) F_\nu, \tag{11}$$

so erhalten wir

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \varphi_\nu \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_\nu \varphi_\nu \lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}. \tag{12}$$

---

[1]) Vgl. XII, § 3, 3.

Unter Benutzung von (9) ist nun

$$\lambda_\nu F_\nu = \lambda_\nu \int_{\mathfrak{B}} \varphi_\nu(\Pi) F(\Pi)\, d\Pi = \lambda_\nu \int_{\mathfrak{B}} \varphi_\nu(\Pi) \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(\Pi, \Pi') f(\Pi')\, d\Pi'\, d\Pi$$

$$= \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi') \lambda_\nu \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(\Pi', \Pi) \varphi_\nu(\Pi)\, d\Pi\, d\Pi'$$

$$= - \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi') \varphi_\nu(\Pi')\, d\Pi' = - f_\nu.$$

Also erhalten wir aus (12)

$$u(P) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \varphi_\nu(P)}{\lambda_\nu - \lambda}. \tag{13}$$

In den Anwendungen bedeutet meist f (bis auf einen periodischen Zeitfaktor von der Frequenz $\sqrt{\lambda}$) eine erzwingende Kraft, u (bis auf den gleichen Faktor) die unter dem Einfluß dieser Kraft erzwungene Schwingung, und die Form (13) der Lösung bringt das Resonanzprinzip zur Evidenz.

4. Anwendungen der Greenschen Formel. Ist

$$L(u) \equiv \Delta u + \lambda u,$$

so liefert uns die Greensche Formel XIII, § 3, **3** Gl. (14):

$$\int_{\mathfrak{B}} [u L(v) - v L(u)]\, d\Pi = \int_F \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{14}$$

wo das rechtsstehende Integral über die Oberfläche des Bereiches $\mathfrak{B}$ zu erstrecken ist. Um (14) in ähnlicher Weise zu verwerten, wie dies mit der entsprechenden Formel (9) in XIV, § 1 geschehen ist, müssen wir eine Lösung von (3) suchen, die der Lösung $1:r$ der dreidimensionalen Potentialgleichung entspricht. Soll eine Lösung von (3) nur von $r = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)^2}$ abhängen, so genügt sie, wie elementare Umrechnung zeigt, der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{d r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d U}{d r} + \lambda U = 0. \tag{15}$$

Für $n = 3$ ist die linke Seite der Gleichung nach Multiplikation mit r identisch gleich

$$\frac{d^2 (rU)}{d r^2} + \lambda (r U).$$

Also sind $\frac{1}{r}\sin\sqrt{\lambda}\,r$ und $\frac{1}{r}\cos\sqrt{\lambda}\,r$ ein Fundamentalsystem von (15). Da $\frac{1}{r}\sin\sqrt{\lambda}\,r$ für $r=0$ regulär ist, werden wir

$$U=\frac{1}{r}\cos\sqrt{\lambda}\,r$$

als die gesuchte Fundamentallösung benutzen. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß für $n=2$ die Gleichung (15) in

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{dU}{d\varrho}+U=0,$$

also die Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung (VIII, § 3, **1**) übergeht, wenn $r\sqrt{\lambda}=\varrho$ gesetzt wird. In diesem Falle sind die Besselschen Funktionen nullter Ordnung 1. und 2. Art (vgl. VIII, § 3, **1** und **2**) $J_0(\sqrt{\lambda}\,r)$ und $Y_0(\sqrt{\lambda}\,r)$ zwei linear unabhängige Lösungen, und die zweite Lösung:

$$U=Y_0(r\sqrt{\lambda}),$$

die für $r=0$ logarithmisch unendlich wird, dient als Fundamentallösung.

Die Formel (14) kann man dazu benutzen, eine Lösung von (3) durch ihre Randwerte und die ihrer Normalableitung auszudrücken. Setzt man nämlich in ihr $v=\frac{\cos r\sqrt{\lambda}}{r}$ und wendet (14) auf einen Bereich $\mathfrak{B}'$ an, der aus $\mathfrak{B}$ durch Herausschneiden einer ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Kugel mit dem Mittelpunkt P entsteht, so erhält man, indem man den Radius der Kugel gegen 0 konvergieren läßt, in üblicher Weise (vgl. z. B. XIII, § 3, **2**)

$$(16)\qquad 4\pi u(P)=-\int\limits_F\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma-\int\limits_{\mathfrak{B}}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}L(u)\,d\Pi.$$

Wie in der Potentialtheorie, kann man durch Einführung der Greenschen Funktion die Werte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ eliminieren, so daß $u(P)$ allein durch die Randwerte von u ausgedrückt erscheint. Die Greensche Funktion $\Gamma(P,\Pi)$ ist dabei folgendermaßen definiert: Sie ist von der Form $\Gamma(P,\Pi)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}+g(P,\Pi)$, wobei $r=\overline{P\Pi}$ und g (als Funktion von P) eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Lösung von (3) ist, und erfüllt die Randbedingungen (4). Da Γ offenbar bestimmt ist, wenn g bestimmt ist, so existiert eine und nur eine den gestellten

Bedingungen genügende Funktion Γ, wenn λ kein Eigenwert ist. Denn g ist eine Lösung von (3), die den Randbedingungen

$$g = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$$

genügt. Nach **3** existiert daher g und ist eindeutig bestimmt. Setzen wir nun in (14) für v die Funktion g ein, so erhalten wir

$$0 = \int_F \left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \int_{\mathfrak{B}} g\,L(u)\,d\Pi.$$

Addition dieser Gleichung zu der mit $1:4\pi$ multiplizierten Gl. (16) liefert das oben angedeutete Resultat

$$(16') \qquad u(P) = \int_F u\frac{\partial \Gamma}{\partial n} d\sigma + \int_{\mathfrak{B}} \Gamma(P,\Pi)\,L(u)\,d\Pi.$$

Wir wollen von der Greenschen Formel noch eine andere Anwendung machen, indem wir den sogenannten Weberschen Mittelwertsatz, der ein Analogon des Mittelwertsatzes XVII, § 1, Gl. (9) ist, beweisen. Wenden wir (14) und (16) auf den Fall an, daß der Integrationsbereich $\mathfrak{B}$ die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius ϱ ist und daß u eine Lösung von (3) ist, so erhalten wir aus (14) mit $v = \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{\sqrt{\lambda}\,r}$

$$(17) \qquad 0 = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r}\int_F u\,d\sigma + \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r}\int_F \frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma$$

und aus (16) mit $v = \dfrac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$

$$(18) \qquad 4\pi\,u(P) = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\int_F u\,d\sigma + \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\int_F \frac{\partial u}{\partial r}\,d\sigma.$$

Multiplizieren wir (17) mit $\dfrac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$ und (18) mit $\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r}$, so ergibt sich durch Subtraktion

$$(19) \qquad u(P)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{\sqrt{\lambda}\,r} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_F u(\Pi)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_F u\,d\omega,$$

wo $d\omega$ in üblicher Weise das Differential des räumlichen Sehwinkels bezeichnet. Das ist der Webersche Mittelwertsatz, der für $\lambda \to 0$

in die Gl. (9), XVII, § 1 übergeht. Der entsprechende Satz läßt sich im Zweidimensionalen unter Verwendung der Funktionen J_0, Y_0 an Stelle von $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r}$ und $\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$ beweisen (s. Band II, Kapitel XIX).

5. Weitere Anwendung der Greenschen Funktion. Bilinearreihe. Nach (16′) muß eine Lösung von (10), (4) notwendigerweise die Form

$$u(P) = \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi)\,\Gamma(P,\Pi)\,d\Pi \tag{20}$$

haben. Da wir andererseits in **3** die Existenz einer Lösung des genannten Problems bewiesen haben, stellt (20) wirklich die Lösung dar. Dies ist aber auch unabhängig von dem in **3** geführten Existenzbeweise leicht einzusehen. Daß nämlich die Randbedingung (4) erfüllt ist, folgt daraus, daß die Greensche Funktion sie erfüllt. Um nun zu zeigen, daß die Differentialgleichung (10) erfüllt ist, genügt es zu beweisen, daß

$$L\int_{\mathfrak{B}} f\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\,d\Pi = -4\pi f \tag{21}$$

ist, da $g(P,\Pi)$ eine reguläre Lösung von (3) ist. Zu diesem Zwecke schreiben wir

$$L\int_{\mathfrak{B}} = L\int_{K_\varrho} + L\int_{\mathfrak{B}-K_\varrho},$$

wobei K_ϱ die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius ϱ ist. ϱ soll dabei so klein sein, daß K_ϱ ganz in $\mathfrak{B}$ liegt. Der zweite Summand ist offenbar 0, da $\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$ in $\mathfrak{B}-K_\varrho$ eine reguläre Lösung von (3) ist. Der erste ist gleich

$$\Delta\int_{K_\varrho} f\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\,d\Pi + \lambda\int_{K_\varrho} f\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\,d\Pi$$

$$= \Delta\int_{K_\varrho}\frac{f}{r}\,d\Pi + \left[\lambda\int_{K_\varrho} f\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}\,d\Pi - \Delta\int_{K_\varrho} f\,\frac{\lambda r}{2!} + \Delta\int_{K_\varrho} f\,\frac{\lambda^2 r^3}{4!} + \cdots\right].$$

Nach der Poissonschen Gleichung XIV, § 1, Gl. (15) ist nun

$$\Delta\int_{K_\varrho}\frac{f}{r} = -4\pi f(P),$$

während der in der Klammer stehende Ausdruck, wie man sich leicht überlegt, für $\varrho \to 0$ gegen 0 konvergiert. Da somit der auf der

linken Seite von (21) stehende, von ϱ unabhängige Ausdruck gegen $-4\pi f(P)$ konvergiert, ist er gleich $-4\pi f(P)$, was zu beweisen war.

Wir wollen nun noch eine bilineare Entwicklung (vgl. XII, § 3, 3) für die Greensche Funktion $\Gamma(P, \Pi)$ im Falle $P \neq \Pi$ angeben. Zu diesem Zwecke bemerken wir folgendes: Ist K_ϱ die Kugel mit dem Mittelpunkt Π und dem Radius ϱ, wobei ϱ so klein sein soll, daß P nicht in K_ϱ liegt, und ist ferner

$$(22)\quad f(\Pi') = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{\lambda})^3}{4\pi} \dfrac{1}{\sin\sqrt{\lambda}\,\varrho - \sqrt{\lambda}\,\varrho\cos\sqrt{\lambda}\,\varrho}, & \text{wenn } \Pi' \text{ in } K_\varrho \text{ liegt,} \\ 0, & \text{wenn } \Pi' \text{ nicht in } K_\varrho \text{ liegt,} \end{cases}$$

so gilt

$$(23)\qquad \Gamma(P, \Pi) = \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi')\,\Gamma(P, \Pi')\,d\Pi'.$$

In der Tat wird unter Benutzung des Weberschen Mittelwertsatzes (19)

$$\int_{\mathfrak{B}} f(\Pi')\,\Gamma(P\,\Pi')\,d\Pi' = \int_{K_\varrho} f(\Pi')\,\Gamma(P\,\Pi')\,d\Pi'$$

$$= f\int_0^\varrho r^2\Big(\int \Gamma\,d\omega\Big)\,dr = f\,.\,\Gamma(P, \Pi)\int_0^\varrho r^2\,.\,4\pi\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{\sqrt{\lambda}\,r}\,dr$$

$$= f\,\Gamma(P, \Pi)\,.\,4\pi\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,\varrho}{(\sqrt{\lambda})^3} - \varrho\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,\varrho}{\lambda}\right) = \Gamma(P, \Pi).$$

Nach dem am Anfang dieser Nummer Gesagten ist nun die rechte Seite von (23) eine Lösung des Problems (10), (4) [1]) und daher in der Form (13) darstellbar, und wir erhalten, wenn P nicht in K_ϱ liegt, wegen (23)

$$\Gamma(P, \Pi) = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(P)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_{\mathfrak{B}}\varphi_\nu(\Pi')\,f(\Pi')\,d\Pi'$$

$$= -f\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(P)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_{K_\varrho}\varphi_\nu(\Pi')\,d\Pi'.$$

---

1) f ist auf der Oberfläche von K_ϱ unstetig. Für jeden nicht auf dieser gelegenen Punkt bleibt jedoch der Beweis dafür, daß aus (20) die Gl. (10) folgt, ohne Änderung gültig. Ebenso bleibt die Äquivalenz von (10), (4) mit (10a) für jeden nicht auf der Oberfläche von K_ϱ gelegenen Punkt erhalten.

Da nun auf Grund des Weberschen Mittelwertsatzes

$$\int\limits_{K_\varrho} \varphi_\nu(\Pi')\,d\Pi' = \int\limits_0^\varrho r^2 \int \varphi_\nu\,d\omega\,dr = \varphi_\nu(\Pi) \int\limits_0^\varrho r^2\,4\pi \frac{\sin\sqrt{\lambda_\nu}\,r}{\sqrt{\lambda_\nu}\,r}\,dr$$

$$= 4\pi \frac{\sin\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho - \varrho\sqrt{\lambda_\nu}\cos\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho}{(\sqrt{\lambda_\nu})^3}$$

ist, so erhalten wir die gesuchte Entwicklung

$$(24)\quad \Gamma(P,\Pi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(P)\,\varphi_\nu(\Pi)}{\lambda_\nu - \lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}\right)^3 \frac{\sin\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho - \sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho\cos\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho}{\sin\sqrt{\lambda}\,\varrho - \varrho\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\varrho},$$

die für alle P gilt, deren Entfernung von Π größer als ϱ ist[1]), und die einen gewissen Ersatz für die noch nicht bewiesene Formel

$$(25)\qquad \Gamma(P,\Pi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(P)\,\varphi_\nu(\Pi)}{\lambda_\nu - \lambda}$$

darstellt; man beachte, daß das allgemeine Glied der Reihe (24) bei dem Grenzübergang $\varrho \to 0$ in das entsprechende der Reihe (25) übergeht.

§ 2. Die Gleichung $\Delta u = e^u$

1. Das Problem. Unter den elliptischen Differentialgleichungen der Form $\Delta u = f(u)$ hat die für $f(u) = \text{const.}\,e^u$ eine besondere Bedeutung erlangt. Bei zwei unabhängig Veränderlichen beherrscht sie die Theorie der Flächen von konstantem negativen Krümmungsmaß und spielt eine wichtige Rolle in der Lehre von den automorphen Funktionen. Im Dreidimensionalen wird man auf diese Gleichung unter anderem in der Theorie der Glühelektronen geführt: Ein glühender hohler Metallkörper schleudert an seiner inneren Oberfläche Elektronen aus, dann folgt aus den üblichen Annahmen der Elektronentheorie, daß die Spannung im Hohlraum durch die Gleichung

$$(1)\qquad \Delta u = e^u$$

beherrscht wird. Die gesuchte Lösung u muß im Innern des dreidimensionalen Gebietes T regulär sein und bei Annäherung an den Rand S unendlich werden wie $-2\log\varrho$, wo ϱ den Abstand eines inneren Punktes vom Rande bedeutet[2]). Wir übertragen hier im

---

[1]) Für $\lambda = 0$, d. h. für die Greensche Funktion der Potentialgleichung, wurde diese Formel von A. Hammerstein bewiesen. (Über die Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben. Math. Zeitschr. **27**, 1927, insbesondere S. 286 und 296.)

[2]) M. v. Laue, Jahrb. f. Radioaktivität **15** (1918), S. 205—256.

wesentlichen Überlegungen Bieberbachs [1]) aus dem Zweidimensionalen ins Dreidimensionale.

Es sei S eine zweimal stetig differenzierbare Fläche, also überall mit stetiger Krümmung versehen. Ist nun H eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion, die bei Annäherung an S unendlich wird wie $-2\log\varrho$, so wird aus (1), wenn $u = v + H$ gesetzt wird:

$$\Delta v = e^{H(x,y,z)}\, e^{v} - \Delta H. \tag{2}$$

Wir setzen $H = H_1 + H_2$, und zwar $H_1 = -2\log\varrho$ innerhalb einer der Berandung S benachbarten Schicht R, deren Dicke überall kleiner als ein Drittel des kleinsten Krümmungsradius von S ist. Innerhalb dieser Schicht liegen also keine Krümmungsmittelpunkte der Fläche S; die Schicht wird daher lückenlos und einfach von den Normalen von S ausgefüllt, so daß H_1 auf die angegebene Weise hierin eindeutig definiert ist. Im übrigen Innern von T setzen wir H_1 zweimal stetig differenzierbar irgendwie fort. Es sei $P = (x, y, z)$ ein Punkt in der Schicht R mit dem Abstand ϱ von S. Dann ist $e^{H_1} = 1/\varrho^2$ in R. Die Berechnung von ΔH_1 führen wir nur in der Schicht R durch, in der wir zweckmäßig neue Koordinaten einführen. Und zwar werde ein Punkt P festgelegt durch den Abstand ϱ von der Berandung S und durch den Fußpunkt Q der durch ihn hindurchgehenden Normalen auf S. Auf S sei ein aus den Krümmungslinien gebildetes rechtwinkliges Koordinatennetz zur Festlegung von Q eingeführt; die Variablen seien β und γ. Dann gilt nach Gl. (42), S. 85, innerhalb R

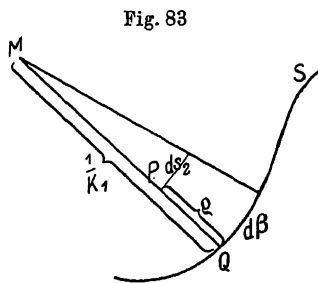
Fig. 83

$$\Delta H_1 = -2\Delta\log\varrho = -2h_1h_2h_3\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\varrho}\right)\right), \tag{3}$$

wo zwei weitere in der zitierten Gleichung auftretende Glieder schon fortgefallen sind, da H_1 weder von β noch von γ abhängt. Die Bedeutungen von h_1, h_2, h_3 ergeben sich aus

$$d\varrho = h_1\, d\varrho, \quad d\beta = h_2\, ds_2, \quad d\gamma = h_3\, ds_3 \tag{4}$$

[siehe Gl. (35), S. 83]. Also ist zunächst $h_1 = 1$.

Da die längs einer Krümmungslinie auf der Fläche errichteten Normalen eine abwickelbare Fläche bilden, so schneiden sich zwei unendlich benachbarte von diesen Normalen. Daher stellt Fig. 83

[1]) Göttinger Nachr. 1912, S. 599—602 und Math. Ann. 77 (1916), S. 173—212.

diese Verhältnisse in einem Schnitt längs der einen Krümmungslinie durch Q dar, und man entnimmt aus dieser Figur die Gleichung

(5 a)
$$d\beta = \frac{1/K_1}{1/K_1 - \varrho}\, ds_2 = \frac{1}{1 - K_1 \varrho}\, ds_2 .$$

Für $d\gamma$ ergibt sich dementsprechend

(5 b)
$$d\gamma = \frac{1}{1 - K_2 \varrho}\, ds_3 ,$$

wobei K_1 und K_2 die beiden Hauptkrümmungen bedeuten.

Aus (4) und (5) ergeben sich h_2 und h_3, die wir nebst $h_1 = 1$ in (3) eintragen. Eine kurze Rechnung führt dann (3) über in

(6)
$$\Delta H_1 = \frac{2}{\varrho^2}\left\{1 + \frac{K_1 \varrho}{1 - K_1 \varrho} + \frac{K_2 \varrho}{1 - K_2 \varrho}\right\}.$$

Nach den obigen Festsetzungen über H_1 soll sich ΔH_1 im übrigen Teil von T stetig an die in der Schicht R geltenden Werte anschließen. Es ist aber möglich, daß ΔH_1 bei der sonst beliebigen Fortsetzung von H_1 ins Innere hinein dort negativ ausfällt. (Innerhalb R ist dies unmöglich, denn R ist so dünn genommen worden, daß darin stets $|K\varrho| < \frac{1}{3}$, also ΔH_1 positiv ausfällt.) Wir bestimmen nun H_2 so, daß es auf dem Rande S verschwindet, H_2 und ΔH_2 in T beschränkt sind und daß $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$ stetig und überall größer als eine positive Zahl bleibt. Eine solche Bestimmung ist gewiß möglich, da sie durch Auflösung einer Poissonschen Gleichung geleistet werden könnte. Schreiben wir (2) abgekürzt

(2a)
$$\Delta v = a(x,y,z)e^v - b(x,y,z)$$

mit
$$a = e^{H_1 + H_2}, \quad b = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

und in R speziell

(7)
$$a = \frac{1}{\varrho^2}\, e^{H_2}, \quad b = \frac{2}{\varrho^2}\left\{1 + \frac{K_1 \varrho}{1 - K_1 \varrho} + \frac{K_2 \varrho}{1 - K_2 \varrho}\right\} + \Delta H_2 ,$$

so sind a und b im Innern von T stetige Funktionen, die von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$ unendlich werden bei Annäherung von (x,y,z) an den Rand S von T, deren Quotient $\frac{b}{a}$ aber überall in T zwischen zwei festen positiven Grenzen μ und M bleibt.

In jedem samt seinem Rand in T liegenden Teilgebiet T' sind a und b stetig und beschränkt, a größer als eine positive Zahl, also ist (2a) für stetige Randwerte in T' offenbar nach den Ausführungen von Kap. XVIII, § 3 lösbar. Liegen insbesondere die Randwerte zwischen

$\log \mu$ und $\log M$, so muß auch die Lösung im Innern von T' zwischen diesen Werten liegen. Für Werte von v größer als $\log M$ ist nämlich die rechte Seite von (2a) positiv, für kleinere Werte als $\log \mu$ aber negativ. In einem Maximum muß aber $\Delta v \leqq 0$, in einem Minimum aber $\Delta v \geqq 0$ sein. Folglich ist ein Maximum im Innern von T' nie größer als $\log M$, ein Minimum nie kleiner als $\log \mu$.

Es sei nun $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ eine Folge ineinandergeschachtelter Gebiete, die sämtlich ganz im Innern von T liegen und deren Vereinigungsmenge gleich T ist. Für jedes T_n lösen wir nun die Randwertaufgabe von (2a) für irgendwelche zwischen $\log \mu$ und $\log M$ gelegenen Randwerte. Wir behaupten, daß die sich ergebenden Lösungen in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiet T^* (das also von einem gewissen Index n an in allen T_n liegt) gleichmäßig konvergieren.

2. Konvergenzbetrachtung. Es sei v_n die Lösung in T_n. Dann haben v_n und v_{n+p} auf dem Rande S_n von T_n Werte, die zwischen $\log \mu$ und $\log M$ (Grenzen eingeschlossen) liegen. Ist also $\underline{v}_n$ die Lösung von (2a) mit dem Randwert $\log \mu$ auf S_n, $\bar{v}_n$ die mit dem Randwert $\log M$, so ist nach Kap. XVIII, § 2, 2, b)

$$|v_n - v_{n+p}| \leqq \bar{v}_n - \underline{v}_n \tag{8}$$

in T_n. Nun ist

$$\Delta(\bar{v}_n - \underline{v}_n) = a(e^{\bar{v}_n} - e^{\underline{v}_n}) = a(\bar{v}_n - \underline{v}_n)e^{\tilde{v}_n},$$

wo $\tilde{v}_n$ zwischen $\underline{v}_n$ und $\bar{v}_n$, also auch zwischen $\log \mu$ und $\log M$ liegt. Daher, $\bar{v}_n - \underline{v}_n = w_n$ gesetzt:

$$\Delta w_n = a w_n \vartheta, \quad \mu \leqq \vartheta \leqq M.$$

Darin ist $w_n \geqq 0$ und hat auf S_n den konstanten Wert $\log \frac{M}{\mu} = c$. Also verschwindet $w_n - c$ auf S_n und erfüllt die Gleichung

$$\Delta(w_n - c) = a w_n \vartheta,$$

woraus

$$w_n = c - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{(T_n)} a w_n \vartheta G_n(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

folgt, wenn unter G_n die Greensche Funktion von T_n verstanden wird. Hieraus liest man ab, daß

$$\iiint\limits_{(T_n)} a w_n \vartheta G_n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \leqq 4\pi c$$

und wegen $\mu \leqq \vartheta$ also erst recht

$$\iiint\limits_{(T_n)} a w_n G_n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \leqq \frac{4\pi c}{\mu} \tag{9}$$

sein muß. Hieraus soll nun noch der Schluß gezogen werden, daß mit wachsendem n w_n in T^* gleichmäßig gegen Null konvergiert, womit dann wegen (8) alles bewiesen wäre.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Gebiete $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ auf folgende Weise festlegen. Wir wählen einen von nun an festgehaltenen Punkt P_0 im Innern von T, doch soll P_0 nicht zu der Schicht R gehören. Die Greensche Funktion für den Grundbereich T mit P_0 als Pol ist eine in R reguläre Potentialfunktion des Aufpunktes (x, y, z) und werde als solche mit $t(x, y, z)$ bezeichnet. Es ist $t(x, y, z) = 0$ auf S, $t(x, y, z) > 0$ im Innern von R, und ferner ist auf S überall $\frac{\partial t}{\partial \nu} > 0$ [1]. Da ferner wegen der stetigen Krümmung von S auch $\frac{\partial t}{\partial \nu}$ auf S stetig ist [2], so hat $\frac{\partial t}{\partial \nu}$ auf S eine von Null verschiedene untere Grenze $c' > 0$. Ferner ist $\frac{t}{\varrho}$ positiv und stetig im Innern von R und strebt mit $\varrho \to 0$ gegen $\frac{\partial t}{\partial \nu}$ auf S. Daher ist $\frac{t}{\varrho}$ auch in R samt Rand stetig und positiv, besitzt also eine positive untere und eine positive obere Grenze

$$0 < c_1 \leqq \frac{t}{\varrho} \leqq c_2$$

in R. Ferner ist nach (7)

$$0 < c_3 \leqq a\varrho^2 \leqq c_4,$$

mit gewissen Konstanten c_3 und c_4, also insgesamt

$$0 < C_1 \leqq t^2 a \leqq C_2 \tag{10}$$

in R.

Es sei $\Phi(p)$ die Niveaufläche, auf der $t(x, y, z) = p$ gilt, $p > 0$. Dann ist $t(x, y, z) - p$ die Greensche Funktion mit dem Pol P_0 für den von $\Phi(p)$ berandeten Bereich. Es läßt sich zeigen, daß $\Phi(p)$ in

---

[1] Vgl. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Enzykl. d. math. Wiss. II, 3, S. 247.

[2] Ebenda, S. 243—244.

jedem Punkte eine bestimmte Normalenrichtung ν besitzt; also ist auch hier $\frac{\partial t}{\partial \nu} > 0$. Genauer ergibt sich:

$$(11)\qquad \frac{\partial t}{\partial \nu} = |\operatorname{grad} t| = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2},$$

ist also eine stetige Funktion in R; daher ist

$$0 < \frac{\partial t}{\partial \nu} = |\operatorname{grad} t| \leqq C$$

für alle in R gelegenen Niveauflächen $\Phi(p)$.

Die Niveaufläche $\Phi\left(\frac{1}{n}\right)$ heiße S_n und sei die Begrenzung des hierdurch definierten Gebietes T_n. Dabei nehmen wir n schon gleich so groß an, daß $\Phi\left(\frac{1}{n}\right)$ ganz in R gelegen ist. Die Gesamtheit aller so definierten Gebiete T_n erschöpft ganz T.

Nun sei T_m ein Gebiet, das T^* samt seiner Begrenzung S^* ganz im Innern enthält; die Zahl m wird im folgenden festgehalten und $n > m$ angenommen. Wenn der Punkt (ξ, η, ζ) auf S_m variiert, (x, y, z) dagegen in T^*, so ist $G_n(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ eine positive stetige Funktion, da ja S_m und T^* einen von Null verschiedenen Abstand haben. Sie nimmt also unter diesen Einschränkungen der Variablen ein Minimum l und ein Maximum L an. Als Funktion von ξ, η, ζ in $T_n - T_m$ betrachtet, ist G_n eine Potentialfunktion, die auf S_n verschwindet und größer ist als die auf S_n verschwindende Potentialfunktion, die auf S_m gleich l ist, und kleiner als die auf S_n verschwindende Potentialfunktion mit dem Werte L auf S_m, d. h. in $T_n - T_m$ gilt

$$(12)\qquad \frac{t(\xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}\, l \leqq G_n(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \leqq \frac{t(\xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}\, L.$$

Aus (9), (10), (12) folgt

$$(13)\qquad \iiint\limits_{(T_n - T_m)} w_n \frac{t(\xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{n}}{t(\xi, \eta, \zeta)^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \leqq \frac{4\pi c}{\mu C_1 l}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) < \frac{4\pi c}{\mu C_1 l m}.$$

Auf der Niveaufläche $\Phi(p)$ sei $d\sigma$ das Flächenelement, und $\delta(\xi, \eta, \zeta)$ sei der durch dp dividierte Abstand von $\Phi(p)$ und $\Phi(p + dp)$ im

Limes für $dp \to 0$; δ ist nach (11) als das Reziproke des Gradienten von t eine stetige positive Funktion, deren untere Grenze $d > 0$ ist. Das Integral in (13) kann man daher schreiben:

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{p-\frac{1}{n}}{p^2}\, dp \iint\limits_{\Phi(p)} w_n\, \delta\, d\sigma \geqq d \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{p-\frac{1}{n}}{p^2}\, dp \iint\limits_{\Phi(p)} w_n\, d\sigma.$$

Bezeichnen wir mit $\varkappa_n$ das Minimum von $\iint\limits_{\Phi(p)} w_n\, d\sigma$, wenn $\frac{1}{n} \leqq p \leqq \frac{1}{m}$, so schließen wir aus (13) erst recht

$$\varkappa_n \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{p-\frac{1}{n}}{p^2}\, dp \leqq \frac{4\pi c}{\mu C_1 l m d}.$$

Nun ist aber

$$\varkappa_n \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{p-\frac{1}{n}}{p^2}\, dp = \varkappa_n \left[\log\left(\frac{n}{m}\right) + \frac{1}{n}(m-n)\right].$$

Da mit $n \to \infty$ die eckige Klammer über alle Grenzen wächst, so muß wegen der Beschränktheit des ganzen Ausdrucks $\varkappa_n \to 0$ streben. Es gibt also zu vorgeschriebenem ε bei hinreichend hohem n in $T_n - T_m$ ein solches $\Phi(p)$ — es heiße $\Phi(p_\varepsilon)$ —, daß

$$\iint\limits_{\Phi(p_\varepsilon)} w_n\, d\sigma < \varepsilon.$$

Nun ist nach Definition w_n die Differenz zweier Lösungen von (2a), also nach XVIII, § 2, 2, b) im Innern von $\Phi(p_\varepsilon)$ kleiner als die Potentialfunktion ω, die mit w_n auf $\Phi(p_\varepsilon)$ übereinstimmt. Nach XVII, § 1, (10) ist

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Phi(p_\varepsilon)} w_n \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

worin G_ε die Greensche Funktion des von $\Phi(p_\varepsilon)$ begrenzten Bereiches ist. Die obere Abschätzung (12) gilt aber für G_ε, wenn wir darin $\frac{1}{n}$ durch p_ε ersetzen, also

$$G_\varepsilon \leqq \frac{t(\xi,\eta,\zeta)-p_\varepsilon}{\frac{1}{m}-p_\varepsilon} L.$$

Da hierin auf $\Phi(p_\varepsilon)$ das Gleichheitszeichen gilt, so kann von $\Phi(p_\varepsilon)$ aus in der Richtung der inneren Normalen ν die linke Seite der Ungleichung höchstens so stark wachsen wie die rechte Seite, daher

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial \nu} \leqq \frac{\partial t}{\partial \nu} \frac{L}{\frac{1}{m}-p_\varepsilon} < B,$$

wo B eine Konstante ist, da $\frac{\partial t}{\partial \nu}$ in $T - T_m$ beschränkt ist. Folglich ist

$$w_n \leqq \omega \leqq \frac{B}{4\pi} \iint\limits_{\Phi(p_\varepsilon)} w_n \, d\sigma < \frac{B\varepsilon}{4\pi}.$$

Damit ist der Beweis erbracht, daß v_n in T^* gleichmäßig gegen einen Limes v konvergiert, der dann nach XVIII, § 2, 2, c) selbst eine Lösung von (2a) sein muß. Von diesem Limes gilt

$$\log \mu \leqq v \leqq \log M,$$

da diese Ungleichung für alle approximierenden Funktionen gilt.

Setzen wir wieder $u = v + H$, so ist u die gewünschte Lösung von (1), die wie $-2\log\varrho$ unendlich wird, wenn (x, y, z) an die Begrenzung S von T heranrückt. Diese Lösung ist auch die einzige von der Art, daß $u + 2\log\varrho$ in ganz T zwischen zwei festen Grenzen bleibt. Denn gäbe es noch eine zweite — sie heiße u' —, so müßte $v' = u' - H$ gleichfalls in T beschränkt bleiben. Setzt man dann in die Folge $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ abwechselnd v und v' ein, so hat man auch hier eine Folge gleichmäßig beschränkter Lösungen von (2a) in den Gebieten T_n. Da aber der ganze Konvergenzbeweis nur auf der gleichmäßigen Beschränktheit der v_n beruht, so muß auch die aus v und v' abwechselnd bestehende Folge konvergieren, d. h. es muß $v \equiv v'$ sein.

§ 3. Die Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ und anschließende Probleme

1. Die Probleme. Wir behandeln in diesem und dem folgenden Paragraphen die Gleichungen

(1) a) $\Delta\Delta u = 0$, b) $\Delta\Delta u = f$, c) $\Delta\Delta u = \lambda u$,

in denen f eine gegebene Ortsfunktion, λ eine Konstante ist, während in der Ebene

$$(2a)\quad \Delta\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

im Raume

$$(2b)\quad \Delta\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial z^2} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial y^2\,\partial z^2}.$$

Unter einer regulären Lösung der Gl. (1) werden wir eine viermal stetig differenzierbare verstehen. Die regulären Lösungen der Gl. (1a) werden wir auch als biharmonische Funktionen bezeichnen. Wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird, ist im folgenden stets der ebene Fall gemeint. Im Mittelpunkt der Betrachtung wird die Frage nach denjenigen regulären Lösungen u der Gl. (1) stehen, die an dem (als rektifizierbar vorausgesetzten) Rand R eines im Endlichen gelegenen Bereiches $\mathfrak{B}$ nebst ihrer Normalableitung vorgegebenen Randwerten g und h zustreben, für die also die Randbedingungen

$$(3)\qquad u = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h(s)$$

bestehen, wo n die äußere Normale des Randes, s seine Bogenlänge bedeutet, die von einem beliebigen Punkte aus so gerechnet ist, daß die Richtung wachsender s-Werte auf die positive n-Richtung folgt wie die positive y- auf die positive x-Achse. Diese Frage werden wir kurz als das Randwertproblem der betreffenden Gleichung bezeichnen. Daneben wird auch (§ 4, 2) das Eigenwertproblem der Gl. (1c) zur Sprache kommen, d. h. die Frage nach denjenigen λ-Werten, für die das durch (1c) und die Randbedingungen

$$(4)\qquad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

gegebene homogene Problem nicht identisch verschwindende Lösungen (Eigenfunktionen) besitzt, und im Anschluß hieran das Problem der Entwicklung willkürlicher [jedoch den Randbedingungen (4) genügender] Funktionen nach den Eigenfunktionen.

Die Behandlung der an Gl. (1) anknüpfenden Probleme erscheint vom mathematischen Standpunkt als naturgemäße Fortführung der beim Operator Δ durchgeführten Untersuchungen (vgl. XVI u. XVII). Auch die Anwendung in der Physik ist eine analoge. So sind die Verschiebungskomponenten eines homogenen isotropen, keinen Massen-

kräften unterworfenen Körpers räumliche biharmonische Funktionen. Die Ausbiegung u einer dünnen, ursprünglich ebenen elastischen Platte, die senkrechter Belastung unterworfen ist, bildet eine Lösung des Randwertproblems (1b), (3), wobei $f(x, y)$ durch die Belastung, g und h durch die Art der Befestigung des Randes der Platte bestimmt sind; insbesondere entsprechen der am Rande überall festgehaltenen Platte die homogenen Randbedingungen (4). Zum Eigenwert- und Entwicklungsproblem führt die Betrachtung der Schwingungen einer dünnen, keiner Belastung unterworfenen, an ihrem Rande R festgehaltenen Platte. Hier genügt die Ausbiegung $v(x, y, t)$ an der Stelle x, y zur Zeit t der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k\Delta\Delta v = 0 \qquad (k = \text{const}) \tag{5}$$

und am Rande für alle t den Bedingungen

$$v(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial n} = 0. \tag{6}$$

Der Ansatz $v(x, y, t) = u(x, y)\sin\alpha t$ liefert zufolge (5) und (6) für u das Problem (1c), (4) mit $\lambda = \alpha^2/k$. Ist λ_ν ein Eigenwert, u_ν eine zugehörige Eigenfunktion dieses Problems, so wird $v_\nu = u_\nu \sin\alpha_\nu t$; wenn α_ν aus $\lambda_\nu = \alpha_\nu^2/k$ bestimmt ist, eine Lösung des Problems (5), (6) sein; das gleiche gilt, wie man ebenso erkennt, von $\bar{v}_\nu = u_\nu \cos\alpha_\nu t$, und wegen der Homogenität des Problems daher auch von jeder Summe $\sum\limits_\nu (A_\nu \sin\alpha_\nu t + B_\nu \cos\alpha_\nu t) u_\nu(x, y)$, worin die A_ν, B_ν beliebige Konstanten sind. Bemerken wir nun, daß die Bewegung der Platte erst bestimmt ist, wenn Anfangslage $v_0(x, y)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{v}_0(x, y)$ des Punktes x, y zur Zeit $t = 0$ gegeben sind, so muß v noch den Bedingungen

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad \left[\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \dot{v}_0(x, y) \tag{7}$$

genügen, wobei v_0 und $\dot{v}_0$ wegen (6) die Randbedingungen (4) erfüllen müssen. Setzen wir in (7) für v die oben angeführte Summenlösung ein, so erhalten wir unter Voraussetzung hinreichender Konvergenzeigenschaften:

$$v_0(x, y) = \sum_\nu B_\nu u_\nu(x, y), \quad \dot{v}_0(x, y) = \sum_\nu \alpha_\nu A_\nu u_\nu(x, y). \tag{8}$$

D. h.: Ist das physikalische Problem überhaupt mit unserem Ansatz lösbar, so muß es möglich sein, die willkürlichen, den Randbedingungen (4) genügenden Funktionen v_0 und $\dot{v}_0$ nach den Eigenfunktionen u_ν des Problems (1c), (4) zu entwickeln.

2. Darstellung biharmonischer Funktionen durch harmonische[1]). Sind u_1, u_2 zwei in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ harmonische Funktionen, so ist

$$u = x u_1 + u_2 \tag{9}$$

in $\mathfrak{B}$ eine biharmonische Funktion, wie man unter Benutzung der Identität

$$\Delta(\varphi \cdot \psi) = \varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi + 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \tag{10}$$

sofort verifiziert. Wenn der Rand von $\mathfrak{B}$ von jeder Parallelen zur x-Achse in höchstens zwei Punkten geschnitten wird, so gilt aber auch die Umkehrung: zu jeder gegebenen in $\mathfrak{B}$ biharmonischen Funktion u lassen sich zwei daselbst harmonische Funktionen u_1 und u_2 so finden, daß für u die Darstellung (9) gilt. Diese Behauptung wird erwiesen sein, wenn wir u_1 so bestimmen können, daß

$$\text{a) } \Delta u_1 = 0, \qquad \text{b) } \Delta(u - x u_1) = 0. \tag{11}$$

Die zweite Gleichung können wir unter Benutzung der ersten sowie der Identität (10) schreiben

$$\Delta u = \Delta(x u_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{12}$$

Die Funktion

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2} \Delta u(\xi, y)\, d\xi,$$

worin die untere Grenze x_0 der eine Durchstoßpunkt der betreffenden Parallelen zur x-Achse mit dem Rande von $\mathfrak{B}$ ist, genügt nun jedenfalls der Gl. (12). Es ist daher, weil u biharmonisch ist,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta \bar{u}_1 = \Delta\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

d. h. $\Delta \bar{u}_1$ ist eine Funktion $v(y)$ von y allein. Bestimmen wir nun eine Funktion $\bar{\bar{u}}_1(y)$ von y allein aus

$$\Delta \bar{\bar{u}}_1 \equiv \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

so genügt offenbar $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$ den Gl. (11a) und (12), also auch (11a) und (11b), womit alles bewiesen ist.

Da jede harmonische Funktion analytisch ist (XVI, § 1, **3**), so können wir als spezielle Folgerung der Darstellung (9) den Satz aussprechen: Jede biharmonische Funktion ist analytisch.

---

[1]) Vgl. zu dieser und der folgenden Nummer Almansi, Sull' integrazione dell' Equazione differenziale $\Delta^2 n = 0$. Annali di Matimatica, Ser. III, T. II, 1899.

Enthält der Bereich $\mathfrak{B}$ den Nullpunkt und wird sein Rand von jedem vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl in nur einem Punkte geschnitten, so gestattet jede daselbst biharmonische Funktion u folgende Darstellung durch zwei in $\mathfrak{B}$ harmonische u_1, u_2:

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2 \qquad (r^2 = x^2 + y^2), \tag{13}$$

worin r_0 eine vorgegebene Konstante ist, und umgekehrt ist jede Funktion u dieser Form in $\mathfrak{B}$ biharmonisch. Den zweiten Teil der Behauptung bestätigt man durch direkte Rechnung. Den ersten beweisen wir, indem wir u_1 so zu bestimmen suchen, daß

$$\text{a) } \Delta u_1 = 0, \qquad \text{b) } \Delta [u - (r^2 - r_0^2)\, u_1] = 0 \tag{14}$$

ist. (14 b) läßt sich unter Benutzung von (14 a), (10) sowie der Beziehungen

$$\Delta r^2 = 4, \quad \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial r}$$

umformen in

$$u_1 + r\, \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{4} \Delta u. \tag{15}$$

Die Gleichungen (15) und (14 a) werden aber durch

$$u_1 = \frac{1}{r} \int\limits_0^r \frac{1}{4} \Delta u \, d\varrho \tag{16}$$

erfüllt. Man bestätigt dies durch direkte Rechnung, wobei man zur Verifikation der Gl. (14 a), die man zweckmäßig in Polarkoordinaten schreibt, die Gleichung $\Delta \Delta u = 0$ zu benutzen hat.

Wir bemerken, daß die zu (9) und (13) analogen Darstellungen auch für räumliche biharmonische Funktionen gelten[1]); die Beweise verlaufen ganz analog. Im ebenen Falle kann man noch eine Darstellung einer biharmonischen Funktion u mittels komplexer Funktionen angeben[2]): Setzt man $\Delta u = P(x, y)$, so ist wegen (1 a) P eine harmonische Funktion. Ist nun $Q\,(x, y)$ eine zu P konjugiert har-

---

[1]) Diese Darstellungen kann man dazu benutzen, für harmonische Funktionen gewonnene Entwicklungssätze auf biharmonische zu übertragen. Vgl. darüber: St. Bergmann, Über die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper. Math. Annalen 98 (1928).

[2]) Goursat [Bulletin d. l. Soc. Math. de France 26 (1898)]; die im Text gegebene Darstellung nach N. Muschelišvili (Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Tiflis 1922).

monische Funktion (s. III, § 1, **3**) und sind $R(x, y)$ und $J(x, y)$ Real- und Imaginärteil des Integrals

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int^z (P + i\,Q)\,dz \qquad (z = x + i\,y),$$

so ist

$$\Delta\,\{u - (x\,R + y\,J)\} = 0.$$

Dies folgt unmittelbar aus (10), wenn man beachtet, daß (nach III, § 1, **3**) $\Delta R = \Delta J = 0$ ist, und daß

$$\frac{1}{4}\int^z (P + i\,Q)\,dz = \frac{1}{4}\int^z (P\,dx - Q\,dy) + \frac{i}{4}\int^z (Q\,d\,x + P\,d\,y),$$

also $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial J}{\partial y} = \dfrac{1}{4}\,P$ ist. $u - x\,R - y\,J$ ist also eine harmonische Funktion u_1 und wir erhalten die Darstellung

$$u = x\,R + y\,J + u_1,$$

oder die damit identische:

$$u = \text{Realteil}\ \{\bar{z}\,\varphi(z) + \psi(z)\},$$

wobei $\psi(z)$ eine analytische Funktion mit dem Realteil u_1 bedeutet.

3. Die biharmonische Randwertaufgabe für den Kreis. Die Darstellung (13) gestattet sofort, eine explizite Formel für die Lösung der Randwertaufgabe (1 a), (3) im Falle des Kreises aufzustellen. Nehmen wir an, es handle sich um den Kreis mit dem Nullpunkt als Zentrum und dem Radius r_0. Falls eine Lösung u des Problems existiert, läßt sie sich in der Form (13) darstellen. Nach dieser Formel wird auf dem Kreise $u = u_2$; daher ist u_2 die durch die Randbedingung $u_2 = g$ eindeutig bestimmte harmonische Funktion, die durch das Poissonsche Integral [XVI, § 1, (6')]

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\,g\,d\alpha}{r_0^2 + r^2 - 2\,r\,r_0\cos(\alpha - \vartheta)}, \tag{17}$$

worin r, ϑ die Polarkoordinaten des Punktes x, y sind, gegeben wird. Zur Bestimmung von u_1 differenzieren wir (13) nach r:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2\,r\,u_1 + (r^2 - r_0^2)\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r}. \tag{18}$$

Wegen (3) wird hiernach für $r = r_0$, da $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$ ist:

$$2\,r_0\,u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} = h. \tag{19}$$

Da nun, wie man sofort nachrechnet, mit u_1 und u_2 auch

$$2 r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

harmonisch ist und diese Funktion die Randwerte (19) annimmt, so liefert uns die Poissonsche Integralformel

$$2 r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) h \, d\alpha}{r_0^2 + r^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \vartheta)}. \tag{20}$$

Trägt man hier den nach (17) berechneten Wert für $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ ein, so erhält man schließlich aus (13), (17), (20) als notwendige Gestalt der Lösung

$$u = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \vartheta)} + \int_0^{2\pi} \frac{g [r_0 - r \cos(\alpha - \vartheta)] \, d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \vartheta)]^2} \right]. \tag{21}$$

Da aus späteren Betrachtungen (vgl. 4) folgt, daß unser Problem eine Lösung besitzt, falls g und h endlich und integrierbar sind und g überdies eine Ableitung der gleichen Eigenschaft hat, so löst unter diesen Voraussetzungen die Funktion (21) tatsächlich die Aufgabe.

Die eben angewandte Methode der Zurückführung des Problems (1a), (3) auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie läßt sich nicht nur beim Kreis, sondern auch bei allen denjenigen Bereichen $\mathfrak{B}$, auf die die konforme Abbildung des Einheitskreises durch Polynome geleistet wird, anwenden. Entspricht nämlich bei dieser Abbildung der Punkt x, y von $\mathfrak{B}$ dem Punkt x_1, y_1 des Einheitskreises, so läßt sich, wie wir ohne Beweis angeben wollen, die Lösung u unseres Problems darstellen durch:

$$u = x u_1 + y u_2 + u_3 + P(x_1, y_1). \tag{22}$$

Hierbei sind u_1, u_2, u_3 in $\mathfrak{B}$ harmonische Funktionen, die durch die Randbedingungen

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_3 = u - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}$$

eindeutig bestimmt sind. (Man beachte, daß mit $u = g$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = h$ auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ am Rande gegeben sind, falls g differenzierbar ist, was

wir voraussetzen wollen.) P ist ein Polynom, dessen Grad doppelt so groß ist wie der des Abbildungspolynoms. Die zur Bestimmung von P nötigen Konstanten lassen sich durch Auflösen linearer Gleichungen finden[1]).

Ausgehend von der am Schluß von 2 angegebenen Darstellung von u als Realteil komplexer Funktionen hat Muschelišvili l. c. eine weitertragende Methode angegeben, die unser Problem auch für Bereiche $\mathfrak{B}$, auf die die konforme Abbildung des Einheitskreises durch rationale Funktionen geleistet wird, zu lösen gestattet. Diese Methode ist auch auf unendliche Bereiche $\mathfrak{B}$ von der angegebenen Eigenschaft anwendbar.

4. Die biharmonische Randwertaufgabe für einen beliebigen Bereich. Wir wollen in dieser und der folgenden Nummer zeigen, daß das Problem (1a), (3) eine reguläre Lösung besitzt, wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ das Innere einer geschlossenen, sich nicht überschneidenden Kurve R, deren Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge s dreimal stetig differenzierbar sind, bildet und $g(s)$ eine endliche und integrierbare Ableitung besitzt, während $h(s)$ selbst endlich und integrierbar ist. Wir werden diesen Existenzbeweis jedoch nicht in allen Teilen vollkommen durchführen[2]).

Wir ersetzen zunächst das Problem (1 a), (3) für die Funktion u durch ein äquivalentes für die Funktionen

$$U = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{23}$$

Setzen wir

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \Delta u, \tag{24}$$

so ergibt die Rechnung als Folge von (1 a) und (3) die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \Delta\theta = 0, \tag{25}$$

und, unter Benutzung der bekannten Relationen

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dn}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn}, \tag{26}$$

die Randbedingungen

$$U = h(s)\frac{dx}{dn} - \frac{dg}{ds}\frac{dy}{dn} = a(s), \quad V = h(s)\frac{dy}{dn} + \frac{dg}{ds}\frac{dx}{dn} = b(s). \tag{27}$$

---

[1]) Näheres s. Almansi, Integrazione della doppia equatione di Laplace. Rend. d. R. Acc. d. Lincei **9**, 1⁰ Sem., 298, 1900.

[2]) Der hier gegebene Beweis stammt von Lauricella (Sur l'integration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Mathematica **32**, 1909).

Umgekehrt können wir aus jeder Lösung U, V von (25), (27) eine Lösung u von (1 a), (3) herleiten. Aus der ersten Gl. (25) folgt zunächst die Existenz einer (bis auf eine additive Konstante bestimmten) Funktion u, die die Gl. (23) erfüllt. Diese genügt dann wegen der zweiten Gl. (25) auch der Gl. (1 a). Ferner erhalten wir nach (23), (27) und (26) am Rande

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} = U\frac{dx}{dn} + V\frac{dy}{dn} = h(s),$$

$$u = \int_0^s \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \text{Const} = \int_0^s \left(U\frac{dx}{ds} + V\frac{dy}{ds}\right)ds + \text{Const}$$

$$= \int_0^s \frac{dg}{ds}ds + \text{Const} = g(s) + \text{const.}$$

Durch passende Wahl der bei der Bestimmung von u willkürlichen Konstanten können wir hiernach erreichen, daß auch die Randbedingungen (3) erfüllt sind.

Nach dem Vorstehenden genügt es also, die Existenz dreimal stetig differenzierbarer Lösungen des Problems (25), (27) zu beweisen. Wir bemerken, daß zwischen den in der Randbedingung (27) auftretenden Funktionen a, b eine Relation besteht. Auf Grund der ersten Gl. (25) muß nämlich, wie bekannt, das über die geschlossene Randkurve R erstreckte $\int(U\,dx + V\,dy)$ verschwinden, daher muß auch

$$(28) \qquad -\int_{(R)} \left(a\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds}\right)ds = \int_{(R)} \{a\cos(ny) - b\cos(nx)\}\,ds = 0$$

sein.

5. Lösung der Randwertaufgabe durch zwei simultane Integralgleichungen. In ähnlicher Weise wie bei dem in XIV, § 3, 2 gegebenen Existenzbeweis, wo man die Belegung einer Doppelschicht unter Benutzung der Unstetigkeit des Potentials der Doppelschicht durch eine Integralgleichung so bestimmen kann, daß die eine dort gestellte Randbedingung erfüllt wird, werden wir hier eine von zwei willkürlichen Funktionen abhängende Lösung von (25) aufstellen, die bei Annäherung an den Rand ähnliche Unstetigkeiten aufweist, wie das Potential einer Doppelschicht, und die willkürlichen Funktionen aus Integralgleichungen so bestimmen, daß die zwei Randbedingungen (27) erfüllt werden.

Wir führen zu diesem Zwecke die Funktionen

$$(29)\quad \begin{cases} X'(x,y,\xi,\eta) = 2\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 \frac{d\log r}{d\nu}, & Y'(x,y,\xi,\eta) = -2\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{d\log r}{d\nu}, \\ X''(x,y,\xi,\eta) = -2\frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{d\log r}{d\nu}, & Y''(x,y,\xi,\eta) = 2\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 \frac{d\log r}{d\nu} \end{cases}$$

ein. Hierin bedeutet x, y einen inneren Punkt von $\mathfrak{B}$, ξ, η einen Punkt von R, ν die äußere Normale im Punkte ξ, η, während $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ ist. Wie man durch direktes Nachrechnen bestätigt, bestehen die Gleichungen:

$$(30)\quad \frac{\partial X'}{\partial y} = \frac{\partial X''}{\partial x},$$

$$(31)\quad \frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial X''}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\log r}{d\nu}.$$

Wegen $\Delta \log r = 0$ folgt aus (31) $\Delta\left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial X''}{\partial y}\right) = 0$. Dies zusammen mit Gl. (30) besagt, daß X', X'' (als Funktionen von x, y) eine Lösung von (25) ist. Das gleiche gilt, wie man ebenso erkennt, von Y' und Y''. Sind daher $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ beliebige stetige Funktionen, so ist auch

$$(32)\quad U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(R)} (X'\varphi + Y'\psi)\,ds,\quad V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(R)} (X''\varphi + Y''\psi)\,ds$$

eine Lösung von (25). Das Verhalten von U und V, wenn sich der Punkt x, y dem Randpunkt $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$ nähert, ist nun ganz analog dem Verhalten des Potentials einer Doppelschicht (XIV, § 1, 5). Setzen wir nämlich

$$(33)\quad \begin{cases} X'\,[x(s_0), y(s_0), \xi(s), \eta(s)] = K_{11}(s_0, s), \\ X''[x(s_0), y(s_0), \xi(s), \eta(s)] = K_{21}(s_0, s), \\ Y'\,[x(s_0), y(s_0), \xi(s), \eta(s)] = K_{12}(s_0, s), \\ Y''[x(s_0), y(s_0), \xi(s), \eta(s)] = K_{22}(s_0, s), \end{cases}$$

so läßt sich zeigen, daß, wenn l die Länge von R bedeutet:

$$(34)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} U(x,y) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l [K_{11}(s_0,s)\,\varphi(s) + K_{12}(s_0,s)\,\psi(s)]\,ds, \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} V(x,y) = \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l [K_{21}(s_0,s)\,\varphi(s) + K_{22}(s_0,s)\,\psi(s)]\,ds \end{cases}$$

ist. Aus dieser Tatsache, deren Beweis wir übergehen, folgt: Sollen U und V die Randbedingungen (27) erfüllen, so muß

$$(35)\quad \begin{cases} a(s_0) = \varphi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^l [K_{11}(s_0, s)\,\varphi(s) + K_{12}(s_0, s)\,\psi(s)]\,ds, \\ b(s_0) = \psi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^l [K_{21}(s_0, s)\,\varphi(s) + K_{22}(s_0, s)\,\psi(s)]\,ds \end{cases}$$

sein. Umgekehrt wird jedes Funktionenpaar (32), das mit einer stetigen Lösung φ, ψ des Integralgleichungssystems (35) gebildet ist, das Problem (25), (27) lösen. Uberdies wird diese Lösung im Innern von $\mathfrak{B}$ beliebig oft differenzierbar sein, da das Entsprechende von den Funktionen X', Y', X'', Y'' gilt.

Alles ist also bewiesen, wenn wir zeigen können, daß (35) eine stetige Lösung besitzt. Um uns nun über die Lösbarkeitsbedingungen eines solchen Systems klar zu werden, führen wir dieses auf eine Integralgleichung zurück, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} K(s_0, s) &= K_{11}(s_0, s) && \text{für}\quad 0 \leqq s < l, && 0 \leqq s_0 < l; \\ &= K_{12}(s_0, s - l) && \text{„}\quad l \leqq s \leqq 2l, && 0 \leqq s_0 < l; \\ &= K_{21}(s_0 - l, s) && \text{„}\quad 0 \leqq s < l, && l \leqq s_0 \leqq 2l; \\ &= K_{22}(s_0 - l, s - l) && \text{„}\quad l \leqq s \leqq 2l, && l \leqq s_0 \leqq 2l; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(s) &= a(s), & \Phi(s) &= \varphi(s) \quad \text{für } 0 \leqq s < l, \\ &= b(s - l), & &= \psi(s - l) \text{ „}\quad l \leqq s \leqq 2l. \end{aligned}$$

Alsdann wird das System (35) äquivalent mit der einen Integralgleichung

$$(36)\qquad A(s_0) = \Phi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2l} K(s_0, s)\,\Phi(s)\,ds.$$

Aus dem am Schluß von XII, § 1, 5 angeführten Lösbarkeitskriterium der Gl. (36), das nach XII, § 4 für unseren Kern Anwendung finden kann, erschließt man nun ohne weiteres die für das System (35). Man hat hiernach das homogene System zu betrachten, das aus (35) entsteht, wenn man auf den linken Seiten 0 an Stelle von a und b einführt. Hat das zu diesem adjungierte System, das man erhält, indem man in den Kernen K_{ik} s mit s_0 und außerdem K_{12} mit K_{21} vertauscht, nicht identisch verschwindende Lösungen, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz stetiger Lösungen von (35): für jede Lösung $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ des adjungierten Systems muß

$$(37)\qquad \int_{(R)} [a(s)\,\overline{\varphi}(s) + b(s)\,\overline{\psi}(s)]\,ds = 0$$

sein. Es läßt sich nun, wie nicht näher ausgeführt werden soll, in unserem Falle zeigen, daß $\bar{\varphi} = \cos(n\,y)$, $\bar{\psi} = -\cos(n\,x)$ die einzige (linear unabhängige) Lösung des adjungierten Systems ist. Die Bedingung (37) wird daher identisch mit der Gl. (28), von der wir wissen, daß sie erfüllt ist.

Betrachten wir noch einen Augenblick die dem Problem (1a), (3) entsprechende räumliche Randwertaufgabe. Hier bedeute R eine geschlossene Fläche, $\mathfrak{B}$ den von dieser begrenzten endlichen Raum, n die äußere Flächennormale, g und h zwei auf der Fläche definierte stetige Funktionen, von denen die erste noch stetige erste Ableitungen besitzen möge. Wir geben, ohne näher darauf einzugehen, an, daß sich der Existenzbeweis hier mit Methoden erbringen läßt, die denen im ebenen Falle angewandten analog sind, wenn man über die Fläche R die folgenden Voraussetzungen macht: Sie besitzt eine stetige Tangentialebene; es existiert eine feste positive Zahl α, so daß die in irgend zwei Punkten von R errichteten Normalen einen Winkel bilden, der kleiner ist als das α-fache des geradlinigen Abstandes der beiden Punkte [1]).

§ 4. Anwendung der Greenschen Methode auf $\Delta\Delta u$

Die in XIV, § 1, 3 angewandte Methode, die in der Hauptsache auf der Verwendung der Greenschen Formel [ebenda Gl. (9)] einerseits und des partikulären Integrals $\frac{1}{2\pi}\log r$ anderseits beruhte, bezeichnet man häufig auch als Greensche Methode. Sie läßt sich, wie das folgende zeigt, in ganz analoger Weise auch auf andere Gleichungen anwenden.

1. Randwertproblem. Wenn wir uns auf solche Lösungen u von § 3, (1) beschränken, für die Δu und $\frac{\partial \Delta u}{\partial n}$ bis in den Rand von $\mathfrak{B}$ hinein existieren und stetig sind [2]), wird uns die Greensche Methode gestatten: Erstens die Eindeutigkeit der Lösungen des Problems § 3, (1a), (3) zu beweisen, zweitens unter einer später anzugebenden Voraussetzung über f Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen auch für das Problem § 3, (1b), (3) zu behaupten, drittens die Lösungen dieser Probleme explizite anzugeben, sobald man die für ein bestimmtes von einem Parameter abhängendes Paar der in der Randbedingung § 3, (3) auftretenden Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ kennt,

[1]) Vgl. Lauricella, Sulla integrazione dell' equazione $\Delta^4 = 0$. Rend. d. R. Acc. d. Lincei **16**, 2° Sem., 373, 1907.

[2]) Es läßt sich zeigen, daß die in § 3, 4, 5 konstruierte Lösung die genannte Bedingung gewiß dann erfüllt, wenn die gegebenen Funktionen g, h sowie der Rand viermal stetig differenzierbar sind.

viertens schließlich (s. 2) das in § 3, 1 erwähnte Eigenwert- und Entwicklungsproblem anzugreifen.

Wir gehen aus von der Greenschen Formel [II, § 3, (34)], die für einen ebenen Bereich $\mathfrak{B}'$ mit dem Rande R', wenn wir in ihr u durch Δu ersetzen, lautet:

$$(1) \qquad \int\limits_{(\mathfrak{B}')} (\Delta u \Delta v - v \Delta\Delta u)\, do = \int\limits_{(R')} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right) ds,$$

wobei wir voraussetzen, daß u in B' viermal stetig differenzierbar ist[1]). Diese Formel gestattet uns schon zu zeigen, daß die Probleme § 3, (3), (1a) bzw. (1b) nicht mehr als eine reguläre Lösung besitzen können. In der Tat muß die Differenz u' zweier regulärer Lösungen eines dieser Probleme offenbar eine reguläre Lösung von § 3, (1a), (4) sein, so daß Anwendung von (1) auf den Bereich $\mathfrak{B}$ für $u = v = u'$ ergibt:

$$\int\limits_{(\mathfrak{B})} (\Delta u')^2\, do = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $\Delta u'$ folgt hieraus $\Delta u' = 0$; u' ist also harmonisch und muß daher wegen der ersten Randbedingung § 3, (4) identisch verschwinden, woraus die behauptete Eindeutigkeit folgt.

Ist auch v viermal stetig differenzierbar, so gilt auch die aus (1) durch Vertauschung von u und v entstehende Formel. Ziehen wir diese von (1) ab, so ergibt sich

$$(2) \qquad \int\limits_{(\mathfrak{B}')} (u \Delta\Delta v - v \Delta\Delta u)\, do = \int\limits_{(R')} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right) ds.$$

Betrachten wir nun, wenn ξ, η ein fester, im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt ist, die Funktion

$$(3) \qquad v(x, y, \xi, \eta) = r^2 \ln r, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Als Funktion von x, y ist sie, mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$, $y = \eta$, gewiß viermal stetig differenzierbar und genügt den Gleichungen

$$(4) \qquad \Delta v = 4(\ln r + 1), \quad \Delta\Delta v = 0.$$

Ist daher $\mathfrak{B}'$ der aus $\mathfrak{B}$ durch Herausschneiden eines um ξ, η mit dem Radius ϱ geschlagenen, ganz in $\mathfrak{B}$ gelegenen Kreises K entstandene Bereich, so erhalten wir nach (2), da R' aus R und K besteht,

$$(5) \qquad -\int\limits_{(\mathfrak{B}')} v \Delta\Delta u\, do = \int\limits_{(R, K)} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right) ds.$$

---

[1]) Wir erinnern an die in § 3, 1 getroffenen Festsetzungen über n und s.

Da in einem Punkte der Kreisperipherie K die äußere Normale n von $\mathfrak{B}'$ in das Kreisinnere weist, so gilt auf K:

$$(6) \quad -\frac{\partial v}{\partial n} = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = 2\varrho \ln \varrho + \varrho, \quad -\frac{\partial \Delta v}{\partial n} = \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = \frac{4}{\varrho}$$

und man erkennt, daß

$$(7) \quad \lim_{\varrho \to 0} \int_{(K)} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds = \lim_{\varrho \to 0} \int_{(K)} \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \lim_{\varrho \to 0} \int_{(K)} v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} ds = 0$$

ist, während

$$(8) \quad \lim_{\varrho \to 0} \int_{(K)} u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} ds = \lim_{\varrho \to 0} \int_0^{2\pi\varrho} -\frac{4u}{\varrho} ds = -8\pi u(\xi, \eta).$$

Der Grenzübergang $\varrho \to 0$ in (5) liefert daher

$$(9) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} \int_{(R)} \left(\Delta u \frac{\partial (r^2 \ln r)}{\partial n} - \Delta (r^2 \ln r) \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial \Delta (r^2 \ln r)}{\partial n} - r^2 \ln r \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{8\pi} \int_{(\mathfrak{B})} r^2 \ln r \, \Delta\Delta u \, do.$$

Sei jetzt $v_1(x, y, \xi, \eta)$ die eindeutig bestimmte biharmonische Funktion von x, y, die den Randbedingungen

$$(10) \quad v_1 = -r^2 \ln r, \quad \frac{\partial v_1}{\partial n} = -\frac{\partial (r^2 \ln r)}{\partial n}$$

genügt. Setzen wir in der für $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ angesetzten Gl. (2) $v = v_1$ und addieren diese Formel zu (9), so erhalten wir, wenn

$$(11) \quad r^2 \ln r + v_1 = G(x, y, \xi, \eta)$$

geschrieben wird, wegen (10):

$$(12) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} \int_{(R)} \left(u \frac{\partial \Delta G}{\partial n} - \Delta G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{8\pi} \int_{(\mathfrak{B})} G \Delta\Delta u \, do.$$

Aus dieser Formel folgt, daß, falls überhaupt eine reguläre Lösung des Problems § 3, (1b), (3) existiert, sie notwendig durch die Funktion

$$(13) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} \int_{(R)} \left(g(s) \frac{\partial \Delta G[x(s), y(s), \xi, \eta]}{\partial n} - h(s) \Delta G[x(s), y(s), \xi, \eta] \right) ds + \frac{1}{8\pi} \iint_{(\mathfrak{B})} f(x, y) G(x, y, \xi, \eta) \, dx \, dy$$

dargestellt wird. Um nun zu zeigen, daß das Problem § 3, (1b), (3) stets reguläre Lösungen besitzt, genügt es, sich auf das Problem § 3, (1b), (4) zu beschränken, denn ist u_1 eine reguläre Lösung des zweiten Problems, u_2 die reguläre Lösung von § 3, (1a), (3) (die, wie wir nach § 3, 4 wissen, existiert), so ist $u_1 + u_2$ eine reguläre Lösung von § 3, (1b), (3). Es ist daher nur noch zu verifizieren, daß die aus (13) für $g = h = 0$ entstehende Funktion

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{8\pi} \iint_{(\mathfrak{B})} G(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy \tag{14}$$

eine reguläre Lösung des Problems § 3, (1b), (4) ist. Daß § 3, (4) erfüllt ist, ergibt sich unter Benutzung der später zu beweisenden Symmetrieeigenschaft (16) von G unmittelbar daraus, daß diese Funktion nach (10), (11) selbst diese Bedingungen erfüllt. Weiter wird nach (11) und der ersten Gl. (4), da v_1 biharmonisch ist und, wie der Leser sich überlegen möge, die beiden ersten Differentiationen unter dem Integralzeichen ausgeführt werden dürfen:

$$\varDelta\varDelta u = \frac{1}{8\pi} \varDelta \int_{(\mathfrak{B})} 4(\ln r + 1) f\, do = \frac{1}{2\pi} \varDelta \int_{(\mathfrak{B})} f \ln r\, do.$$

Der letzte Ausdruck rechts wird aber gerade gleich f, sobald diese Funktion für die Anwendbarkeit der Poissonschen Formel [XIV, § 1, Gl. (15')] hinreichende Bedingungen erfüllt. Unter dieser Voraussetzung für f (die z. B. erfüllt ist, wenn f stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt) ist damit alles bewiesen.

Wir können das Vorstehende dahin zusammenfassen: Hat man die spezielle durch (10) gegebene biharmonische Randwertaufgabe einmal gelöst, so läßt sich eine reguläre Lösung des allgemeinen Problems § 3, (1b), (3) nach (13) explizite angeben, und diese durch (13) gegebene ist auch die einzige reguläre Lösung.

2. Greensche Funktion und Entwicklungsproblem. In den Überlegungen von 1 spielt die Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ offenbar die gleiche Rolle wie die Greensche Funktion in der Potentialtheorie. Wir bezeichnen sie daher als die zum Ausdruck $\varDelta\varDelta u$ gehörende Greensche Funktion des Bereiches $\mathfrak{B}$. Sie ist durch die folgenden Eigenschaften eindeutig charakterisiert: Sie genügt (als Funktion von x, y), abgesehen vom Punkte $x = \xi$, $y = \eta$, der Gleichung § 3, (1a); ferner den Randbedingungen § 3, (4); sie ist von der Form $r^2 \ln r + v_1$, wo v_1 eine in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ mindestens viermal stetig differenzierbare Funktion ist.

Die Formel (14) gestattet uns eine anschauliche Deutung der Funktion G, die der auf S. 580 gegebenen für die Greensche Funktion von Differentialausdrücken zweiter Ordnung ganz analog ist. Sei nämlich $U_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ eine unendliche Folge von Umgebungen des Punktes ξ, η, die sich auf diesen Punkt zusammenziehen. Sei $f_\nu\,(x, y)$ in U_ν so definiert, daß

$$(15) \qquad \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{(U_\nu)} f_\nu(\xi', \eta')\,d\xi'\,d\eta' = 1$$

ist, während $f_\nu(x, y) = 0$, wenn x, y nicht in U_ν liegt. Ist dann u_ν die Lösung des Problems § 3, (1b), (4) mit $f = f_\nu$, so ist

$$G(\xi, \eta, x, y) = \lim_{\nu \to \infty} u_\nu.$$

In der Tat ist nach (14)

$$\begin{aligned} u_\nu(x, y) &= \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{(\mathfrak{B})} f_\nu(\xi', \eta')\,G(\xi', \eta', x, y)\,d\xi'\,d\eta' \\ &= \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{(U_\nu)} f_\nu(\xi', \eta')\,G(\xi', \eta', x, y)\,d\xi'\,d\eta' \\ &= \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{(U_\nu)} G(\xi, \eta, x, y)\,f_\nu(\xi', \eta')\,d\xi'\,d\eta' \\ &\quad - \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{(U_\nu)} f_\nu(\xi', \eta')\,[G(\xi, \eta, x, y) - G(\xi', \eta', x, y)]\,d\xi'\,d\eta'. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist nach (15) gleich $G(\xi, \eta, x, y)$, das zweite geht wenn die Punkte x, y und ξ, η nicht zusammenfallen, mit $\nu \to \infty$ gegen 0, womit die Behauptung bewiesen ist. Physikalisch können wir uns hiernach $G(\xi, \eta, x, y)$ als die Ausbiegung im Punkte x, y einer mit dem Bereich $\mathfrak{B}$ zusammenfallenden, am Rande R festgeklemmten Platte unter dem Einfluß einer nur im Punkte ξ, η wirkenden normalen Kraft deuten (vgl. § 3, 1).

Wie in der Potentialtheorie, so besitzt auch hier die Greensche Funktion die wichtige Symmetrieeigenschaft, daß für irgend zwei in $\mathfrak{B}$ gelegene voneinander verschiedene Punkte x_1, y_1 und ξ_1, η_1

$$(16) \qquad G(x_1, y_1, \xi_1, \eta_1) = G(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1)$$

gilt, woraus insbesondere folgt, daß $G(x, y, \xi, \eta)$ auch als Funktion von ξ, η (abgesehen vom Punkte $\xi = x$, $\eta = y$) der Gl. (1a), § 3 genügt. Betrachten wir zum Beweis den Kreis k mit dem Radius ϱ um x_1, y_1 und den Kreis $\varkappa$ um (ξ_1, η_1) mit dem gleichen Radius, der

so klein sein soll, daß k und $\varkappa$ ganz in $\mathfrak{B}$ liegen und sich nicht schneiden. Wir wenden nun (2) auf den aus $\mathfrak{B}$ durch Herausschneiden dieser Kreise entstehenden Bereich $\mathfrak{B}'$ mit $u(x, y) = G(x, y, \xi_1, \eta_1)$, $v(x, y) = G(x, y, x_1, y_1)$ an. Da diese Funktionen in $\mathfrak{B}'$ biharmonisch sind, so verschwindet die linke Seite von (2). Das rechtsstehende Integral ist über R, k und $\varkappa$ zu erstrecken. Das Integral über R verschwindet, da ja u und v die Randbedingung § 3, (4) erfüllen. Daher wird nach (2)

$$(17) \qquad -\int_{(k)} (\ldots)\, ds = \int_{(\varkappa)} (\ldots)\, ds,$$

worin der Integrand derselbe ist, wie in dem Randintegral von (2). Beachtet man nun, daß u in k regulär ist, so erhält man aus (11) und den Gl. (6) bis (8) unter Berücksichtigung des regulären Verhaltens von v_1:

$$(18) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \int_{(k)} (\ldots)\, ds = -8\pi G(x_1, y_1, \xi_1, \eta_1).$$

Ebenso findet man, da v in $\varkappa$ regulär ist,

$$(19) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \int_{(\varkappa)} (\ldots)\, ds = +8\pi G(\xi_1, \eta_1, x_1, y_1).$$

Aus den Gl. (17) bis (19) folgt aber die Behauptung (16).

Die Eigenschaften der Greenschen Funktion setzen uns nun instand, auch das Problem § 3, (1 c), (4) anzugreifen. Die zur Gl. (14) führenden Betrachtungen zeigen, daß eine reguläre Lösung u dieses Problems der homogenen Integralgleichung zweiter Art

$$(20) \qquad u(x, y) - \frac{\lambda}{8\pi} \iint_{(\mathfrak{B})} u(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta = 0$$

genügen muß. Umgekehrt hat man nur die an (14) anschließende Betrachtung zu wiederholen, um zu bemerken, daß jede Lösung von (20) eine reguläre Lösung unseres Problems ist. Hierbei ist zu beachten, daß $\lambda \cdot u(x, y)$ die dort über f zu machende Voraussetzung (Anwendbarkeit der Poissonschen Formel) erfüllt, denn aus (20) folgt auf Grund der Eigenschaften von G gewiß die stetige Differenzierbarkeit von u. Das Problem § 3, (1 c), (4) ist daher äquivalent mit der Integralgleichung (20). Da nun diese einen symmetrischen Kern besitzt, so folgt aus der am Schluß von XII, § 3, 4 gemachten Bemerkung, daß sich jede dem Kern erreichbare, d. h. unter Vermittlung einer stetigen Funktion $\psi(x, y)$ in der Form

$$(21) \qquad \varphi(x, y) = \int_{(\mathfrak{B})} G(\xi, \eta, x, y)\, \psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

darstellbare, Funktion nach den Eigenfunktionen unseres Problems entwickeln läßt. Insbesondere ergibt sich hieraus die Entwickelbarkeit jeder viermal stetig differenzierbaren, den Randbedingungen § 3, (4) genügenden Funktion φ. In der Tat läßt sich nach (14) eine solche Funktion stets in der Form (21) darstellen: wir haben für ψ nur die stetige Funktion $\frac{1}{8\pi}\varDelta\varDelta\varphi$ zu nehmen. Weiter folgt auf Grund der Ergebnisse von XII, § 3 in Verbindung mit den Überlegungen von XII, § 4, daß unser Problem unendlich viele reelle, im Endlichen sich nicht häufende Eigenwerte besitzt.

Wir bemerken schließlich noch, daß alle in dieser und der vorigen Nummer angestellten Betrachtungen fast unverändert im dreidimensionalen Falle gelten. Man hat nur an Stelle von (3) die Funktion

$$(3') \quad v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = r \quad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right)$$

einzuführen. Dann wird nämlich

$$(4') \qquad \varDelta v = \frac{2}{r}$$

und $\varDelta\varDelta v = 0$.

§ 5. Weitere Anwendungen der Greenschen Methode

1. Der Begriff des Fundamentalintegrals. Schon zu Beginn des vorangehenden Paragraphen hoben wir die wesentliche Rolle hervor, die die Funktion $F = \frac{1}{2\pi}\lg r \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)$ bei der Anwendung der Greenschen Methode auf $\varDelta u$ (im ebenen Falle) spielt. Die gleiche Rolle spielte $F = \frac{1}{8\pi} r^2 \lg r$ bei der Anwendung dieser Methode auf $\varDelta\varDelta u$. Diese Funktionen wollen wir als Fundamentalintegrale von $\varDelta u$ bzw. $\varDelta\varDelta u$ bezeichnen. Wie aus XIV, § 1, 3 bzw. XIX, § 4, 1 hervorgeht, beruht die Anwendbarkeit der Greenschen Methode wesentlich darauf, daß das über die Peripherie des Kreises mit dem Mittelpunkt ξ, η und dem Radius ϱ erstreckte Integral

$$\int u \frac{\partial F}{\partial n}\, ds \qquad \text{bzw.} \int u \frac{\partial \varDelta F}{\partial n}\, ds$$

für $\varrho \to 0$ gegen $u(\xi, \eta)$ konvergiert.

Der Versuch, die Greensche Methode auf beliebige lineare Differentialgleichungen anzuwenden, führt daher dazu, den Begriff des Fundamentalintegrals auf beliebige lineare Differentialgleichungen zu übertragen.

Die beiden genannten Funktionen besitzen nun, wie wir wissen, die wichtige Eigenschaft, daß für jede (gewissen Bedingungen genügende) Funktion φ und jeden endlichen Bereich $\mathfrak{B}$[1]) das über $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})} F(x-\xi,\, y-\eta)\, \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

eine Lösung der Gleichung Δu bzw. $\Delta\Delta u = \varphi$ ist. Diese Eigenschaft wollen wir nach Zeilon[2]) für die beabsichtigte Verallgemeinerung als Definition benutzen, wobei wir den dreidimensionalen Fall voranstellen: Ist $f \equiv f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ein linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung, so nennen wir eine Funktion $F(x, y, z)$ ein Fundamentalintegral der Gleichung

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0, \tag{1}$$

wenn für jeden endlichen Bereich $\mathfrak{B}$[3]) und jede „willkürliche“ Funktion $\varphi(x, y, z)$

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{(\mathfrak{B})} F(x-\xi,\, y-\eta,\, z-\zeta)\, \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{2}$$

in jedem Punkte x, y, z von $\mathfrak{B}$ eine Lösung der Gleichung

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \varphi(x,y,z) \tag{3}$$

darstellt. Was hierbei unter einer „willkürlichen“ Funktion verstanden werden soll, werden wir später noch präzisieren (s. 2).

Aus dieser Definition ergibt sich sofort die folgende Eigenschaft, die man bei den eingangs erwähnten Beispielen bestätigt finden wird: Es ist

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \iiint\limits_{(\mathfrak{B})} F(x-\xi,\, y-\eta,\, z-\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1 \text{ oder } 0, \tag{4}$$

je nachdem x, y, z in $\mathfrak{B}$ oder außerhalb $\mathfrak{B}$ liegt.

Die Richtigkeit des ersten Teils der Behauptung erkennt man, wenn man in der gegebenen Definition für φ die Konstante 1 einführt. Zum Beweis des zweiten Teils betrachte man einen Bereich $\mathfrak{B}'$, der

---

[1]) Wir reden hier nur von solchen Bereichen, auf die die Greensche Formel anwendbar ist.

[2]) Das Fundamentalintegral der allgemeinen partiellen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Arkiv för Matematik 6, 1911.

[3]) Siehe Anmerkung 1.

sowohl den Bereich $\mathfrak{B}$ wie den Punkt x, y, z in seinem Innern enthält. Da x, y, z auch im Innern von $\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}$ liegt, so gilt nach dem ersten schon bewiesenen Teil

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \iiint\limits_{(\mathfrak{B}')} F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1,$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \iiint\limits_{(\mathfrak{B}'-\mathfrak{B})} F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert die Behauptung (4).

Falls, abgesehen vom Punkte $x = y = z = 0$, die Operation $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ auf $F(x, y, z)$ anwendbar ist und ein stetiges Resultat liefert, können wir für F diejenige Eigenschaft beweisen, die die Bezeichnung Fundamental*integral* erst rechtfertigt: *Für jeden von $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ verschiedenen Punkt x, y, z, ist $F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ ein Integral der* Gl. (1). Wählen wir nämlich in (4) für $\mathfrak{B}$ eine Umgebung U des Punktes ξ, η, ζ, die den Punkt x, y, z nicht enthält, so erhalten wir

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \iiint\limits_{(U)} F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta')\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = 0.$$

Auf Grund der gemachten Voraussetzung können wir hier Integration und Differentiation vertauschen. Daher ist

$$(5) \qquad \iiint\limits_{(U)} f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta')\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = 0$$

für *jede* (genügend kleine) Umgebung U von ξ, η, ζ. Daraus folgt aber die Behauptung: Wäre nämlich

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$

von 0 verschieden, so könnten wir auf Grund unserer Stetigkeitsvoraussetzung U so klein wählen, daß

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) F(x-\xi', y-\eta', z-\zeta')$$

für alle in U gelegenen Punkte ξ', η', ζ' das gleiche Vorzeichen hätte. Für ein solches U könnte aber (5) nicht bestehen.

2. Ansatz für das Fundamentalintegral im Falle konstanter Koeffizienten. Im Falle konstanter Koeffizienten ist das Fundamentalintegral ausführlich von Zeilon[1]) behandelt worden. Wir berichten im folgenden über seinen allgemeinen Ansatz und teilen von seinen Ergebnissen das den einfachsten Fall betreffende mit.

Wir müssen zuvor ein Wort über die Fouriersche Integraldarstellung einer Funktion $\varphi(x, y, z)$ mehrerer Veränderlicher sagen. Nehmen wir an, daß φ für jedes y, z als Funktion von x sich als Fouriersches unendliches Doppelintegral (vgl. IV, § 3, **3** sowie XI, § 2, **6**), d. h. also in der Form

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{i\alpha(x-\xi)}\,\varphi(\xi,y,z)\,d\xi\,d\alpha$$

darstellen lasse. (Hierbei muß $\xi_1 < x < \xi_2$ sein, im übrigen sind ξ_1, ξ_2 beliebig, insbesondere soll $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = \infty$ sein können.)

Nehmen wir weiter an, daß φ die entsprechende Eigenschaft hinsichtlich y und z besitzt. Alsdann wird

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{i\gamma(z-\zeta)}\,d\zeta\,d\gamma \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{i\beta(y-\eta)}\,d\eta\,d\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,e^{i\alpha(x-\xi)}\,d\xi\,d\alpha \\ = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{i\gamma(z-\zeta)}\,d\zeta\,d\gamma \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\varphi(x,\eta,\zeta)\,e^{i\beta(y-\eta)}\,d\eta\,d\beta \\ = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\varphi(x,y,\zeta)\,e^{i\gamma(z-\zeta)}\,d\zeta\,d\gamma = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

Falls daher φ weiter derart ist, daß man in dem ersten Integral die aufeinanderfolgenden Integrationen vertauschen darf, so erhalten wir aus (6) die Fouriersche Integraldarstellung von φ:

$$(7)\quad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{(\mathfrak{B})}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Hierbei muß $\mathfrak{B}$ den Punkt x, y, z enthalten, ist aber im übrigen beliebig und soll insbesondere den ganzen ξ, η, ζ-Raum bilden können.

---

[1]) l. c. und: Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la Physique Mathématique. Arkiv för Matematik **9**, 1913/14.

Wir wollen nun den in der Definition des Fundamentalintegrals bisher unbestimmt gelassenen Begriff einer „willkürlichen" Funktion φ dahin präzisieren, daß wir verlangen, daß φ die Darstellung (7) zuläßt. Alsdann ist es leicht, für das Fundamentalintegral einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten einen heuristischen Ansatz zu finden, wenn man bemerkt, daß in diesem Falle

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]} = e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]} \cdot f(i\alpha, i\beta, i\gamma) \tag{8}$$

wird. Setzen wir nämlich, ohne uns zunächst um die Konvergenzfrage zu kümmern,

$$F(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma, \tag{9}$$

so erhalten wir bei rein formaler Operation nach (8) und (7) für jeden endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ und jeden in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Punkt x, y, z

$$\left\{\begin{aligned} & f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{d y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\iiint_{(\mathfrak{B})} F(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\,\varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ & = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{(\mathfrak{B})} f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]}}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)} \\ & \qquad \cdot\,\varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ & = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{(\mathfrak{B})} \varphi(\xi,\eta,\zeta) e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]} \\ & \qquad d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \varphi(x,y,z). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Diese Relation drückt aber gerade die Definitionseigenschaft des Fundamentalintegrals aus.

Die erste Frage wird nun die sein, ob das Integral (9) überhaupt einen Sinn hat. Abgesehen von dem Verhalten des Integranden im Unendlichen werden hier die reellen 0-Stellen des Polynoms $f(i\alpha, i\beta, i\gamma)$ eine besondere Untersuchung erfordern. Wenn der Differentialausdruck $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ die unbekannte Funktion u nicht explizite enthält, wird jedenfalls $\alpha = \beta = \gamma = 0$ eine solche Stelle sein. Die hier auftretende Singularität läßt sich aber leicht beseitigen. Ist nämlich m die niedrigste in dem Differentialausdruck f vorkommende Ordnung

und $\chi(t)$ die Summe der m ersten Glieder in der Entwicklung von e^t, so wird sich

$$\frac{e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}-\chi[i(\alpha x+\beta y+\gamma z)]}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)} \tag{11}$$

im Punkte $\alpha=\beta=\gamma=0$ regulär verhalten. Sind dann A, B, C beliebige feste positive Zahlen, so setzen wir

$$E[i(\alpha x+\beta y+\gamma z)] = e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \text{ für } \begin{cases} -\infty<\alpha<-A \text{ und } A<\alpha<\infty \\ -\infty<\beta<-B \quad " \quad B<\beta<\infty \\ -\infty<\gamma<-C \quad " \quad C<\gamma<\infty \end{cases}$$

$$(12) \qquad = e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}-\chi[i(\alpha x+\beta y+\gamma z)] \text{ für } \begin{cases} -A\leqq\alpha\leqq A \\ -B\leqq\beta\leqq B \\ -C\leqq\gamma\leqq C \end{cases}$$

und führen an Stelle von (9):

$$F(x,y,z)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E[i(\alpha x+\beta y+\gamma z)]}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{13}$$

ein. Diese Funktion wird bei der Operation (10) dasselbe Resultat liefern wie die ursprüngliche, da χ als Polynom $(m-1)$-ten Grades der Gl. (1) genügt. Die Wahl der Konstanten A, B, C ist für die vorliegende Untersuchung unwesentlich. Eine andere Wahl bedeutet nämlich, wie man sich leicht überlegt, Addition eines Polynoms $(m-1)$-ten Grades, also einer Lösung von (1). Hierbei geht aber offenbar ein Fundamentalintegral wieder in ein solches über. Wenn (13) imaginär ist, so wird man seinen Realteil nehmen.

Wenn nun $f(i\alpha, i\beta, i\gamma)$ noch reelle 0-Stellen außer $\alpha=\beta=\gamma=0$ besitzt (was z. B. für die homogenen hyperbolischen Gleichungen eintritt), so wird es eine ganze durch $f(i\alpha, i\beta, i\gamma)=0$ definierte Kurve (eventuell auch Fläche) geben, für die der Integrand in (13) singulär wird. Wir wollen hierauf jedoch nicht eingehen, sondern das Resultat Zeilons nur für den wesentlich einfacheren (z. B. für die homogenen elliptischen Gleichungen erfüllten) Fall aussprechen, daß keine weiteren reellen Nullstellen vorhanden sind.

Es lautet: Das Integral (13) ist für alle Werte von x, y, z konvergent, wenn sein Integrand im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$ verschwindet, und konvergent mit Ausnahme von $x=y=z=0$, wenn er wie $\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ verschwindet. Es stellt

tatsächlich ein Fundamentalintegral der Gl. (1) dar, d. h. die mit ihm gebildete Funktion (2) ist für jeden endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ und jedes in $\mathfrak{B}$ gelegene x, y, z eine Lösung von (3)[1].

§ 6. Parabolische Gleichungen

1. Die Probleme. Die allgemeinste lineare parabolische Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen läßt sich nach XV, § 8, **3** durch geeignete Wahl dieser Variablen auf die Form

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} - B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y) . z = f(x, y)$$

bringen. Wir wollen hierin B positiv[2]) und einmal stetig nach x und y differenzierbar voraussetzen. Dann können wir (1) durch die Substitution

$$(2) \qquad X = \int^{x} B^{\frac{1}{2}}(t, y)\, dt, \quad Y = y, \quad Z = z$$

auf eine Gleichung der Form

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \bar{A}(X, Y)\frac{\partial Z}{\partial X} - \frac{\partial Z}{\partial Y} + \bar{C}(X, Y) Z = \bar{f}(X, Y),$$

in der also der Koeffizient von $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ 1 ist, überführen, wie die elementare Umrechnung zeigt. Schließlich können wir noch den Koeffizienten von $\frac{\partial Z}{\partial X}$ zum Verschwinden bringen, indem wir als abhängige Variable

$$(4) \qquad \zeta = Z e^{\frac{1}{2}\int^{X} \bar{A}(\xi, Y)\, d}$$

einführen. Wir erhalten so (unter Abänderung der früheren Bezeichnungen) die Differentialgleichung

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = f(x, y).$$

---

[1]) Bezüglich der Verwendung des Fundamentalintegrals zur Integration der Gleichungen mit Hilfe der Greenschen Methode verweisen wir den Leser auf die angeführten Zeilonschen Arbeiten. Die gleichen Probleme hat für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen Hadamard mit anderen, nicht auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten beschränkten Methoden behandelt. (J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in linear partial differential equations, London and New Haven 1923.)

[2]) Bei der Anwendung auf die Wärmeleitung ist diese Annahme erfüllt. Ist $B < 0$, so braucht man nur y durch $-y$ zu ersetzen, um auf den Fall eines positiven B zu kommen. Der Fall, daß B Nullstellen hat, ist dagegen schwieriger. Man findet ihn bei Gevrey, Sur les équ. aux derivées partielles du type parabolique, Journal d. math., Ser. 6, Vol. 9 (1913) und 10 (1914), behandelt.

Die Randwertprobleme, die sich bei parabolischen Gleichungen darbieten, sind anderer Natur als die bisher behandelten. So ist z. B. (wie sich in 4 zeigen wird) das bei den elliptischen Gleichungen behandelte Problem, eine Lösung zu finden, die längs einer geschlossenen Kurve vorgegebene Werte annimmt, für parabolische Gleichungen im allgemeinen überbestimmt, und das Entsprechende gilt für das bei hyperbolischen Gleichungen gestellte Randwertproblem. Aufschluß darüber, von welchen Randwertaufgaben bei parabolischen Gleichungen man eindeutige Lösbarkeit erwarten darf, erhält man am schnellsten, wenn man an die physikalischen Anwendungen dieser Gleichungen denkt, die hauptsächlich auf dem Gebiete der Wärmeleitung und Diffusion zu suchen sind[1]. So genügt die Temperatur z in einem Stabe von der Dichte ϱ, der spezifischen Wärme σ und der inneren Wärmeleitfähigkeit k der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\sigma\varrho z)}{\partial y} \qquad (y \text{ Zeit, } x \text{ Stababszisse}),$$

falls seine Oberfläche gegen Strahlung und Konvektion geschützt ist. Nun kann man zu Beginn des Vorganges ($y = y_0$) offenbar dem Stabe eine beliebige Temperatur vorschreiben und es bestehen ferner an den Enden des Stabes ($x = a$ und $x = b$) für alle Zeiten $y \geqq y_0$ gewisse Randbedingungen, welche ausdrücken, in welcher Weise die Wärme von den Stabenden in das umgebende Medium strömt. Unter diesen Randbedingungen spielen in der Physik insbesondere die folgenden drei eine Rolle: 1. die Temperatur z selbst ist an den Stabenden für alle Zeiten vorgeschrieben, 2. ihre erste Ableitung nach x ist dort vorgeschrieben, 3. eine lineare Kombination von z und $\frac{\partial z}{\partial x}$ ist vorgeschrieben. Von den so entstehenden drei Randwertaufgaben wollen wir, wie dies auch bei der Behandlung der elliptischen Gleichung (XVIII, § 2 u. 3) geschehen ist, nur auf die erste näher eingehen. Verallgemeinert man die Aufgabe, indem man an die Stelle der Geraden $x = a$ und $x = b$ die Kurven

$$x = g_0(y); \quad x = g_1(y), \quad [g_0(y_0) = a; \quad g_1(y_0) = b], \; g_0 \neq g_1,$$

worin g_0 und g_1 einmal stetig differenzierbare eindeutige Funktionen von y sind, treten läßt (Fig. 84, S. 872), so erhält man das folgende

[1] Vgl. den Abschnitt II des zweiten Bandes über Wärmeleitung und Diffusion. Dort findet der Leser auch die Durchführung zahlreicher spezieller Randwertaufgaben; im vorliegenden Paragraphen sind daher lediglich allgemeine Probleme behandelt.

Problem, dessen eindeutige Lösbarkeit man vermuten wird: gesucht wird eine Lösung $z(x, y)$ von (5), die den Randbedingungen

$$(6)\qquad \begin{cases} z(x, y_0) = z_0(x), \\ z = f_0(y) \text{ auf der Kurve } x = g_0(y), \\ z = f_1(y) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x = g_1(y), \end{cases}$$

wo z_0, f_0, f_1 gegebene Funktionen sind, genügt. Manchmal ist es zweckmäßig, die Aufgabe so zu transformieren, daß an Stelle der Kurven g_0 und g_1 Geraden treten. Macht man nämlich die Transformation

$$\xi = \frac{x - g_0(y)}{g_1(y) - g_0(y)}; \quad \eta = y; \quad \zeta = z,$$

so geht (5) über in eine Gleichung der Form (1); aus dieser erhält man durch Anwendung von (4) unter Abänderung der Bezeichnungsweise

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + Cz = f(x, y),$$

während die Randbedingungen (ebenfalls unter Änderung der Bezeichnungsweise) übergehen in

$$(8)\qquad z(x, y_0) = z_0(x); \quad z(0, y) = h_0(y); \quad z(1, y) = h_1(y).$$

Ersetzt man schließlich z durch $z - (1 - x)h_0(y) - xh_1(y)$, so behält Gl. (7) ihre Form und die Randbedingungen werden, wenn noch Stetigkeit in allen Randpunkten verlangt wird:

$$(9)\qquad z(x, y_0) = z_0(x); \; z(0, y) = 0, z(1, y) = 0; \; z_0(0) = z_0(1) = 0.$$

Zunächst werden wir uns vorzugsweise mit der speziellen Gleichung

$$(10)\qquad L(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

bzw.

$$(10a)\qquad L(z) = f(x, y)$$

beschäftigen.

2. Spezielle Lösungen. Die Grundlösung. Der Ansatz $z = e^{\alpha x + \beta y}$ liefert, in (10) eingesetzt, $\alpha^2 = \beta$, also die Lösung

$$(11)\qquad z = e^{\alpha x + \alpha^2 y}.$$

Ersetzt man hierin α durch $i\alpha$, so gelangt man auf Grund der Homogenität von (10) zu den Lösungen $e^{-\alpha^2 y}\cos\alpha x$ und $e^{-\alpha^2 y}\sin\alpha x$. Hieraus folgt offenbar, daß auch

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y}\cos\alpha x\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{y}}\right)e^{-\gamma^2}d\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

[vgl. Kap. I, § 4, Gl. (29)] eine Lösung von (10) ist. Da mit $z(x, y)$ für jedes konstante ξ, η auch $z(x-\xi, y-\eta)$ eine Lösung von (10) ist, werden wir auf die Funktion

$$U(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$$

geführt, von der man hinterher natürlich direkt verifizieren kann, daß sie (bei festem ξ, η) eine Lösung von (10) ist. U ist zunächst nur für $y > \eta$ definiert. Durch die Festsetzung

$$\text{(11a)} \qquad U(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} & \text{für } y > \eta \\ 0 & \text{,, } y \leqq \eta \end{cases}$$

erhalten wir, da für $x \neq \xi$ offenbar

$$\lim_{y \to \eta} U = \lim_{y \to \eta} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lim_{y \to \eta} \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

ist, eine für alle Punkte x, y mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$, $y = \eta$ definierte reguläre Lösung von (10), die wir als Grundlösung bezeichnen. Wir werden sehen, daß U in der Theorie der Gleichung (10) die entsprechende Rolle spielt wie $\log r$ in der Potentialtheorie [1]).

Ausgehend von der Lösung (11) kann man noch zu einer anderen Klasse von partikulären Lösungen der Gleichung (10) gelangen. Die durch VIII, § 4, (12') definierten Polynome $H_n^*(x)$ befriedigen nämlich die Gleichung

$$\text{(12)} \qquad e^{-(ZX + {}^1\!/_2 Z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^*(X) Z^n.$$

Die H_n^* sind dabei eng verknüpft mit den Hermiteschen Polynomen [vgl. ebenda Gl. (19)]. Setzen wir nun

$$\alpha^2 y = -\tfrac{1}{2} Z^2; \quad \alpha x = -\frac{Z}{\sqrt{-2y}} x = -ZX,$$

so wird nach (11) und (12)

$$z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^*(X) Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^*\left(\frac{x}{\sqrt{-2y}}\right) \alpha^n (-2y)^{\frac{n}{2}}$$

eine Lösung von (10) sein.

---

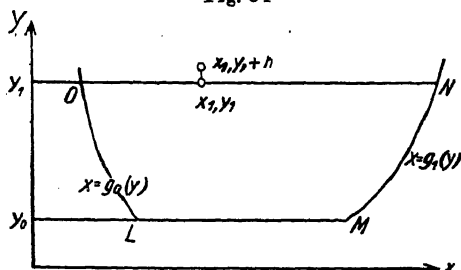
[1]) Über die physikalische Bedeutung von U als einer Wärmequelle s. Bd. II, Kap. VI.

Hieraus folgt, daß

$$(\sqrt{-2y})^n H_n^*\left(\frac{x}{\sqrt{-2y}}\right)$$

eine Lösung von (10) ist.

3. Die Greenschen Formeln. Durch Spezialisierung der allgemeinen Formeln von XVIII, § 1, 2 erhalten wir aus den dortigen Gl. (4)

Fig. 84

für unseren durch (10) gegebenen Differentialausdruck $L(u)$ als adjungierten Ausdruck

$$M(\zeta) \equiv \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

und ferner

$$P = \zeta \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$Q = -\zeta z.$$

Die Anwendung der Greenschen Formel Gl. (5) (ebendort) auf den durch die Geraden $y = y_0$, $y = y_1 > y_0$ und die Kurven $x = g_0(y)$, $x = g_1(y)$ begrenzten Bereich T_{y_1} (vgl. Fig. 84) liefert daher

$$\text{(13)} \quad \iint\limits_{T_{y_1}} (\zeta L(z) - z M(\zeta))\, d\xi\, d\eta = \int\limits_{OLMNO} \left[\left(\zeta \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) d\eta + z \zeta\, d\xi\right].$$

Wir wollen nun hierin für $\zeta(\xi, \eta)$ unsere Grundlösung $U(x_1, y_1, \xi, \eta)$ einsetzen. Da U als Funktion von x, y eine Lösung von (10) ist und L in M übergeht, wenn man x mit $-x$ vertauscht, so folgt, daß U als Funktion von ξ, η eine Lösung der adjungierten Gleichung $M = 0$ ist. Da U nur regulär ist, wenn die Punkte x, y und ξ, η nicht zusammenfallen, so hat (13) bei unserer Wahl von ζ zunächst nur Gültigkeit, wenn x_1, y_1 außerhalb des Bereiches T_{y_1} liegt. In diesem

Falle erhalten wir aus (13), da U und $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ längs ON verschwinden und $M(U) = 0$ ist:

$$\iint_{T_{y_1}} U(x_1, y_1, \xi, \eta) L(z)\, d\xi\, d\eta = \int_{OLMN} \left[\left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) d\eta + U z\, d\xi\right].$$

Ist insbesondere z eine im Innern und am Rande von $T_{\overline{y}_1} (\overline{y}_1 > y_1)$ reguläre[1]) Lösung von (10a), so erhalten wir

$$(14)\quad O = \int_{OLMN} \left[\left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) d\eta + U z\, d\xi\right] - \iint_{T_{y_1}} U(x_1, y_1, \xi, \eta) f(\xi \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Liegt aber x_1, y_1 auf dem Rande des Bereiches T_{y_1}, so setzen wir an Stelle von x_1, y_1 zunächst den nicht in T_{y_1} gelegenen Punkt x_1, $y_1 + h$ $(h > 0)$ als erstes Argument in U ein. Dann können wir (13) wieder anwenden und erhalten

$$(15)\quad \int_{ON} z(\xi, y_1)\, U(x_1, y_1 + h, \xi, y_1)\, d\xi = \int_{OLMN} \left[\left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) d\eta + U z\, d\xi\right] - \iint_{T_{y_1}} U L(z)\, d\xi\, d\eta.$$

In dieser Gleichung wollen wir zur Grenze $h \to 0$ übergehen. Setzen wir, um den Grenzwert der linken Seite zu berechnen,

$$(16)\qquad z(\xi, y_1) = \varphi(\xi), \quad g_0(y_1) = \alpha, \quad g_1(y_1) = \beta,$$

so handelt es sich nach (11a) um den Grenzwert für $h \to 0$ des Integrals

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{h}} e^{\frac{-(x_1 - \xi)^2}{4h}}\, d\xi.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden: 1. $x_1 = \alpha$; 2. $x_1 = \beta$; 3. $\alpha < x_1 < \beta$. Im ersten Falle wird

$$J = \int_{x_1}^{\beta} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{h}} e^{\frac{-(\xi - x_1)^2}{4h}}\, d\xi.$$

Die Substitution $\xi - x_1 = t$ liefert uns mit $\beta - x_1 = b_1$ und $\varphi(t + x_1) = \psi(t)$

$$J = \int_0^{b_1} \frac{\psi(t)}{\sqrt{h}} e^{\frac{-t^2}{4h}}\, dt.$$

[1]) „Regulär“ bedeute, daß alle in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen existieren und stetig sind.

Sei nun ε eine beliebige positive Zahl. Wählen wir eine Zahl b_2 im Intervall $0, b_1$ so, daß $|\psi(0) - \psi(t)| < \varepsilon$ wird für $0 \leqq t \leqq b_2$, und setzen wir $J = \int\limits_0^{b_2} + \int\limits_{b_2}^{b_1}$. Das zweite Integral ist offenbar kleiner als das Maximum von $|\psi|$ im Intervall $0, b_1$ multipliziert mit $b_1 \dfrac{e^{-\frac{b_2^2}{4h}}}{\sqrt{h}}$, einer Größe, die mit $h \to 0$ selbst gegen 0 geht. Der Grenzwert von J wird daher gleich dem Grenzwert von

$$\int\limits_0^{b_2} \frac{\psi(t)}{\sqrt{h}} e^{-\frac{t^2}{4h}} dt = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2} b_2 : \sqrt{h}} \psi(2\tau\sqrt{h})\, e^{-\tau^2} d\tau$$

$$= 2\psi(0) \int\limits_0^{\frac{1}{2} b_2 : \sqrt{h}} e^{-\tau^2} d\tau + 2 \int\limits_0^{\frac{b}{2\sqrt{h}}} [\psi(2\tau\sqrt{h}) - \psi(0)]\, e^{-\tau^2} d\tau.$$

Da nun $2 \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$ ist [vgl. I, § 4 (21)], so ist das zweite rechtsstehende Integral für alle h absolut genommen kleiner als $\varepsilon \sqrt{\pi}$, während das erste den Grenzwert $\psi(0)\sqrt{\pi}$ besitzt. Da ε beliebig war, ist hiermit bewiesen, daß $\lim\limits_{h \to 0} J = \psi(0)\sqrt{\pi} = \varphi(x_1)\sqrt{\pi}$ ist. Die gleiche Betrachtung im zweiten Falle $(x_1 = \beta)$ liefert ebenfalls $\varphi(x_1)\sqrt{\pi}$ als Grenzwert. Im Falle $\alpha < x_1 < \beta$ schließlich setzen wir

$$J = \int\limits_\alpha^{x_1} + \int\limits_{x_1}^{\beta}$$

und erhalten als Grenzwert $2\varphi(x_1)\sqrt{\pi}$, da jedes der rechtsstehenden Integrale den Grenzwert $\varphi(x_1)\sqrt{\pi}$ hat. Wir haben also

$$(17) \qquad \lim_{h \to 0} \int\limits_\alpha^\beta \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{h}} e^{-\frac{(x_1 - \xi)^2}{4h}} d\xi = \begin{cases} \sqrt{\pi}\,\varphi(x_1) & \text{für } x_1 = \alpha, \\ 2\sqrt{\pi}\,\varphi(x_1) & \text{,, } \alpha < x_1 < \beta, \\ \sqrt{\pi}\,\varphi(x_1) & \text{,, } x_1 = \beta. \end{cases}$$

Da man sich ferner unschwer überlegen kann, daß man den Grenzübergang auf der rechten Seite von (15) vollziehen darf, indem man einfach $h = 0$ setzt, so liefert, wenn z eine Lösung von (10a) ist, der Grenzübergang $h \to 0$ in (15) nach (17) und (16)

$$(18)\qquad \int\limits_{OLMN}\left[\left(U(x_1, y_1, \xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)d\eta + U(x_1, y_1, \xi, \eta)z(\xi, \eta)\,d\xi\right]$$

$$-\iint\limits_{T_{y_1}} U(x_1, y_1, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \begin{cases} \sqrt{\pi}\, z(x_1, y_1), \text{ wenn } x_1 = g_1(y_1) \text{ oder } x_1 = g_0(y_1) \\ 2\sqrt{\pi}\, z(x_1, y_1), \text{ „ } g_0(y_1) < x_1 < g_1(y_1), \\ 0, \text{ wenn } x_1 < g_0(y_1) \text{ oder } x_1 > g_1(y_1) \end{cases}$$

[vgl. (14)]. Diese Formel ist das Analogon der Formel XIV, § 1, (11). Sie löst das Randwertproblem (10a), (6) noch nicht, denn es treten noch die nicht gegebenen Randwerte von $\frac{\partial z}{\partial x}$ auf. Diese kann man nun, wie wir jetzt zeigen wollen, eliminieren, wenn man das folgende spezielle Randwertproblem gelöst hat: Eine Funktion $g(x_1, y_1, x, y)$ zu finden, die als Funktion von x, y im Innern und am Rande von T_{y_1} ein reguläres Integral der adjungierten Gleichung $M(\zeta) = 0$ ist, die auf ON die Randwerte 0 und auf OL sowie MN die gleichen Randwerte wie $U(x_1, y_1, x, y)$ annimmt. Es wird sich zeigen, daß es eine und unter gewissen Bedingungen nur eine solche Funktion gibt (vgl. **4** und **5**) [1]. Wendet man nun (13) auf T_{y_1} mit $\zeta(x, y) = g(x_1, y_1, x, y)$ an, so ergibt sich, da g längs ON verschwindet, unter Beachtung von (10a)

$$(19)\qquad \iint\limits_{T_{y_1}} g(x_1, y_1, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int\limits_{OLMN}\left[\left(g(x_1, y_1, \xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial g(x_1, y_1, \xi, \eta)}{\partial \xi}\right)d\eta\right.$$

$$\left. + \int\limits_{OLMN} g(x_1, y_1, \xi, \eta) z(\xi, \eta)\,d\xi\right]$$

Führen wir nun die Greensche Funktion

$$G(x_1, y_1, x, y) = U(x_1 y_1, x, y) - g(x_1, y_1, x, y)$$

ein, so erhalten wir auf Grund der Randbedingungen für g durch Subtraktion der Gl. (19) von (18) eine Darstellung von z durch die auf $OLMN$ angenommenen Werte:

$$-\int\limits_{OL+MN} z(\xi, \eta)\frac{\partial G(x_1, y_1, \xi, \eta)}{\partial \xi}\,d\eta + \int\limits_{LM} z(\xi, \eta) G(x_1, y_1, \xi, y_0)\,d\xi$$

$$-\iint\limits_{T_{y_1}} G(x_1, y_1, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = 2\sqrt{\pi}\, z(x_1, y_1) \text{ wenn } g_0(y_1) < x_1 < g_1(y_1).$$

---

[1]) Die Aufgabe, eine Lösung der adjungierten Gleichung zu finden, die längs $LONM$ gegebene Werte annimmt, ist im wesentlichen identisch mit der Aufgabe, eine Lösung von (10) zu finden, die längs $OLMN$ gegebene Werte annimmt, da (10) bei Vertauschung von y mit $-y$ in die adjungierte Gleichung übergeht.

4. Eindeutigkeit der Lösung[1]**.** Wir behaupten: Es gibt höchstens eine Lösung des Problems (5), (6), die in dem abgeschlossenen Bereiche T_{y_1} stetig ist[2]. Wir betrachten zuerst den Fall $c < 0$. Es wird genügen, folgendes zu zeigen: Gilt längs $OLMN$ die Gleichung $z = 0$ für eine Lösung von (5) mit $f \equiv 0$, so ist $z \equiv 0$ für alle Punkte von T_{y_1}. Zum Beweise der angeführten Behauptung genügt es offenbar zu zeigen, daß ein positives Maximum oder negatives Minimum höchstens in den Punkten von $OLMN$ angenommen werden kann. In einem inneren Punkte von T_{y_1} wäre nämlich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leqq 0, \ cz < 0 \text{ für ein positives Maximum,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \geqq 0, \ cz > 0 \text{ für ein negatives Minimum.}$$

Beides wäre wegen $f = 0$ mit dem Bestehen von (5) unverträglich. Ebenso wären aber auch die Annahmen

$$z(x_1, y_1) > 0, \quad z(x_1, y_1) > z(x, y) \text{ für } y \leqq y_1$$

(in einer genügend kleinen Halbumgebung von x_1, y_1) oder

$$z(x_1, y_1) < 0, \quad z(x_1, y_1) < z(x, y) \text{ für } y \leqq y_1$$

mit dem Bestehen von (5) (mit $f = 0$, $c < 0$) unverträglich, da z. B. im ersten Falle

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x_1, y_1} \leqq 0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_1, y_1} \geqq 0, \quad (c z)_{x_1, y_1} < 0$$

wäre. Also kann ein positives Maximum oder negatives Minimum höchstens auf $OLMN$ angenommen werden, womit (für $c < 0$) alles bewiesen ist.

Der Fall $c \geqq 0$ läßt sich auf den eben behandelten zurückführen. Ist nämlich K eine positive Konstante $> c$ und z eine Lösung der Gl. (5), so genügt

$$v = z e^{-Ky}$$

der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial y} + (c - K) v = f(x, y) e^{-Ky},$$

---

[1]) Beweis nach Gevrey, l. c.

[2]) Diese Voraussetzung ist wesentlich; in der Tat läßt sich, wenn sie nicht erfüllt ist, das Beispiel einer längs $OLMN$ verschwindenden, aber nicht identisch verschwindenden Lösung von (10) angeben, wie von Doetsch gezeigt wurde. Math. Zeitschrift Bd. 22 (1925). Bei dieser Gelegenheit wollen wir darauf hinweisen, daß der Leser eine kurze Schilderung der Bernstein-Doetschschen Methode zur Behandlung der Wärmeleitungsgleichung in Kap. VI des zweiten Bandes findet.

von der wir wegen $c - K < 0$ schon wissen, daß sie nur eine (6) genügende, im abgeschlossenen Bereich T_{y_1} stetige Lösung v besitzt, woraus auch die eindeutige Bestimmtheit einer stetigen Lösung z von (5), (6) folgt.

5. Andeutung des Existenzbeweises. Nach 1 ist (unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen) der Existenzbeweis für Lösungen des Problems (5), (6) erbracht, wenn der Existenzbeweis für Lösungen des Problems (7), (9) erbracht ist. Da der Gedankengang dieses Beweises genügend klar schon bei Betrachtung des speziellen Problems (10), (9) hervortritt, wollen wir uns damit begnügen, den Existenzbeweis für dieses Problem anzudeuten[1]). Zunächst wollen wir von $z_0(x)$ viermal stetige Differenzierbarkeit sowie neben

$$z_0(0) = z_0(1) = 0 \tag{20}$$

[vgl. (9)] noch

$$z_0''(0) = z_0''(1) = 0 \tag{21}$$

voraussetzen und den Beweis für stetiges nur der Bedingung (20) unterworfenes z_0 erst später erbringen.

Beschränken wir uns etwa auf das Intervall $0 \leqq y \leqq 1$. Wir ersetzen (10) durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 z_{\nu+1}}{d x^2} - \frac{z_{\nu+1}(x) - z_\nu(x)}{h} = 0 \qquad \begin{array}{l} h > 0 \\ \nu = 0, 1, \ldots \end{array} \tag{22}$$

und an Stelle der Bedingung $z(0, y) = z(1, y) = 0$ [vgl. (9)] schreiben wir

$$z_{\nu+1}(0) = z_{\nu+1}(1) = 0 \tag{23}$$

vor. Da z_0 gegeben ist, stellt (22), (23) zunächst für $\nu = 0$ ein inhomogenes gewöhnliches Randwertproblem für z_1 dar[2]). Allgemein stellt (22), (23) ein inhomogenes gewöhnliches Randwertproblem für $z_{\nu+1}$ dar, wenn z_ν schon bekannt ist. Diese inhomogenen Probleme sind eindeutig lösbar, da die Eigenwerte der zugehörigen homogenen Probleme offenbar $k^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, also alle positiv sind. Ist $h = h^{(n)} = 1 : 2^n$, so wollen wir, wenn nötig, an Stelle von z_ν genauer $z_\nu^{(n)}$ schreiben. Ist dann y eine positive rationale Zahl < 1, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, so ist von einem gewissen n ab

$$y = \nu_n h^{(n)} \qquad (\nu_n \text{ ganzzahlig}).$$

---

[1]) Die vollständige Durchführung des angedeuteten Beweises ist in Bd. 102 (1930) der Mathematischen Annalen zu finden.

[2]) Es wird vorausgesetzt, daß z_0 nicht identisch verschwindet, da im anderen Falle gewiß eine Lösung unseres Problems, nämlich die identisch verschwindende existiert.

Es läßt sich nun zeigen: 1. Es existiert $\lim_{n\to\infty} z_{\nu_n}^{(n)}$. 2. Die somit für alle y der Form $p:2^n$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) definierte Grenzfunktion $z(x, y)$ läßt sich zu einer für alle y des Intervalles $0 \leqq y \leqq 1$ definierten Funktion $z(x, y)$ erweitern. 3. $z(x, y)$ ist eine Lösung des Problems (10), (9). Wir wollen hier wenigstens den Beweis von 1. erbringen, da wir dabei gleichzeitig zu einer Abschätzung des Fehlers $z(x, y) - z_{\nu_n}^{(n)}(x)$ gelangen werden. Zum Beweise von 1. wollen wir zunächst die Differenz

$$\Delta z_\nu = z_{\nu+1} - z_\nu$$

abschätzen. Nach (22), (23) ist für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^2 \Delta z_\nu}{d x^2} - \frac{1}{h} \Delta z_\nu = - \Delta z_{\nu-1}, \tag{24}$$

$$(\Delta z_\nu)_{x=0} = (\Delta z_\nu)_{x=1} = 0. \tag{25}$$

Hieraus folgt nach XIII, § 2, 1

$$\Delta z_\nu = \int_0^1 G(x, \xi, h) \frac{\Delta z_{\nu-1}(\xi)}{h} d\xi, \tag{26}$$

wenn $G(x, \xi, h)$ die Greensche Funktion des Randwertproblems (24), (25) ist. Diese eindeutig bestimmte Funktion ist aber, wie man leicht verifiziert,

$$G(x, \xi, h) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{h}}{\mathfrak{Sin}\,\dfrac{1}{\sqrt{h}}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\dfrac{1-\xi}{\sqrt{h}}\; \mathfrak{Sin}\,\dfrac{x}{\sqrt{h}} & \xi \geqq x, \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{h}}{\mathfrak{Sin}\,\dfrac{1}{\sqrt{h}}}\; \mathfrak{Sin}\,\dfrac{\xi}{\sqrt{h}}\; \mathfrak{Sin}\,\dfrac{1-x}{\sqrt{h}} & \xi \leqq x. \end{cases}$$

Nach (26) ist, da $-G \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$,

$$|\Delta z_\nu| \leqq \frac{-1}{h} \int_0^1 G(x, \xi, h)\, d\xi \,.\, \mathrm{Max}\, |\Delta z_{\nu-1}|.$$

Da nun

$$-\int_0^1 G(x, \xi, h)\, d\xi = h \frac{\mathfrak{Sin}\,\dfrac{1}{\sqrt{h}} - \mathfrak{Sin}\,\dfrac{1-x}{\sqrt{h}} - \mathfrak{Sin}\,\dfrac{x}{\sqrt{h}}}{\mathfrak{Sin}\,\dfrac{1}{\sqrt{h}}} < h \tag{27}$$

ist, so folgt für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$|\Delta z_\nu| \leqq \mathrm{Max}\, |\Delta z_{\nu-1}| \qquad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{28}$$

Für $\nu = 0$ erhalten wir aber aus (22), (23) und (20)

$$(\Delta z_0)'' - \frac{\Delta z_0}{h} = -z_0''; \qquad \Delta z_0 = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = 1,$$

also

$$|\Delta z_0| = \left|\int_0^1 G(x, \xi, h)\, z_0''(\xi)\, d\xi\right| \leqq h \operatorname{Max}|z_0''|.$$

Hieraus und aus (28) ergibt sich induktiv

$$|\Delta z_\nu| \leqq h \operatorname{Max}|z_0''|. \tag{29}$$

In ähnlicher Weise läßt sich unter Beachtung von (21)

$$\Delta^2 z_\nu = z_{\nu+2} - 2 z_\nu + z_{\nu-1}$$

abschätzen. Man erhält

$$|\Delta^2 z_\nu| \leqq h^2 \operatorname{Max}|z_0^{\mathrm{IV}}|. \tag{30}$$

Um nunmehr die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\nu_n}^{(n)}$ zu beweisen, wollen wir die Differenz $v_{\nu_n} = z_{\nu_n}^{(n)} - z_{\nu_{n+1}}^{(n+1)}$ abschätzen. Setzt man der Einfachheit halber für den Augenblick $\nu_n = p + 1$, also $\nu_{n+1} = 2p + 2$, und beachtet die Identität

$$\frac{z_{2p+2}^{(n+1)} - z_{2p+1}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}} = \frac{1}{2}\,\frac{z_{2p+2}^{(n+1)} - 2 z_{2p+1}^{(n+1)} + z_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}} + \frac{z_{2p+2}^{(n+1)} - z_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n)}},$$

so erhält man durch Subtraktion der für $h = h^{(n)}$ und $h = h^{(n+1)}$ angeschriebenen Gl. (22), (23):

$$\frac{d^2 v_{p+1}}{d x^2} - \frac{1}{h^{(n)}}\, v_{p+1} = -\frac{v_p}{h^{(n)}} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2 z_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}};$$

$$v_{p+1} = 0 \text{ für } x = 0,\ x = 1.$$

Hieraus folgt [ähnlich wie früher unter Benutzung von (27)]:

$$|v_{p+1}| \leqq \operatorname{Max}\left(|v_p| + |\Delta^2 z_{2p}^{(n+1)}|\right),$$

also nach (30):

$$|v_{p+1}| \leqq \operatorname{Max}|v_p| + (h^{(n+1)})^2 \operatorname{Max}|z_0^{\mathrm{IV}}|.$$

Da $v_0 = 0$ ist, erhält man induktiv

$$|v_{p+1}| \leqq (p+1)(h^{(n+1)})^2 \operatorname{Max}|z_0^{\mathrm{IV}}| = x\,\tfrac{1}{4}\, h^{(n)} \operatorname{Max} z_0^{\mathrm{IV}}.$$

Somit ist bewiesen:

$$|z_{\nu_{n+1}}^{(n+1)} - z_{\nu_n}^{(n)}| \leqq x\,\tfrac{1}{4}\, h^{(n)} \operatorname{Max}|z_0^{\mathrm{IV}}|.$$

Ebenso ist

$$|z_{\nu_{n+2}}^{(n+2)} - z_{\nu_{n+1}}^{(n+1)}| \leqq x\,\tfrac{1}{4}\,h^{(n+1)}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|z_{\nu_{n+i}}^{(n+i)} - z_{\nu_{n+i-1}}^{(n+i-1)}| \leqq x\,\tfrac{1}{4}\,h^{(n+i-1)}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}| \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Also, wegen $h^{(n)} = 2^{-n}$,

$$(31)\qquad |z_{\nu_{n+i}}^{(n+i)} - z_{\nu_n}^{(n)}| < x\,h^{(n)}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}|\,\frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x\,h^{(n)}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}| \leqq \tfrac{1}{2}\,h^{(n)}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}|.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der $z_{\nu_n}^{(n)}$, und die Behauptung 1. ist bewiesen. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß aus (31) in Verbindung mit den Behauptungen 2. und 3. die Fehlerabschätzung

$$|z(x,y) - z_{\nu_n}^{(n)}(x)| \leqq \frac{1}{2^{n+1}}\,\mathrm{Max}\,|z_0^{\mathrm{IV}}|$$

folgt.

Es bleibt nun noch übrig, anzudeuten, in welcher Weise sich der Existenzbeweis erbringen läßt, wenn von z_0 lediglich Stetigkeit und die Bedingung (20), nicht aber (21) vorausgesetzt wird: Erweitert man die Definition von z_0 durch die Festsetzung $z_0(-x) = -z_0(x)$ auf das Intervall $-1 \leqq x \leqq 0$, so bleibt $z_0(x)$ wegen (20) stetig. Bildet man daher die Partialsummen der zu z_0 gehörigen Fourierschen Reihe, so konvergieren nach einem bekannten Satze die arithmetischen Mittel A_k dieser Partialsummen mit wachsendem k gegen z_0 (vgl. hierzu IV, § 4, 4). Da aber z_0 eine ungerade Funktion ist, so besteht die endliche Summe A_k nur aus Sinusgliedern, so daß A_k nebst allen Ableitungen gerader Ordnung für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet. A_k erfüllt daher gewiß neben (20) die Bedingung (21). Da ferner A_k auch viermal stetig differenzierbar ist, so existiert nach dem schon Bewiesenen eine Lösung Z_k unseres Randwertproblems, wenn A_k an Stelle von z_0 gesetzt wird. Es läßt sich nun, worauf wir nicht näher eingehen wollen, beweisen, daß Z_k gegen eine Lösung des Problems (10), (9) konvergiert.

Lehrbücher

1. H. S. Carslaw, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids. 2. ed., London (Macmillan) 1921.
2. A. G. Webster, Partial differential equations of mathematical physics, New York (G. E. Stechert) und Berlin und Leipzig (Teubner) 1927.

Zwanzigstes Kapitel

Variationsrechnung und Randwertprobleme

Die Methoden und Gesichtspunkte der Variationsrechnung eröffnen für zahlreiche Fragen der mathematischen Physik bequeme Zugangswege und Möglichkeiten der Übersicht. Wenn auch im Rahmen dieses Werkes eine ausführliche Behandlung dieser Zusammenhänge nicht Platz finden kann[1]), so soll das folgende Kapitel doch wenigstens ein zusammenfassendes Bild davon geben. Da für diesen Zweck die Grundtatsachen der Variationsrechnung in einer etwas anderen Gestalt und auch in etwas anderem Umfange herangezogen werden müssen, als sie in Kap. V entwickelt worden sind, so enthält zunächst § 1 eine von Kap. V unabhängige kurze Übersicht der für uns wichtigen Entwicklungen der Variationsrechnung. Sodann wird in § 2 der Zusammenhang mit den Fragen der mathematischen Physik hergestellt und in verschiedenen Richtungen verfolgt. Schließlich nimmt § 3 den Faden der Theorie der Variationsrechnung wieder auf und behandelt insbesondere die Frage der direkten Konstruktion der Lösungen.

§ 1. Grundtatsachen der Variationsrechnung

1. Problemstellung. Ausgangspunkt für die Variationsrechnung ist die Frage nach dem Maximum oder Minimum solcher Ausdrücke, welche nicht mehr als Funktionen einer endlichen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen charakterisiert werden können, sondern, wie man mitunter sagt, „Funktionenfunktionen“ (fonctions de ligne, fonctionelles) sind. Wir verstehen unter einer Funktionenfunktion eine Größe, deren Wert abhängig ist von dem Gesamtverlauf einer oder mehrerer „Argumentfunktionen“ in einem „Grundgebiet“ G ihrer unabhängigen Variablen. Die Argumentfunktion bzw. die Argumentfunktionen können dabei innerhalb einer gewissen, genau zu bezeichnenden Funktionenklasse beliebig gewählt werden, ebenso wie das Argument bzw. das Argumentsystem einer gewöhnlichen Funktion innerhalb einer bestimmten „Punktmenge“ variieren darf. Für uns kommen hier nur solche Funktionenfunktionen in Betracht, welche definiert sind als Integrale über gewöhnliche Funktionen der Argumentfunktionen sowie ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung

---

[1]) Vgl. zu diesem Kapitel die ausführlichere Darstellung in R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, Berlin (Springer) 1924, Kap. 4 und 6.

und ihren unabhängigen Veränderlichen; die Integration ist dabei zu erstrecken über das stets als endlich vorausgesetzte Grundgebiet G.

Einfache Beispiele sind:

a) Länge einer Kurve und Flächeninhalt einer Rotationsfläche. Die Kurve $y(x)$ hat im Gebiet $x = x_0$ bis $x = x_1$ die Länge

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Rotiert sie um die x-Achse, so wird der Flächeninhalt der von den Ebenen $x = x_0$ und $x = x_1$ begrenzten Rotationsfläche gleich

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Der Quotient F/L stellt bis auf einen konstanten Faktor die Höhe des Schwerpunktes der gleichmäßig mit Masse belegten Kurve dar.

b) Potentielle Energie einer Saite. Eine Saite, die im Intervall x_0, x_1 der x-Achse ausgespannt ist, sei derart verzerrt, daß die seitliche Auslenkung an der Stelle x gegeben ist durch $u = u(x)$. Die potentielle Energie ist proportional der Längenänderung gegen die Ruhelage[1]), also proportional $\int_{x_0}^{x_1} (\sqrt{1 + u'^2} - 1)\, dx$, oder bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von u' bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\int_{x_0}^{x_1} u'^2\, dx.$$

c) Die potentielle Energie eines elastischen Stabes, der aus einer geradlinigen Ruhelage verbogen wird, ist bei hinreichend kleiner Deformation proportional dem über die Stablänge erstreckten Integral des Quadrates der Krümmung. Die Ruhelage sei die x-Achse, die Deformation an der Stelle x sei $u(x)$; dann ist also, wenn wir die höheren Potenzen von u und den Ableitungen von u gegenüber den niedrigeren vernachlässigen dürfen, die potentielle Energie durch das Integral

$$\int_{x}^{x_1} (u'')^2\, dx$$

gegeben, wobei x_0, x_1 die Endpunkte des Stabes bezeichnen.

[1]) Dies kann als die mathematische Definition der elastischen Saite angesehen werden. Entsprechendes gilt von den folgenden Beispielen.

d) Potentielle Energie einer elastischen Membran. Die potentielle Energie einer aus der Ruhelage deformierten, am Rande eingespannten elastischen Membran wird proportional der Vergrößerung des Flächeninhalts. In der Ruhelage möge die Membran ein Stück G der x, y-Ebene bedecken; mit $u(x, y)$ sei die Ausbiegung senkrecht zur Ruheebene bezeichnet, und diese sei wieder klein in dem Sinne, daß höhere Potenzen von u, u_x, u_y gegenüber niederen vernachlässigt werden dürfen. Dann wird der Ausdruck $\iint\limits_G \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}\, dx\, dy$ für den Flächeninhalt durch $\iint\limits_G \left(1 + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\right) dx\, dy$ zu ersetzen sein, und für die gesuchte potentielle Energie ergibt sich bis auf einen konstanten Faktor das Doppelintegral

$$\iint\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy.$$

e) Potentielle Energie einer elastischen Platte. Die potentielle Energie einer aus einer ebenen Ruhelage gebogenen Platte ist das Integral über eine quadratische Form der Hauptkrümmungen der bei der Biegung entstehenden Fläche, immer unter Voraussetzung der „Kleinheit" der Deformation. Bezeichnen wir die Hauptkrümmungsradien mit ϱ_1, ϱ_2, so wird also ein Ausdruck der Form $A\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right) + \frac{2B}{\varrho_1 \varrho_2}$ zu betrachten sein; wegen der Kleinheit von $u, u_x, \ldots$ kann man setzen $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2$. Die gesuchte Energie ist also gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$V = C \iint\limits_G [(\Delta u)^2 - 2\alpha(u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2)]\, dx\, dy.$$

f) Kinetische Energie für Saite, Stab, Membran und Platte. Führen die in b) bis e) betrachteten Systeme Bewegungen (Schwingungen) aus, so wird die kinetische Energie gleich

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, \dot{u}^2\, dx \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{1}{2}\iint\limits_G \varrho\, \dot{u}^2\, dx\, dy,$$

wobei $\varrho = \varrho(x)$ bzw. $\varrho = \varrho(x, y)$ die Massendichte ist.

Als Grundaufgabe der Variationsrechnung formulieren wir nunmehr: Für ein gegebenes Integral soll eine solche Argumentfunktion bzw. ein solches System von Argumentfunktionen bestimmt werden, daß für sie das Integral einen extremalen Wert erhält, verglichen mit den Werten des Integrals für Argumentfunktionen, die in einer

hinreichend kleinen Nachbarschaft dieser ausgezeichneten Funktion liegen. Dabei definieren wir: Ist h eine positive Größe, so liegt die Funktion $f_1(x, y, \ldots)$ in der Nachbarschaft oder der Nachbarschaft nullter Ordnung (h) der Funktion $f(x, y, \ldots)$, wenn für den betrachteten Definitionsbereich $|f - f_1| < h$ ist. Die Funktion $f_1(x, y, \ldots)$ liegt in der Nachbarschaft erster Ordnung (h) von $f(x, y, \ldots)$, wenn auch noch für die Ableitungen die Beziehungen $|f_x - f_{1x}| < h$, $|f_y - f_{1y}| < h, \ldots$ bestehen, usw. Wenn eine Funktionenfolge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ so gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, daß noch die Ableitungen von f_k bis zur $(n-1)$-ten Ordnung einschließlich gegen die entsprechenden Ableitungen von f konvergieren, so sagen wir, daß die Funktionen f_k die Funktion von der n-ten Ordnung approximieren. Falls nichts Besonderes gesagt wird, soll es sich stets um Nachbarschaft nullter Ordnung handeln. Die zum Vergleich zugelassenen Argumentfunktionen können ganz unabhängig wählbar sein, sie können aber auch vorgeschriebenen funktionalen Bedingungsgleichungen unterworfen werden.

Als Beispiel des einfachsten Falles kann das Problem der minimalen Rotationsfläche dienen, welches nach dem unter a) Gesagten verlangt, $J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ zum Minimum zu machen. Dabei sind zum Vergleich solche stetigen Funktionen $y = y(x)$ mit stetiger Ableitung $y'(x)$ zugelassen, welche für $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ die vorgeschriebenen Werte $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ annehmen.

Als weitere typische Aufgabe erwähnen wir das allgemeine isoperimetrische Problem, ein Integral $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ zum Extremum zu machen, während ein anderes Integral $K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$ einen vorgeschriebenen Wert annehmen soll. Hierher gehört das Problem der Kettenlinie: Die Lage eines homogenen schweren Fadens von gegebener Länge mit festen Endpunkten unter dem Einfluß der in Richtung der negativen y-Achse wirkenden Schwere zu bestimmen. Da diese Gleichgewichtslage durch die Forderung gekennzeichnet ist, daß der Schwerpunkt möglichst tief liegen soll, so haben wir nach a) zu setzen $F = y\sqrt{1 + y'^2}$, $G = \sqrt{1 + y'^2}$; die Randwerte $y(x_0)$, $y(x_1)$ sind dabei gegeben.

Während in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima ein bekannter grundlegender Satz von Weierstrass uns ein für allemal der Lösbarkeit der Aufgabe versichert, besteht in der Variationsrechnung die eigentümliche Schwierigkeit, daß Probleme, die sich ganz sinnvoll formulieren lassen, dennoch unter Umständen keine

Lösung besitzen können. Ein einfaches geometrisches Beispiel ist das folgende: Zwei Punkte auf der x-Achse sollen durch eine stetig gekrümmte, möglichst kurze Linie verbunden werden, welche in ihren Endpunkten auf der x-Achse senkrecht steht.

Wir sehen also, daß in der Variationsrechnung die Existenz der Lösung eines gegebenen Extremumproblems immer noch eines besonderen Beweises bedarf. Für viele mit der Variationsrechnung zusammenhängende Fragen bedeutet dies, wie wir später erkennen werden, eine wesentliche Schwierigkeit. Im vorliegenden Paragraphen jedoch wird es sich vorzugsweise um die Aufstellung lediglich notwendiger Bedingungen für das Eintreten eines Extremums handeln, wobei die Frage, ob ein Extremum nach Erfüllung dieser Bedingungen wirklich vorhanden ist, offen bleiben darf.

2. Die Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Man kann, wie zuerst allgemein von Euler gezeigt wurde, für die Lösungen der Variationsprobleme notwendige Bedingungen in Form von Differentialgleichungen angeben. Wir erhalten diese am einfachsten durch eine Zurückführung des Variationsproblems auf ein gewöhnliches Extremumproblem.

a) Das einfachste Problem der Variationsrechnung. Es sei das Extremum von

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

zu bestimmen, wobei x_0, x_1, $y(x_0) = y_0$; $y(x_1) = y_1$ fest gegeben sind. Für die Funktion $y(x)$ soll die zweite Ableitung $y''(x)$ noch stetig sein[1]). Es liefere $y = y(x) = f(x)$ das Extremum gegenüber allen Kurven einer hinreichend kleinen Nachbarschaft (h) zweiter Ordnung zu $y = f(x)$. Nun sei $\eta(x)$ eine mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige, für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwindende, sonst beliebige Funktion, und $\delta y = \varepsilon\,\eta(x)$. Dann hat $J[y + \delta y] = \Phi(\varepsilon)$ ein Extremum für $\varepsilon = 0$, so daß $\Phi'(\varepsilon)_{\varepsilon=0} = 0$ gelten muß. Die Differentiation unter dem Integralzeichen ergibt

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \eta + F_{y'} \eta')\,dx = 0,$$

und nach Produktintegration unter Beachtung von $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ wird

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta\,[F]_y\,dx = 0.$$

[1]) Diese Forderung bewirkt keine Beschränkung der möglichen Lösungen, was wir hier jedoch nicht beweisen wollen.

Aus der Willkür von $\eta(x)$ folgert man aber leicht, daß dann

$$-[F]_y = \frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0$$

werden muß.

Dies ist die fundamentale Eulersche Differentialgleichung, deren Form in der Analysis und den Anwendungen immer wiederkehrt. Ihr Bestehen ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums. Es handelt sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in deren allgemeiner Lösung zwei willkürliche Konstanten vorkommen, genau so viele, wie wir im allgemeinen zur Befriedigung der Randbedingungen brauchen. In Erweiterung der früher eingeführten Bezeichnung nennen wir alle Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung von nun an Extremalen oder stationäre Kurven, auch wenn sie kein wirkliches Extremum liefern. Wir bezeichnen $\delta y = \varepsilon\eta(x)$ als Variation von $y(x)$ und den Ausdruck $\delta J = \varepsilon\Phi'(0)$ als Variation des Integrals.

Das oben betrachtete Beispiel der minimalen Rotationsfläche liefert mit $F = y\sqrt{1+y'^2}$ die Eulersche Gleichung $yy'' = 1 + y'^2$, die durch $y = c \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{c} + c_1\right)$ befriedigt wird.

b) Mehrere gesuchte Funktionen. Bei dem Problem, mehrere, etwa n Funktionen $y(x), z(x), \ldots$ von x so zu bestimmen, daß das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\, dx$$

ein Extremum wird (oder einen stationären Wert erhält), wobei wieder die Funktionswerte an den Randpunkten gegeben sein mögen, kann offenbar die soeben angegebene Methode ohne weiteres auf jede einzelne der Funktionen $y(x)$, $z(x)$, ... angewandt werden, so daß wir die n Differentialgleichungen

$$\begin{cases} -[F]_y \equiv \frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0, \\ -[F]_z \equiv \frac{d}{dx}F_{z'} - F_z = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

erhalten.

c) Auftreten höherer Ableitungen. Wenn es sich um ein Variationsproblem der Form

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx = \text{Min.}$$

handelt, wo F eine gegebene Funktion der Argumente $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ ist, und zum Vergleich alle Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung zugelassen werden, bei denen am Rande die Funktionswerte und die Werte der Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung gegeben sind, so erhalten wir durch die schon in a) angewandte Methode eine Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung:

$$[F]_y \equiv F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

die wir wiederum als Eulersche Gleichung bezeichnen. Durch die $2n$ Randbedingungen können wir uns die in ihrem allgemeinen Integral vorhandenen $2n$ Integrationskonstanten festgelegt denken. Das Ergebnis kann wieder sofort auch auf den Fall mehrerer Argumentfunktionen angewandt werden.

d) Mehrere unabhängige Variable. Das Variationsproblem der Bestimmung der Extrema von mehrfachen Integralen führt zu einer oder mehreren partiellen Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen, so wie die bisher behandelten Aufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen führten. Wir betrachten etwa das Problem, das über ein gegebenes Gebiet G erstreckte Doppelintegral

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

durch eine mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehenen Funktion u zum Extremum zu machen, wobei die Randwerte der Funktion vorgegeben sein mögen. Bei Anwendung der Methode aus a) wird

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\, dy + \varepsilon \int_\Gamma \eta \{ F_{u_x} dy - F_{u_y} dx \} = 0,$$

wobei $\eta(x, y)$ auf dem Rande Γ von G verschwindet und sonst (bis auf geeignete Stetigkeitseigenschaften) willkürlich ist. Wir schließen daraus

$$-[F]_u \equiv \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0.$$

Aus der Mannigfaltigkeit aller Lösungen dieser Gleichung muß gemäß der gestellten Randbedingung ein Individuum bestimmt werden (Randwertaufgabe).

Entsprechend erhalten wir ein System von solchen Differentialgleichungen, wenn mehrere unbekannte Funktionen zu bestimmen sind, und eine Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung

$$[F]_u \equiv F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{u_{yy \ldots y}} = 0,$$

wenn die Funktion F die Ableitungen $u_x, u_y, \ldots, u_{yy\ldots y}$ bis zur n-ten Ordnung enthält.

Zum Beispiel liefert $F = u_x^2 + u_y^2$ die Potentialgleichung

$$\varDelta u = u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

die Funktion $F = (\varDelta u)^2 = u_{xx}^2 + 2\,u_{xx}\,u_{yy} + u_{yy}^2$ liefert

$$\varDelta\varDelta u = u_{xxxx} + 2\,u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

3. Randbedingungen. In den vorangehenden Überlegungen waren wir stets von der Voraussetzung ausgegangen, daß am Rande des Integrationsbereiches die zu bestimmenden Funktionen vorgeschriebene Werte annehmen. Bei zahlreichen in den Anwendungen auftretenden Fragen bestehen jedoch für die Randwerte gar keine oder andersartige Bedingungen. Wenn bei der Bestimmung von Funktionen diesen keine Randbedingungen auferlegt sind, so sprechen wir von freien Rändern. Diese Fragen lassen sich durch eine leichte Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse behandeln, wenn man den Ausdruck für die erste Variation δJ des Integrals J den erweiterten Voraussetzungen anpaßt.

Beim einfachsten Variationsproblem $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,d\,x = \text{Min.}$ können wir unmittelbar den allgemeinen Ausdruck der ersten Variation auf Grund der Überlegungen von a) in der Form

$$\begin{aligned}\delta J &= \varepsilon \int\limits_{x_0}^{x_1} [F]_y \cdot \eta\, d\,x + \varepsilon\, F_{y'} \,.\, \eta \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= \int\limits_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta\, y\, d\,x + F_{y'} \,.\, \delta\, y \Big|_{x_0}^{x_1}\end{aligned}$$

hinschreiben, wobei wir wie oben $\varepsilon\,\eta(x) = \delta\,y$ setzen und zur Abkürzung wieder $[F]_y$ für die linke Seite der Eulerschen Differentialgleichung schreiben. Bei einem Doppelintegral J wird entsprechend nach d):

$$\delta J = \iint\limits_G [F]_u\, \delta\, u\, d\,x\, d\,y + \int\limits_\Gamma \left\{ F_{u_x} \frac{d\,y}{d\,s} - F_{u_y} \frac{d\,x}{d\,s} \right\} \delta\, u\, d\,s; \quad \delta\, u = \varepsilon\,\eta.$$

Entsprechende Formeln gelten auch für den Fall mehrerer Argumentfunktionen. Aus diesen Ausdrücken erhalten wir ohne Schwierigkeiten die gesuchten Bedingungen für den stationären Charakter des Integrals, d. h. für das Verschwinden der ersten Variation. Zunächst ist es selbstverständlich, daß auch in unseren Fällen nicht fester Randwerte die Eulerschen Gleichungen $[F]_y = 0$ bzw. $[F]_u = 0$ erfüllt sein müssen. Denn gewiß muß unser Extremum bzw. der

stationäre Charakter erst recht bestehen bleiben, wenn zum Vergleich nur die engere Klasse derjenigen Funktionen herangezogen wird, die am Rande mit der betrachteten Extremalen übereinstimmen, für die also am Rande $\eta(x) = 0$ bzw. $\eta(x, y) = 0$ ist. In den Gleichungen $\delta J = 0$ haben wir also nur noch die auf den Rand bezüglichen Bestandteile zu berücksichtigen, da die anderen identisch für jede Variation verschwinden. Sind insbesondere am Rande des festen Integrationsgebietes keinerlei Bedingungen für die Funktionen y bzw. u vorgeschrieben, so ergeben sich wegen der Willkürlichkeit der Randwerte von $\eta(x)$ bzw. $\eta(x, y)$ sofort die natürlichen Randbedingungen

$$F_{y'}(x_0) = F_{y'}(x_1) = 0$$

bzw.

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0.$$

Neben solchen freien Rändern kommen bei geometrischen Problemen, d. h. bei der Bestimmung von Kurven oder Flächen, solche Aufgaben vor, wo die gesuchte Kurve auf vorgeschriebenen Kurven oder Flächen beginnen oder endigen oder wo der Rand des gesuchten Flächenstückes auf einer gegebenen Fläche liegen soll. Hier würde also das Integrationsgebiet der unabhängigen Variablen beim Variationsproblem nicht fest gegeben sein, sondern mit bestimmt werden müssen. Auch diese Frage kann nach den erläuterten Methoden leicht behandelt werden; außer der Eulerschen Gleichung ergibt sich eine Beziehung zwischen den Richtungen der Extremalen und der Ausgangskurve (bzw. -fläche) an ihrem Treffpunkt. (Transversalitätsbedingung.)

4. Variationsprobleme mit Nebenbedingungen. Während bei den bisher behandelten Problemen die Argumentfunktionen, abgesehen von etwa gestellten Randbedingungen, frei wählbar waren und sodann die Lösung des Variationsproblems durch die Eulerschen Differentialgleichungen mit den gegebenen oder den natürlichen Randbedingungen festzulegen war, werden in den nunmehr zu betrachtenden Aufgaben die Argumentfunktionen außer den Randbedingungen noch Nebenbedingungen anderer Art unterworfen sein, die sich auf den gesamten Verlauf der Argumentfunktionen beziehen und durch welche die Eulersche Differentialgleichung selbst eine wesentliche Modifikation erleidet.

a) Isoperimetrische Probleme. Der einfachste Typus solcher Aufgaben wird durch das isoperimetrische Problem dargestellt, welches wir schon oben § 1, 1 formulierten. Auch diese Aufgabe kann ähnlich

wie die einfachste Aufgabe in 2 a) behandelt werden. Das Ergebnis lautet: Wenn $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ bei gegebenen Randwerten unter der Bedingung $\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = c$ zum Extremum gemacht werden soll, so ergibt sich als notwendige Bedingung

$$[F^*]_y = 0, \quad F^* = \lambda_0 F + \lambda G,$$

worin λ_0, λ zwei Konstanten sind, von denen die erste λ_0 gleich 1 genommen werden kann, falls nicht gerade für die Extremale $[G]_y = 0$ ist. Die Konstante λ heißt dann der Lagrangesche Faktor.

b) Allgemeine Nebenbedingungen. Der nächst einfache Typus von Variationsproblemen mit Nebenbedingungen ist: Ein Integral $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ stationär zu machen, während die zu bestimmenden Funktionen $y(x)$, $z(x)$ außer an die Randbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$ noch an eine gegebene Nebenbedingung der Form $G(x, y, z) = 0$ geknüpft sind. Geometrisch gesprochen, soll eine auf einer gegebenen Fläche gegebene Raumkurve $y(x)$, $z(x)$ durch die Extremumforderung festgelegt werden.

Zur Aufstellung der notwendigen Bedingungen für die Funktionen $y(x)$, $z(x)$ ergibt sich der naturgemäße Weg, mit Hilfe der Gleichung $G = 0$ eine der Funktionen y, z zu eliminieren, wodurch wir ein gewöhnliches Variationsproblem ohne Nebenbedingungen erhalten. Dies Verfahren kann jedoch durch eine Umrechnung, die wir hier unterdrücken, in die folgende elegantere Gestalt gebracht werden: Wir setzen für die Funktion $F^* = F + \lambda G$:

$$[F^*]_y = 0, \quad [F^*]_z = 0.$$

Daraus und aus $G = 0$ sind x, y, λ zu bestimmen. Der einzige Unterschied gegen das isoperimetrische Problem liegt darin, daß der Eulersche Faktor λ im allgemeinen nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von x wird: Die gleiche Regel gilt auch noch für den allgemeinen Fall einer Nebenbedingung $G(x, y, y', z, z') = 0$, die wir nichtholonom nennen, wenn sie keiner endlichen Gleichung $H(x, y, z) = c$ äquivalent ist. Auf den Beweis müssen wir wieder verzichten.

5. Bemerkungen über die Weiterentwicklung der Theorie. Die Eulerschen Gleichungen stellen, wie bereits mehrfach betont, lediglich notwendige, keineswegs aber hinreichende Bedingungen für das Eintreten eines Extremums dar. Man hat daher seit Legendre das Bestreben gehabt, die Eulerschen Gleichungen durch Hinzu-

fügung weiterer Bedingungen zu hinreichenden zu ergänzen. Diese weiteren Bedingungen haben durchweg die Gestalt von Ungleichungen. Wir werden jedoch von den dahin gehörigen Untersuchungen keinen Gebrauch zu machen haben und begnügen uns daher mit diesem Hinweis, zumal in Kap. V für die einfachsten (bisher auch allein vollständig durchgeführten) Fälle implizite die hier angedeuteten Entwicklungen enthalten sind.

§ 2. Anwendungen der Variationsrechnung

1. Das Hamiltonsche Prinzip und die Differentialgleichungen der Physik. Die meisten Differentialgleichungsprobleme der mathematischen Physik stehen in enger Beziehung zur Variationsrechnung durch das Hamiltonsche Prinzip. Dieses Prinzip, ursprünglich als kürzester und prägnantester Ausdruck für die Bewegungsgesetze der Punktmechanik hergeleitet, hat sich weit über den ursprünglichen Wirkungsbereich hinaus als ein zuverlässiger Führer bei der Aufstellung der Grundgesetze physikalischer Vorgänge bewährt. Es besagt, daß der wirkliche physikalische Vorgang gegenüber „virtuellen" Vorgängen einem gewissen „Hamiltonschen" Integral einen stationären Wert verleiht.

Wir wollen hier dieses Prinzip axiomatisch an die Spitze stellen, um daraus die Differentialgleichungen der Physik deduktiv herzuleiten.

a) Das Hamiltonsche Prinzip in der Punktmechanik. In der Punktmechanik handelt es sich um die Bewegungen eines Systems von endlich vielen, n Freiheitsgraden. Die Lage des Systems möge durch die Werte der n Parameter $q_1, q_2, \ldots, q_n$ charakterisiert sein, deren Kenntnis als Funktion der Zeit t das Ziel ist. Wir denken uns das System in seinen mechanischen Eigenschaften festgelegt durch seine kinetische Energie $T(\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, welche eine Funktion der n Geschwindigkeiten $\dot q_i$, der n Koordinaten q_i und der Zeit t ist, und zwar eine quadratische Form in den Geschwindigkeiten $T = \sum_{i,k=1}^{n} P_{ik}(q_1, \ldots, q_n, t)\, \dot q_i \dot q_k$, und zweitens durch seine potentielle Energie $U(q_1, \ldots, q_n, t)$, welche wir als eine Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und t annehmen, und deren negativ genommene partielle Ableitungen $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ die auf die Koordinaten q_i wirkenden Kräfte darstellen. Das Hamiltonsche Prinzip besagt nun: Zwischen zwei Zeit-

momenten t_0 und t_1 verläuft die Bewegung so, daß die Funktionen $q_i(t)$ das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

stationär machen, verglichen mit solchen benachbarten Funktionen $\bar{q}_i(t)$, für welche $\bar{q}_i(t_0) = q_i(t_0)$ und $\bar{q}_i(t_1) = q_i(t_1)$ ist. Oder: Die wirkliche Bewegung macht das Integral J stationär gegenüber allen benachbarten virtuellen Bewegungen, die in demselben Zeitintervall von der Ausgangslage des Systems zur Endlage führen.

Nach § 1, 2 b) ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip sofort die allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0. \tag{1}$$

Bemerkenswert ist, daß das Hamiltonsche Prinzip seine Gültigkeit bewahrt, auch wenn zwischen den Koordinaten q_i oder den Koordinaten und ihren Ableitungen $\dot{q}_i$ Bedingungsgleichungen bestehen. In den Bewegungsgleichungen treten dann noch Multiplikatoren auf.

Den Übergang von den Bewegungsgleichungen zu den Bedingungen des Gleichgewichts erhalten wir, indem wir in (1) die Ableitungen nach der Zeit gleich Null setzen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \tag{2}$$

Bekanntlich sieht man leicht, daß das Gleichgewicht dann stabil ist, wenn für das in Frage kommende Wertsystem $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die potentielle Energie U ein Minimum besitzt (während die Gleichungen (2) zunächst nur stationären Charakter ausdrücken). Wir betrachten eine stabile Gleichgewichtslage, in welcher wir sämtliche Koordinatenwerte q_i gleich Null annehmen dürfen. Beschränken wir uns nun auf solche der Gleichgewichtslage benachbarte Bewegungszustände, für welche wir höhere Potenzen der Koordinaten und ihrer zeitlichen Ableitungen gegen niedere vernachlässigen dürfen, so können wir T als positiv definite quadratische Form in den $\dot{q}_i$ mit konstanten Koeffizienten a_{ik} ansehen:

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k,$$

und ebenso U als positiv definite quadratische Form in den q_i mit konstanten Koeffizienten b_{ik}:

$$U = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, q_i\, q_k.$$

Die Bewegungsgleichungen gehen also in das System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} q_k = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

über, welches die „kleinen Schwingungen" um eine stabile Gleichgewichtslage beherrscht.

b) Schwingende Kontinua. Bei den Systemen der Kontinuumsmechanik, deren Lage nicht mehr durch endlich viele Koordinaten bestimmt ist, bleibt die Formulierung des Hamiltonschen Prinzips genau dieselbe. Nach den Feststellungen von § 1, 1 b), f) ergibt sich z. B. für die schwingende Saite bei einer elastischen Kraft $\mu = \mu(x)$ die Aufgabe

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}(\varrho u_t^2 - \mu u_x^2)\,dx\,dt = \text{Min.},$$

was auf die Differentialgleichung

$$(\mu u_x)_x - \varrho u_{tt} = 0$$

führt. Für den transversal schwingenden Stab wird bei konstanter elastischer Kraft μ:

$$\mu u_{xxxx} + \varrho u_{tt} = 0.$$

Genau so erhalten wir nach dem früher Festgestellten für die schwingende Membran bei konstantem μ die Gleichung

$$\mu \Delta u - \varrho u_{tt} = 0$$

und für die Platte

$$\mu \Delta \Delta u + \varrho u_{tt} = 0.$$

Für die eingespannte Saite oder Membran haben wir die Randbedingung $u = 0$, während die natürliche Randbedingung nach § 1, 3 lauten würde $u' = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, wo n die Normale des Randes von G bedeutet. Für den eingeklemmten Stab wird an den Enden $u = 0$ und $u_x = 0$, für die eingeklemmte Platte $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

c) Eigenwertprobleme. Alle diese Differentialgleichungen können integriert werden durch Ansätze der Form $u(x; t) = y(x) z(t)$ bzw. $u(x, y; t) = v(x, y)\, z(t)$, wobei die Faktoren $z(t)$ harmonische Funktionen der Zeit werden. Für die Saite z. B. ergibt sich

$$\frac{(p(x)\, y'(x))'}{\varrho(x)\, y(x)} = \frac{z''(t)}{z(t)} = -\lambda,$$

worin jetzt $p(x)$ für die Elastizität μ geschrieben ist. Offenbar muß λ eine Konstante sein, und zwar, wie sich später ergeben wird, eine

positive; folglich wird $z(t)$ eine harmonische Funktion, und für $y(x)$ gilt die lineare Differentialgleichung

$$(p y')' + \lambda \varrho y = 0.$$

Entsprechend liefert der für die Membran gemachte Ansatz für $\mu = \text{const} = 1$:

$$\Delta v + \lambda \varrho v = 0.$$

Die Funktion $y(x)$ bzw. $u(x, y)$ muß dabei den gegebenen Randbedingungen genügen, und es ergibt sich die fundamentale Aufgabe, die Konstante λ, die zunächst frei verfügbar ist, so zu bestimmen, daß diese Forderungen durch eine nicht identisch verschwindende Funktion befriedigt werden kann. Eine solche nennen wir eine Eigenfunktion, das zugehörige λ einen Eigenwert der Differentialgleichung; λ heißt einfacher Eigenwert, wenn es mit diesem λ nicht zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung gibt. Wir erhalten so zu jedem Eigenwerte λ eine periodische Bewegung mit der Frequenz $\sqrt{\lambda}$. Der lineare Charakter der Schwingungsgleichungen ermöglicht eine Superposition derartiger Lösungen, und es ist plausibel, daß man — wie dies im Sonderfalle $p = \text{const}$, $\varrho = \text{const}$ nach dem Satze über die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen durch Fouriersche Reihen wirklich möglich ist — die allgemeine Lösung des Schwingungsproblems in dieser Weise darstellen kann; doch soll der ausführliche Beweis dieser Tatsache, der weiter ausholende Vorbereitungen erfordert, hier nicht durchgeführt werden.

Man verschafft sich einen besonders bequemen Zugang zu den im Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem auftretenden vielfältigen Fragen, wenn man die Eigenfunktionen und Eigenwerte durch Extremumeigenschaften definiert. Diesen Gedanken wollen wir im nächsten Abschnitt verfolgen.

2. Die Extremumeigenschaften der Eigenwerte. a) Die klassischen Extremumeigenschaften. Wir betrachten als typisches Beispiel das Eigenwertproblem der Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda \varrho u = \Delta u + \lambda \varrho u = 0 \quad (\varrho > 0), \tag{3}$$

wobei wir das Grundgebiet G von einer oder mehreren stetigen Kurven Γ mit stückweise stetiger Tangente begrenzt denken. Die Randbedingung möge die Form $u = 0$ haben. Wir betrachten nun folgendes Variationsproblem:

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

soll zum Minimum gemacht werden, während

$$\iint_G \varrho\, \varphi^2 \, dx\, dy = 1$$

ist und zur Konkurrenz alle in G mit Einschluß des Randes stetigen und mit stückweise stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehenen Funktionen $\varphi(x, y)$ zugelassen werden, für welche auf dem Rande $\varphi = 0$ ist.

Wir werden in unseren späteren Rechnungen außer der soeben eingeführten Abkürzung $D[\varphi]$ noch die Bezeichnung

$$D(\varphi, \psi) = \iint_G (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y)\, dx\, dy$$

benutzen.

Nach den allgemeinen Regeln der Variationsrechnung aus § 1, 4 muß die Lösung $u = u_1$ dieses Problems, falls sie existiert, der Differentialgleichung

$$L(u_1) + \lambda_1 \varrho\, u_1 = 0$$

und der Randbedingung $u = 0$ genügen, wobei λ_1 eine Konstante ist. Sie ist also Eigenfunktion unseres Eigenwertproblems. Modifiziert man nun das Variationsproblem, indem man als weitere Nebenbedingung für die zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen die Forderung

$$\iint_G \varrho\, \varphi\, u_1 \, dx\, dy = 0$$

hinzufügt, so muß die Lösung u_2, wenn sie existiert, einer Gleichung der Form

$$L(u_2) + \lambda_2 \varrho\, u_2 + \mu\, \varrho\, u_1 = 0$$

genügen, wobei λ_2, μ Konstanten sind. Die Nebenbedingung $u = 0$ bleibt auch von u_2 erfüllt. Indem wir mit u_1 multiplizieren, sodann über G integrieren, die Greensche Formel

$$\iint_G \{u_1 L(u_2) - u_2 L(u_1)\}\, dx\, dy = \int_\Gamma \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) ds$$

anwenden und die Randbedingung beachten, erhalten wir unmittelbar $\mu \iint_G \varrho\, u_1^2 \, dx\, dy = 0$. Mithin ist $\mu = 0$, und u_2 genügt der Gleichung $L(u_2) + \lambda_2 \varrho\, u_2 = 0$; es ist also λ_2 ein weiterer Eigenwert, u_2 eine zugehörige Eigenfunktion. Indem wir so fortfahren, können wir einen Eigenwert λ_3 und eine zugehörige Eigenfunktion u_3 definieren und allgemein einen n-ten Eigenwert und zugehörige Eigenfunktionen

durch unser obiges Variationsproblem charakterisieren, wobei sukzessive die $n-1$ Bedingungen

$$\iint_G \varrho\, \varphi\, u_i\, dx\, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4}$$

hinzugefügt werden.

Die Eigenwerte λ_n sind gerade die Minimumwerte $D[u_n]$ des Integralausdrucks $D[\varphi]$, wie man sofort auf Grund der Greenschen Umformung

$$D[\varphi] = -\iint_G \varphi\, L(\varphi)\, dx\, dy$$

und der Randbedingung $u = 0$ erkennt; daraus folgt übrigens, daß sie, wie bereits oben bemerkt, stets positiv sind. Da beim n-ten unserer Minimumprobleme der Bereich der konkurrenzfähigen Funktionen φ gegenüber dem $n-1$-ten Problem weiter eingeschränkt ist, so müssen unsere Eigenwerte der Relation

$$\lambda_{n-1} \leqq \lambda_n$$

genügen.

Man kann sich leicht überzeugen, daß man auf diese Weise sicher alle überhaupt vorhandenen Eigenwerte erhalten muß. Daß man tatsächlich welche erhält, d. h. daß die aufgestellten Variationsprobleme Lösungen besitzen, werden wir an dieser Stelle nicht beweisen; hier begnügen wir uns mit der Hervorhebung der Tatsache, daß es unter den gemachten Voraussetzungen stets abzählbar unendlich viele Eigenwerte gibt. Auch für die übrigen der genannten schwingungsfähigen Systeme ist eine Definition der Eigenwerte durch ihre Extremumeigenschaften möglich, deren Aufstellung dem Leser überlassen werden kann.

b) Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. Wir können die hier gegebene rekurrente Definition des n-ten Eigenwertes und der zugehörigen Eigenfunktion durch eine independente Definition ersetzen, bei der man zur Charakterisierung des n-ten Eigenwertes und der n-ten Eigenfunktion die Kenntnis der vorangehenden nicht vorauszusetzen braucht.

Wir modifizieren unser Variationsproblem dadurch, daß wir der Funktion φ statt der Bedingungen (4) die $n-1$ veränderten Bedingungen

$$\iint_G \varrho\, \varphi\, v_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5}$$

auferlegen, wobei $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ irgendwie gewählte, in G stückweise stetige Funktionen sind. Ob und wann das so entstehende

Variationsproblem eine Lösung besitzt, bleibe dahingestellt. Jedenfalls aber werden die Integrale $D[\varphi]$ unter den gestellten Bedingungen eine untere Grenze besitzen, welche von den Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ abhängig ist und mit $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ bezeichnet werden soll. Wir können nun leicht folgende Tatsache beweisen: Die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ des modifizierten Variationsproblems ist stets kleiner oder gleich dem Minimum λ_n bei dem ursprünglichen Variationsproblem, d. h. es gilt

$$d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \leqq \lambda_n = d\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}. \tag{6}$$

Zum Beweis bilden wir aus den ersten n Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des Randwertproblems mit n Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine lineare Kombination

$$\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n,$$

welche den $n-1$ Bedingungen (5) und der Bedingung

$$\iint\limits_G \varrho\, \varphi^2\, dx\, dy = 1 \tag{7}$$

genügt. Die Bedingungen (5) stellen $n-1$ homogene lineare Gleichungen für die n Größen c_i dar, während die Relation (7) wegen der Orthogonalität der Funktionen u_i gleichbedeutend ist mit

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 1. \tag{8}$$

Die Bestimmung der c_i ist somit stets mindestens auf eine Art möglich. Die so gebildete Funktion φ genügt überall auf dem Rande Γ von G ebenso wie die Eigenfunktionen den gestellten Randbedingungen. Sie ist also im Variationsproblem konkurrenzfähig.

Aus der Greenschen Formel folgt

$$D[u_i, u_k] = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ \lambda_k & \text{„} \quad i = k. \end{cases}$$

Mithin wird

$$D[\varphi] = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k D[u_i, u_k] = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \cdots + c_n^2 \lambda_n,$$

also ist wegen (8) und wegen $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$

$$D[\varphi] \leqq \lambda_n.$$

Damit ist bewiesen, daß bei vorgegebenen Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ der Ausdruck $D[\varphi]$ Werte annehmen kann, die jedenfalls nicht größer als λ_n sind, und daß somit auch die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ dieser Werte nicht größer als λ_n ist. Da für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$ diese untere Grenze gerade gleich λ_n wird, wie wir oben sahen, so erhalten wir folgendes grundlegende Resultat, welches die gesuchte independente Definition des n-ten Eigenwertes darstellt:

Satz: Die $n-1$ Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ seien in G stückweise stetig, es sei ferner $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck $D[\varphi]$ annehmen kann, wenn φ irgendeine in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, welche den Bedingungen

$$\iint \varrho\, \varphi v_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$
$$\iint \varrho\, \varphi^2\, dx\, dy = 1$$

sowie der Randbedingung $\varphi = 0$ genügt. Dann ist der n-te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda \varrho u = 0$ für das Gebiet G und die betreffende Randbedingung gleich dem größten Wert, den diese untere Grenze annehmen kann, wenn für die $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ alle zulässigen Funktionensysteme in Betracht gezogen werden. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi = u_n$.

Bei dem zur unhomogenen Saite [$\mu = p(x)$ nicht konstant] gehörigen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem

$$(py')' + \lambda \varrho y = 0 \qquad (p > 0,\ \varrho > 0)$$

folgt aus dem auch hier in entsprechender Form gültigen Satze sofort durch Vergleich mit den explizite bekannten Eigenwerten der Gleichungen $p_m y'' + \lambda \varrho_M y = 0$ und $p_M y'' + \lambda \varrho_m y = 0$, wo p_m, ϱ_m, p_M, ϱ_M die Minima bzw. Maxima von $p(x)$ und $\varrho(x)$ im Grundintervall bedeuten (die nach unseren Annahmen alle positiv sind), daß der Quotient $\frac{\lambda_n}{n^2}$ bei wachsendem n zwischen endlichen Grenzen bleibt. Die Durchführung dieser einfachen Betrachtung kann dem Leser überlassen bleiben. Indem man durch die Transformation

$$z = \sqrt[4]{p\varrho}\, y, \quad t = \int_0^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx, \quad l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx$$

die Gleichung $(py')' + \lambda \varrho y = 0$ in die Form

$$z'' - rz + \lambda z = 0 \quad \left[z'' = \frac{d^2 z}{dt^2};\ r = r(t) \text{ bekannte stetige Funktion}\right]$$

für das Gebiet $0 \leqq t \leqq l$ bringt, kann man noch schärfer beweisen [1])

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \frac{1}{a^2}\left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx\right)^2, \quad a = x_1 - x_0.$$

[1]) Vgl. die Ausführungen in R. Courant und D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik 1, 336.

Wir betonen, daß unser allgemeiner Satz mit allen noch daraus zu ziehenden Folgerungen in entsprechender Form auch für die übrigen Beispiele zu beweisen ist.

3. Allgemeine Folgerungen aus den Extremumeigenschaften der Eigenwerte. Der soeben bewiesene Satz ermöglicht uns, überaus leicht zahlreiche, wesentlich qualitative Eigenschaften der Eigenwerte zu übersehen, von denen hier nur einige der wichtigsten hervorgehoben werden sollen. Das Maximum-Minimum von $D[\varphi]$ kann offenbar nur zunehmen (jedenfalls nicht abnehmen), wenn der Bereich der zum Vergleich zugelassenen Funktionen φ auf irgendeine Weise eingeschränkt wird; es kann nur abnehmen (jedenfalls nicht zunehmen), wenn dieser Bereich erweitert wird. Darauf beruhen alle unsere im folgenden zu ziehenden Schlüsse. Da die Eigenwerte physikalisch die Quadrate der Schwingungszahlen bedeuten [vgl. oben § 2, 1 c)], so besagt das soeben ausgesprochene Prinzip in physikalischer Deutung:

Wird ein schwingungsfähiges System gezwungen, unter Zwangsbedingungen zu schwingen, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als im Sinne wachsender Tonhöhe.

Beispielsweise muß sich bei einer eingespannten schwingenden elastischen Membran der Grundton und sämtliche Obertöne in dem angegebenen wachsenden Sinne ändern, wenn die Membran außer am Rande noch sonst an Linien- oder Flächenstücken festgehalten wird. Dagegen wird sich der Grundton und alle Obertöne bei einer Membran in fallendem Sinne ändern, wenn sie einen Riß erhält, oder bei einer schwingenden Platte, wenn das Material einen „Sprung" bekommt. Im letzteren Falle werden nämlich für die Konkurrenzfunktionen φ bzw. für deren Ableitungen an der Stelle des Risses oder Sprunges die Bedingungen der Stetigkeit aufgehoben.

Wir betrachten weiterhin zunächst ausschließlich die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ (also $\varrho = \text{const} = 1$) mit der Randbedingung $u = 0$. Es gilt der

Satz 1: Der n-te Eigenwert eines Gebietes G ist kleiner als der n-te Eigenwert jedes Teilgebietes G'. (Monotonität der Eigenwerte.)

Wir erhalten nämlich das Maximum-Minimum-Problem für G' aus dem für G durch die Zusatzforderung, daß φ in G außerhalb G' verschwinden soll.

Daraus folgt sofort der weitere Satz:

Satz 2: Der n-te Eigenwert eines Gebietes G ändert sich stetig mit dem Gebiet. (Stetigkeit der Eigenwerte.)

Denn der n-te Eigenwert des abgeänderten Gebietes G^* liegt zwischen den Eigenwerten β', β'' zweier einander ähnlicher Gebiete B', B'', zwischen deren Rändern die Ränder Γ und Γ^* von G und G^* eingeschlossen sind. Die Eigenwerte β', β'' unterscheiden sich aber um einen Faktor (Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses), der beliebig nahe an 1 herangebracht werden kann, wenn Γ und Γ^* sich hinreichend wenig unterscheiden. — Die Stetigkeit bleibt übrigens auch bei variablem ϱ erhalten; doch ist der Beweis dann weniger einfach.

Seien etwa $G', G'', G''', \ldots$ eine Anzahl [1]) von Teilgebieten von G, welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben und G entweder ganz oder teilweise ausfüllen. Legt man dann den Funktionen φ die Bedingung auf, in G überall auf den Rändern von $G', G'', \ldots$ und in dem außerhalb aller $G^{(i)}$ liegenden Teile von G zu verschwinden, so ergibt sich als Lösung des durch die neue Bedingung modifizierten Maximum-Minimum-Problems der n-te Eigenwert λ_n^* aus der Reihe der zusammengenommenen Eigenwerte der Gebiete G', G'', G''', ..., wobei die Eigenwerte dieser Teilgebiete natürlich nach ihrer Vielfachheit zu zählen und die λ_i^* in eine aufsteigende Reihe geordnet zu denken sind. Das Maximum-Minimum wird angenommen für die zu diesem Eigenwert im zugehörigen Gebiet gehörige Eigenfunktion, welche außerhalb als identisch Null fortgesetzt zu denken ist. Physikalisch besagt dies die selbstverständliche Tatsache, daß die Membran nunmehr so schwingt, als ob sie aus den völlig voneinander unabhängigen Teilmembranen $G', G'', G''', \ldots$ bestände. Aus der obigen Bemerkung folgt nunmehr unmittelbar

$$\lambda_n \leqq \lambda_n^*,$$

d. h. wir erhalten den folgenden

Satz 3: Der n-te Eigenwert eines Gebietes G ist sicher nicht größer als die n-t-größte Zahl aus der Gesamtmenge der Eigenwerte einer Anzahl von Teilgebieten von G, welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

Man kann diese Tatsache auch folgendermaßen ausdrücken:

Die Anzahl der Eigenwerte eines Gebietes G, welche unterhalb einer vorgegebenen Grenze liegen, ist sicher mindestens so groß wie die gesamte Anzahl der unter derselben

---

[1]) Gemeint ist eine endliche Anzahl, die folgenden Überlegungen gelten aber auch für eine unendliche Anzahl.

Grenze liegenden Eigenwerte einer Reihe von Teilgebieten von G, welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

4. Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte. Die im vorigen Abschnitt bewiesenen Ungleichungen betreffs der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ bei der Randbedingung $u = 0$ ermöglichen es uns jetzt, auch sie asymptotisch zu berechnen, wie das für die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung schon mit geringeren Mitteln möglich war (vgl. oben) Die jetzt zu verwendende Methode kann auch für allgemeinere Fälle anwendbar gemacht werden. Das Ergebnis für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ lautet:

Für den n-ten Eigenwert λ_n des Gebietes G mit dem Flächeninhalt f gilt die asymptotische Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{f}.$$

Die Gestalt des Gebietes verliert also asymptotisch ihren Einfluß.

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen:

Es bestehe zunächst G aus einer endlichen Anzahl h kongruenter Quadrate vom Flächeninhalt $a^2 = \frac{f}{h}$.

Nun sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte eines solchen Quadrates explizite bekannt und werden durch die Ausdrücke

$$\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}; \qquad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2 + k^2) \qquad (l, k = 1, 2, \ldots)$$

geliefert. Hieraus ergibt sich in bekannter Weise durch Abzählung der Gitterpunkte für die Anzahl $A'(\lambda)$ der Eigenwerte des Quadrates, welche unterhalb einer Grenze λ liegen,

$$A'(\lambda) \simeq \frac{a^2}{4\pi}\lambda, \tag{9}$$

wobei das Zeichen $\simeq$ asymptotische Gleichheit, d. h. Gleichheit bis auf einen mit wachsendem λ gegen 1 konvergierenden Faktor bedeutet.

Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Schranke λ gelegenen Eigenwerte des Gebietes G ist nun zufolge dem Satze 3 aus § 2, 3 größer oder gleich dem h-fachen der Anzahl $A'(\lambda)$, somit

$$A(\lambda) \geqq A'(\lambda)\cdot h \simeq \frac{f}{4\pi}\lambda. \tag{10}$$

Um für diese Anzahl ebenso eine obere Schranke zu finden, ist der nächstliegende Weg, das Gebiet G durch Hinzufügung eines aus $\overline{h}$ Quadraten vom Inhalt a^2 bestehenden Gebietes $\overline{G}$ zu einem großen Quadrat Q vom Inhalt $(f + \overline{f}) = a^2(h + \overline{h})$ zu ergänzen. Für die

Anzahlen $A^*(\lambda), \overline{A}(\lambda)$ der Gebiete $Q, \overline{G}$ gelten dann entsprechend zu (9) und (10) die Beziehungen

$$A^*(\lambda) \cong \frac{f+\overline{f}}{4\pi}\lambda, \tag{11}$$

$$\overline{A}(\lambda) \overset{\sim}{\geqq} \frac{\overline{f}}{4\pi}\lambda. \tag{12}$$

Addiert man (11) und (12), so folgt

$$A(\lambda)+\overline{A}(\lambda) \overset{\sim}{\geqq} \frac{f+\overline{f}}{4\pi}\lambda. \tag{13}$$

Andererseits ist dem Satze 3 von § 2, 3 zufolge

$$A(\lambda)+\overline{A}(\lambda) \leqq A^*(\lambda),$$

also wegen (11)

$$A(\lambda)+\overline{A}(\lambda) \overset{\sim}{\leqq} \frac{f+\overline{f}}{4\pi}\lambda, \tag{14}$$

und diese Beziehungen (13), (14) sind nur dann vereinbar, wenn gilt:

$$A(\lambda) \cong \frac{f}{4\pi}\lambda, \tag{15}$$

$$\overline{A}(\lambda) \cong \frac{\overline{f}}{4\pi}\lambda. \tag{16}$$

Die Gleichung (15) drückt aber genau die behauptete Tatsache aus für jedes aus kongruenten Quadraten zusammengesetzte Gebiet. Der Beweis für ein beliebiges quadrierbares Gebiet folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß man jedes derartige Gebiet mit seinem Flächeninhalt durch solche Quadratgebiete beliebig von innen und außen approximieren kann, und daß nach § 2, 3 der n-te Eigenwert eine stetige, monotone Funktion des Gebietes ist.

Vertiefung und Erweiterung der Methode. Die vorangehende Überlegung beruht wesentlich auf der Tatsache, daß man die Eigenwertverteilung der Differentialgleichung für jedes Quadrat beherrscht. Die Gewinnung der Gleichung (13) erfordert sowohl die Kenntnis der Eigenwerte des Quadrates Q als auch der Eigenwerte der Quadrate vom Inhalt a^2. Man kann sich jedoch von diesem Übelstande leicht befreien, wenn man den Grundgedanken unserer Methode konsequent verfolgt. Modifiziert man nämlich das Maximum-Minimum-Problem jetzt nicht dadurch, daß man den Funktionen φ neue Bedingungen auferlegt, sondern dadurch, daß man die an sie gestellten Bedingungen mildert, so kann umgekehrt das bei der Lösung entstehende Maximum-Minimum nicht größer werden als ursprünglich.

Wir nehmen wieder an, daß G aus endlich vielen kongruenten Quadraten besteht, und gestatten der Funktion φ, auf den in G liegenden Seiten dieser Quadrate unstetig zu sein. Dann ergibt sich, wie man unschwer erkennt, als Lösung des Problems eine Eigenfunktion eines gewissen Teilquadrates, welche aber nunmehr auf den im Innern von G liegenden Rändern der Randbedingung: Normale Ableitung gleich Null, genügt. Da man auch für diese Randbedingung die Eigenwertverteilung der Teilquadrate beherrscht, so ergibt sich leicht die obere Schranke für $A(\lambda)$, ohne daß man auf die Eigenwerte eines umfassenden Quadrates zurückzugreifen braucht.

Durch den hier angegebenen Gedanken wird unsere Methode geeignet, in ganz einheitlicher Weise alle hier in Frage kommenden Probleme der Eigenwertverteilung zu lösen. Man erkennt mit ihrer Hilfe leicht, wie wenig die asymptotische Eigenwertverteilung durch die Randbedingungen beeinflußt wird. Was die allgemeineren sich selbst adjungierten Differentialgleichungen anbetrifft, deren Koeffizienten nicht konstant sind, so erhält man die Eigenwertverteilung aus unserer Methode durch die Bemerkung, daß man für hinreichend kleine Quadrate die Eigenwertverteilung bei den verschiedenen in Betracht kommenden Randbedingungen beherrscht, da man hier die Koeffizienten als annähernd konstant ansehen kann.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die dargelegte Methode ohne jede Veränderung für eine beliebige Anzahl von unabhängigen Veränderlichen gilt, und daß sie ferner auch für sich selbst adjungierte Differentialgleichungen höherer Ordnung anwendbar bleibt.

§ 3. Direkte Methoden der Variationsrechnung

1. Problemstellung. Während man in der klassischen Variationsrechnung auf dem Wege über die Eulersche Differentialgleichung das Extremumproblem zu lösen sucht und dabei das Differentialgleichungsproblem als das einfachere gegenüber dem Variationsproblem ansieht, wollen wir nun dieses Verhältnis umkehren. Wir versuchen insbesondere, Randwertaufgaben von partiellen Differentialgleichungen dadurch zu lösen, daß wir diese Differentialgleichungen als Eulersche Gleichungen eines Variationsproblems auffassen, und dann dessen Lösung auf einem direkten Wege aufstellen. Die theoretische Hauptschwierigkeit solcher Untersuchungen bildet die Frage, ob das betreffende Variationsproblem überhaupt eine Lösung besitzt. Wenn wir z. B. wissen, daß das „Dirichletsche Variationsproblem"

$$\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy = \text{Min.}$$

bei vorgegebenen Randwerten der Funktion $\varphi(x, y)$ auf dem Rande Γ des Integrationsgebietes G eine mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Lösung u hat, dann muß u der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, und es ist damit die grundlegende Randwertaufgabe der Potentialtheorie für das Gebiet G als lösbar erkannt. Ähnliche, wenngleich einfachere Verhältnisse treffen wir bei Problemen mit nur einer unabhängigen Veränderlichen an.

Daß die Frage nach der Existenz einer Lösung des Variationsproblems keineswegs selbstverständlich zu bejahen ist, wurde schon in § 1 betont und an einem Beispiel erläutert. Während also bei Extremumproblemen mit endlich vielen Veränderlichen die Existenzfrage auf Grund der einfachsten Prinzipien der Analysis durchaus elementaren Charakter hat, handelt es sich hier um eine ernste, grundsätzliche Schwierigkeit.

2. Allgemeine Idee der direkten Methoden. Der allgemeine Gedankengang, welcher der direkten Überwindung dieser Schwierigkeit zugrunde liegt, ist der folgende: Es möge sich darum handeln, einen Integralausdruck $D[\varphi]$ zum Minimum zu machen, wobei der Konkurrenzbereich der Funktionen φ irgendwie charakterisiert sein kann. Wir nehmen an, daß für alle konkurrenzfähigen Funktionen φ der Ausdruck $D[\varphi]$ nach unten beschränkt sei. Dann muß die Menge aller möglichen Zahlen $D[\varphi]$ eine untere Grenze d besitzen, mit anderen Worten, es muß eine Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ von konkurrenzfähigen Funktionen geben derart, daß $\lim\limits_{n \to \infty} D[\varphi_n] = d$ ist. Das Problem der direkten Auflösung unserer Minimumaufgabe wird nun darin bestehen, daß man einmal die Konstruktion einer solchen Minimalfolge wirklich vornimmt, was eine verhältnismäßig einfache Aufgabe ist, und daß man zweitens durch ein konvergentes Verfahren aus der Minimalfolge die wirkliche Lösung des Problems gewinnt, falls sie existiert. In diesem zweiten Teil der Aufgabe liegt ihre wesentliche Schwierigkeit. Es kann nämlich sehr wohl vorkommen, daß ein Minimumproblem eine ganz bestimmte Lösung besitzt, ohne daß eine gegebene Minimalfolge gegen diese Lösung zu konvergieren braucht. Es sei z. B. die Minimalfläche gesucht, welche durch eine geschlossene Kurve Γ in der x, y-Ebene geht; zum Vergleich sollen zugelassen werden alle von Γ begrenzten Flächenstücke, welche aus endlich vielen Teilen mit stetig veränderlicher Tangentialebene zusammengesetzt sind. Es existiert eine Lösung, nämlich das von Γ berandete Gebiet G der x, y-Ebene. Nun sei φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ in G gleich Null außerhalb eines Kreises K_n, in dem die Funktion φ_n geometrisch durch einen geraden Kreiskegel der Höhe $a \neq 0$ gegeben

ist; ziehen sich die Kreise K_n für wachsendes n auf einen Punkt P in G zusammen, so bilden die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Minimalfolge, die in P nicht gegen die Lösung konvergiert. Offenbar bereitet es keine Schwierigkeit, Minimalfolgen zu bilden, die entsprechend in einer in G überall dichten Punktmenge nicht gegen die Lösung konvergieren.

Es ergibt sich aus dem Beispiel die Notwendigkeit, bei einer zu konstruierenden Minimalfolge entweder durch einen nachträglichen Glättungsprozeß oder durch von vornherein getroffene Vorsichtsmaßregeln für die Konvergenz besonders zu sorgen. In diesem Punkte unterscheiden sich die verschiedenen in der Literatur auftretenden Methoden voneinander.

3. Konstruktion der Minimalfolgen. Ritzsches Verfahren. Nach dem Vorbilde von Walther Ritz können wir die Konstruktion von Minimalfolgen vornehmen, indem wir von einem System fester, für das gegebene Grundgebiet G jeweils auszuwählender Koordinatenfunktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ ausgehen, welche folgende Eigenschaften haben:

Ist φ irgendeine konkurrenzfähige Vergleichsfunktion, so läßt sich eine lineare Kombination $\varphi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ derart angeben, daß φ_n selbst eine konkurrenzfähige Vergleichsfunktion ist, und daß $D[\varphi_n]$ sich von $D[\varphi]$ um weniger als eine beliebig klein vorgegebene Größe unterscheidet.

Die Möglichkeit der Wahl solcher Koordinatenfunktionen ist dabei eine fast unmittelbare Folge bekannter Approximationssätze. Wenn z. B. für die Funktion φ keinerlei Randbedingungen vorgeschrieben sind, sondern lediglich Stetigkeit der im Integral $D[\varphi]$ auftretenden Ableitungen, so kann man für die Koordinatenfunktionen einfach Polynome nehmen; doch wird bei wirklichen numerischen Rechnungen, wie sie Ritz ausgeführt hat, eine individuelle, mit richtigem Takt ausgeführte Wahl der Koordinatenfunktionen für das praktische Gelingen wesentlich sein.

Wir denken uns nun in der Funktion $\varphi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ die n Parameter c_1 bis c_n durch die Forderung bestimmt, daß $D[\varphi_n]$ einen möglichst kleinen Wert haben soll; da es sich hier um ein Minimumproblem mit endlich vielen unabhängigen Veränderlichen handelt, so bereitet jetzt die Existenzfrage keine Schwierigkeit. Falls der Differentialausdruck $D[\varphi]$ quadratischen Charakter trägt, handelt es sich sogar lediglich um die Auflösung linearer Gleichungen. Aus der obigen Grundforderung für die Koordinatenfunktionen geht nun unmittelbar hervor, daß die eben konstruierten Funktionen φ_n eine Minimalfolge bilden, womit prinzipiell der erste Teil unserer Aufgabe erledigt ist.

Im einzelnen sei darauf hingewiesen, daß der Ausdruck $D[\varphi]$ hinsichtlich seiner Allgemeinheit keinerlei Beschränkungen unterliegt. Er kann z. B. auch aus der Summe eines Flächen- und eines Randintegrals bestehen, etwa

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy + t \int_\Gamma (\varphi - f(s))^2\, ds,$$

wobei $f(s)$ eine vorgegebene stetige Funktion der Bogenlänge, t ein positiver Parameter ist. Wir erkennen an diesem Beispiel, wenn wir uns den Parameter t über alle Grenzen wachsend denken, daß das Problem mit festgehaltenen Randwerten $f(s)$ sich als Grenzfall eines Problems mit freien Rändern auffassen läßt. Diese Bemerkung gibt uns die Möglichkeit, auch bei nicht freien Rändern mit Koordinatenfunktionen ω_i zu operieren, welche am Rande keinen Bedingungen unterworfen sind, so daß man, was prinzipiell von Bedeutung ist, z. B. immer mit Polynomen auskommen kann. Selbstverständlich erfordern die betreffenden Konvergenztatsachen eine ausführliche Begründung, die aber an dieser Stelle nicht gegeben werden kann.

4. Die Methoden der Konvergenzerzeugung. In allen Fällen, wo es sich nur um die Berechnung des Minimalwertes d handelt, z. B. bei der Frage nach den Schwingungszahlen schwingender Systeme, genügt die Konstruktion der Minimalfolgen aus 3. vollständig. Will man jedoch die Lösung u des Variationsproblems selbst kennen, so bedürfen wir im allgemeinen eines besonderen konvergenzerzeugenden Verfahrens, wie schon in 2. erkannt wurde. Über die hierher gehörigen Untersuchungen soll nunmehr kurz, ohne vollständige Durchführung der Beweise, berichtet werden, wobei wir an einigen typischen Beispielen die verschiedenen Methoden darlegen wollen.

Bei der Randwertaufgabe der Potentialtheorie, d. h. dem Minimumproblem $\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$ bei gegebenen Randwerten $f(s)$, gelangt man am schnellsten zum Ziele, wenn man die Lösbarkeit der Minimumaufgabe und somit der Randwertaufgabe für einen beliebigen Kreis voraussetzt[1]). Man muß obendrein noch ausdrücklich die Voraussetzung machen, daß es überhaupt vergleichsfähige Funktionen $\varphi(x, y)$ mit endlichem Integral $D[\varphi]$ gibt. Bedeckt man das ganze Gebiet G mit abzählbar vielen Kreisen, die sich nur am Rande häufen dürfen, so können wir eine beliebige Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ für einen beliebigen dieser Kreise K folgendermaßen glätten: Mit den Werten, welche φ_n auf der Peripherie von K annimmt, lösen wir für K die

---

[1]) Bekanntlich wird die Lösung der Randwertaufgabe für einen Kreis durch das Poissonsche Integral explizite gegeben.

Randwertaufgabe. So entsteht eine Funktion ψ_n, welche außerhalb von K in G mit φ_n übereinstimmt und in K die Gleichung $\Delta \psi_n = 0$ erfüllt. Offenbar bilden die $\psi_1, \psi_2, \ldots$ wieder eine Minimalfolge, von der man leicht nachweisen kann, daß sie in K gegen eine Grenzfunktion u konvergiert, welche in K der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Würden wir dasselbe Verfahren für einen anderen Kreis K' anwenden, so würden wir für diesen ebenfalls ein „Grenzpotential" u erhalten; es läßt sich nun ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen, daß diese Potentiale u sämtlich analytische Fortsetzungen voneinander sind, so daß wir von einer Grenzfunktion u in G sprechen können, welche der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Endlich bleibt dann noch der ebenfalls nicht schwierige Nachweis zu führen, daß diese Grenzfunktion die vorgeschriebenen Randwerte $f(s)$ besitzt, womit dann die Lösbarkeit der Randwertaufgabe bewiesen ist.

Dieses Glättungsverfahren leidet wie andere, ähnliche Methoden an dem Übelstande, daß an einmal gefundenen Minimalfolgen nachträgliche Korrekturen angebracht werden müssen. Es läßt sich aber durch einen Gedanken von großer Allgemeinheit für weite Klassen von Problemen von vornherein ein Prinzip angeben, welches uns die Garantie leistet, daß die konstruierte Minimalfolge konvergiert und keiner weiteren Glättung bedarf.

Wir gehen dabei von der Bemerkung aus, daß eine Änderung der Funktion φ im allgemeinen um so stärker auf den Wert des Integrals $D[\varphi]$ einwirken wird, je höhere Ableitungen der Funktion φ unter dem Integralzeichen vorkommen. Diesen Umstand kann man ausnutzen, indem man beachtet, daß der Eulersche Differentialausdruck $L(\varphi)$ stets Ableitungen doppelt so hoher Ordnung als der Integrand von $D[\varphi]$ enthält. Betrachten wir also statt des ursprünglichen Variationsproblems nunmehr ein Problem der Form

$$D'[\varphi] = D[\varphi] + t \int_G ((L(\varphi))^2 dg = \text{Min.},$$

wobei t wiederum ein positiver Parameter ist und dg das Inhaltselement des Gebietes G bedeutet, so haben wir, wie sich leicht in vielen Fällen zeigen läßt, nunmehr eine Gewähr dafür, daß die Minimalfolgen des neuen Variationsproblems ohne weitere Glättungsprozesse gegen eine Grenzfunktion u konvergieren. Dabei müssen wir über die Vergleichsfunktionen φ natürlich die entsprechenden Stetigkeitsvoraussetzungen machen. Dieses neue Variationsproblem kann aber sicherlich keine andere Lösung haben als das ursprüngliche; denn der Integralausdruck $D'[\varphi]$ ist sicherlich nicht kleiner als $D[\varphi]$ und stimmt andererseits mit $D[\varphi]$ überein, wenn φ gleich der Lösung u des ursprünglichen

Minimumproblems gesetzt wird, welche der Differentialgleichung $L(u) = 0$ genügt. Jede beliebige Minimalfolge des neuen Variationsproblems stellt hiernach eine konvergente Minimalfolge des ursprünglichen Variationsproblems dar, und wir haben somit nach dem Ritzschen Verfahren aus 3. ein Mittel in der Hand, nicht nur den Wert d, sondern auch die Lösung u jeweils mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Ja noch mehr: Wir können weitergehend das Verfahren so ausgestalten, daß nicht nur die Lösung u, sondern auch deren Ableitungen bis zu einer vorgeschriebenen Ordnung mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden können. Um dies zu erreichen, brauchen wir nur weitere Zusatzglieder hinzuzufügen, und zwar Integrale, welche wir erhalten, indem wir den Ausdruck $L(\varphi)$ einmal oder mehrere Male nach den unabhängigen Variablen differenzieren, dann quadrieren, über G integrieren und schließlich mit einem positiven Gewichtsfaktor multiplizieren. Die Willkür bei der Wahl dieser Gewichtsfaktoren gibt uns ein Mittel an die Hand, die Genauigkeit der Rechnung mehr auf die Funktion selbst oder deren Ableitungen einzustellen.

Als Beispiel erwähnen wir nur, daß die Randwertaufgabe der Potentialtheorie sich nach unserer Methode sehr einfach durch Betrachtung des Variationsproblems

$$D'[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + (\Delta\varphi)^2)\,dx\,dy = \text{Min.}$$

lösen läßt, und daß die einfachste und kürzeste Behandlung der Theorie der Eigenfunktionen für die Gleichung der schwingenden Membran erfolgen kann auf Grund der Variationsaufgabe

$$D'[\varphi] = \iint_G (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy = \text{Min.}, \quad \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx\,dy = 1,$$

zu welch letzterer Bedingung bei den höheren Eigenfunktionen weitere Nebenbedingungen hinzutreten. Wir müssen uns jedoch an dieser Stelle mit diesen allgemeinen Andeutungen begnügen und im übrigen den Leser auf die Literatur verweisen [1]).

---

[1]) Vgl. R. Courant und D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2.

Register